UNIVERZITET U BEOGRADU

Dr ĐORĐE MUŠICKI
Dr BOŽIDAR MILIĆ

MATEMATIČKE OSNOVE TEORIJSKE FIZIKE

SA ZBIRKOM REŠENIH ZADATAKA

Naučna knjiga

BEOGRAD, 1975

Recenzenti

dr TATOMIR ANĐELIĆ, dr MILAN VUJAČIĆ, dr VELIMIR ROGLIĆ

Rešenjem rektora Univerziteta u Beogradu br. 06-927/1 od 10. juna 1974. god. a na osnovu Odluke Komisije za izdavačku delatnost i udžbenike Skupštine Univerziteta od 4. juna 1974. god. štampano kao stalni univerzitetski udžbenik

Za izdavača *Dragoslav Joković*, urednik *Gordana Nikolić*, tehnički urednik *Mihailo Jozić* korektor *Gordana Krstić*

Tiraž 1500 primeraka

Štampa Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17

SADRŽAJ

3. GENERALISANE KOORDINATE

DRUGI DEO. TENZORI U TRODIMENZIONOM EUKLIDOVOM PROSTORU

4. TENZORI KAO OPERATORI

5. TENZORI I MATRICE

TREĆI DEO. OPŠTI TENZORSKI RAČUN I RIEMANN-OVA GEOMETRIJA

6. TENZORSKA ALGEBRA

7 TENZORSKA ANALIZA

ČETVRTI DEO. LINEARNI VEKTORSKI PROSTORI

8. STRUKTURE APSTRAKTNIH PROSTORA

9. UNITARNI I HILBERTOVI PROSTORI

10. LINEARNI OPERATORI

REŠENJA ZADATAKA

PREDGOVOR

Ova knjiga predstavlja matematički uvod u Teorijsku fiziku i obuhvata materijal koji se na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu predaje pod nazivom Matematička fizika I. Ona se sastoji iz četiri dela: 1. Vektori u trodimenzionom Euklidovom prostoru, 2. Tenzori u trodimenzionom Euklidovom prostoru, 3. Opšti tenzorski račun i Riemann-ova geometrija, i 4. Linearni vektorski prostori. Na kraju svake od deset glava knjige nalazi se i izvestan broj (10 – 30) zadataka, čija su kompletna rešenja data na kraju knjige.

Pri pisanju ove knjige autori nisu postavili sebi za cilj da prikažu metode teorijske fizike na širokom planu, koje bi obuhvatale čitav niz oblasti matematike od interesa za primenu. Oni su se ograničili samo na osnovni matematički aparat, koji predstavlja jezik teorijske fizike, ali sa željom da što bolje upoznaju čitaoca sa matematičkim osobinama i uzajamnim odnosima osnovnih veličina, kojima će se on stalno služiti. Pri tome su se trudili da ih prikažu na najpogodniji način i u obliku u kome će ih sretati u teorijskoj fizici, ali istovremeno i sa potrebnom matematičkom strogošću neophodnom budućem teoretičaru. Sa tog stanovišta izložena je teorija vektora i tenzora u trodimenzionom Euklidovom prostoru – aparat klasične mehanike i klasične elektrodinamike, opšti tenzorski račun u Riemann-ovim prostorima – matematičko oruđe teorije relativnosti i linearni vektorski prostori – baza savremene kvantne mehanike.

U prvom i drugom delu se detaljno razmatraju vektori i tenzori u trodimenzionom Euklidovom prostoru, pri čemu se polazi od onih njihovih osobina koje su pogodne za odgovarajuće generalizacije ovih pojmova kao i samog pojma prostora. Tako se vektori i tenzori uvode kao matematički objekti koji svakom pravcu u prostoru pridružuju jedan skalar odnosno jedan vektor po određenom zakonu ili, alternativno, kao matematički objekti sa određenim transformacionim osobinama pri rotaciji koordinatnog sistema. Naime, pridruživanje skalara odnosno vektora svakom pravcu u prostoru uspostavlja vezu sa funkcionelama i linearnim operatorima, neophodnim u kvantnoj mehanici, a transformacione karakteristike će biti polazna tačka za generalizacije koje vode ka opštem tenzorskom računu. Dosta prostora se u knjizi posvećuje tenzorima drugog reda u Euklidovom prostoru, sa posebnom namerom da se već ovde uvede niz pojmova karakterističnih za linearne operatore uopšte, čime se između ostalog uspostavlja i veza sa Dirac-ovim kvantnomehaničkim formalizmom „bra" i „ket" vektora.

Polazeći od ovog jezgra, generalizacije se vrše u dva pravca. S jedne strane, u trećem delu knjige na bazi transformacionih osobina uopštavaju se pojmovi vektora i tenzora kao i svojstva samog prostora, čime se dolazi do opšteg tenzorskog računa u Riemann-ovoj geometriji. S druge strane, u četvrtom delu uopštavaju se sami elementi prostora, koji se shvataju kao ma kakav skup

apstraktnih elemenata sa određenim osobinama, što dovodi do raznih varijanti linearnih vektorskih prostora. Pri tome je naročita pažnja obraćana na dobijanje rezultata od interesa u teoriji relativnosti odnosno u kvantnoj mehanici, što je i usmeravalo izbor odgovarajućeg materijala.

Iz ovih razloga se u okviru ove knjige malo govorilo o Banachovim prostorima, a nasuprot tome detaljno se razmatraju prostori sa definisanim skalarnim proizvodom, za koje autori ove knjige prihvataju naziv ermitski prostori. Pri tome se ovi klasifikuju kako prema broju dimenzija tako i prema osobinama kompletnosti i separabilnosti, uz isticanje kako sličnosti tako i fizički interesantnih razlika između konačno i beskonačno dimenzionih ermitskih prostora. Teorija linearnih operatora u ovim prostorima u knjizi je izložena dosta detaljno, i to na način koji ove veličine, bazične u kvantnoj mehanici, prikazuje kao jednu od generalizacija klasičnih tenzora. Terminologija celog četvrtog dela je, koliko je to bilo moguće, usaglašena sa onom koja se koristi u kvantnoj mehanici.

Posebnu specifičnost ove knjige čine zadaci, a njihova rešenja, propraćena potrebnim uputstvima i komentarima, data su na kraju knjige i zauzimaju dobar deo njenog obima. Ovo ima za cilj ne samo ilustrovanje i uvežbavanje izloženog gradiva, već i osposobljavanje čitaoca za samostalno dobijanje novih rezultata. Zadaci su dobrim delom uzeti iz konkretnih fizičkih problema, ali su dati u nešto apstraktnijoj formulaciji, prilagođenoj profilu ove knjige. Stoga se zadaci moraju shvatiti kao sastavni, bitni deo gradiva izloženog u ovoj knjizi.

Na kraju je dat spisak literature, kojom su se autori koristili i koja se preporučuje čitaocima. Zainteresovani čitalac će u referencama uključenim u taj spisak moći naći mnoge detalje i dokaze koji nisu mogli biti uključeni u tekst ove knjige, delom zbog toga da se ne bi narušavao kontinuitet izlaganja, a delom zbog toga da bi obim knjige ostao u razumnim granicama.

U Beogradu, 21. marta 1972. god. *Đ. Mušicki i B. Milić*

PRVI DEO

VEKTORI U TRODIMENZIONOM EUKLIDOVOM PROSTORU

1. VEKTORSKA ALGEBRA

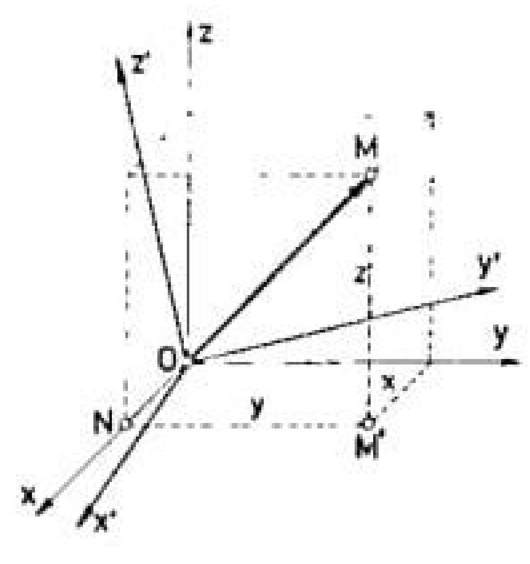
1. 1. OSNOVNE OSOBINE VEKTORA

Skalari i vektori. U geometriji i fizici javljaju se veličine raznih vrsta, koje možemo klasifikovati, prema broju podataka kojima su određene, na sledeći način. Neke od njih su potpuno određene samo jednim brojem i takve veličine nazivaju se *skalari*, na pr. masa, temperatura, jačina struje. Druge pak određene su ne samo svojom brojnom vrednošću – intenzitetom, već i svojim pravcem i smerom, za što su potrebna ukupno tri broja. Takve veličine nazivaju se *vektori*, kao na pr. vektor položaja, brzina, sila, jačina električnog polja. One se obično označavaju strelicom iznad slova, na pr. $\vec{A}$ ili masnim slovima **A**, a njihov intenzitet sa $|\mathbf{A}|$ ili A. Postoje i složenije veličine, tzv. tenzori ili afinori, za čije je određivanje potrebno više od tri broja, ali o njima će biti reči docnije.

Pri operisanju sa vektorima mogu se koristiti dva različita metoda. *Simbolički metod* prikazuje vektore neposredno na osnovu definicija algebarskih operacija sa njima, ne pozivajući se ni na kakav koordinatni sistem. Drugi, *koordinatni metod* prikazuje vektore skupom njihovih projekcija (A_1, A_2, A_3) na koordinatne ose nekog sistema. U fizičkoj literaturi se ove veličine najčešće nazivaju *komponente* vektora, dok je u matematičkoj literaturi uobičajeniji naziv *koordinate* vektora. U ovoj knjizi koristićemo prvi naziv. Razume se, oba ova prikaza moraju biti ekvivalentna, što se označava sa

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3). \tag{1.1}$$

Transformacije koordinata tačke pri rotaciji koordinatnog sistema. Neka je $M(x, y, z)$ ma koja tačka u koordinatnom sistemu $OXYZ$, pa ispitajmo kako se transformišu njene Descartes-ove pravougle koordinate pri rotaciji koordinatnog sistema, tj. pri prelazu u neki drugi sistem $OX'Y'Z'$ sa istim koordinatnim početkom (sl. 1.1). Zakone transformacije koordinata možemo dobiti izjednačavanjem projekcija duži OM i odgovarajuće izlomljene linije $ONM'M$ na koordinatne ose. Projektovanjem na pr. na X' osu tako nalazimo



Sl. 1.1

$$x' = ON\cos(X, X') + NM'\cos(Y, X') + M'M\cos(Z, X').$$

Označimo jedinične vektore koordinatnih osa sa $\mathbf{e}_i$ odnosno $\mathbf{e}_i'$ $(i=1, 2, 3)$, a kosinuse pravca novih koordinatnih osa u odnosu na stare sa

$$\alpha_{ik}=\cos(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_k). \tag{1.2}$$

Sa ovim oznakama prethodni izraz dobija oblik

$$x'=x\cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1')+y\cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1')+z\cos(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1'),$$

odnosno

$$x'=\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z, \tag{1.3}$$

a na sličan način možemo naći i projekcije na ostale dve koordinatne ose.

Radi konciznijeg pisanja dobijenih obrazaca uvedimo oznake

$$x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z, \tag{1.4}$$

koje ćemo u tom cilju koristiti i u daljem izlaganju. Tada imamo

$$x_1'=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3=\sum_{k=1}^{3}\alpha_{1k}x_k,$$

a zamenjujući indeks 1 indeksima 2 i 3, dobićemo i projekciju na y' i z' osu, što zajedno možemo napisati u obliku

$$x_i'=\sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}x_k \qquad (i=1, 2, 3).$$

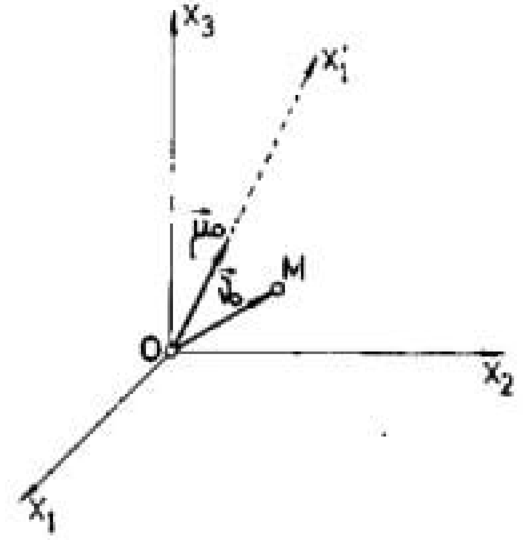
Pored ovoga može se uvesti i tzv. *sumaciona konvencija: ako se u nekom izrazu isti latinski indeks pojavljuje dva puta, podrazumeva se sumiranje po tom indeksu* dok za grčke indekse to ne važi. Na osnovu te konvencije prethodna jednačina može se napisati

$$x_i'=\alpha_{ik}x_k \qquad (i=1, 2, 3). \tag{1.5}$$

jer se indeks k pojavljuje dva puta.

Obrasci (1.5) određuju *zakon transformacije koordinata pri rotaciji koordinatnog sistema* tj. pri prelazu iz sistema $OX_1X_2X_3$ u sistem $OX_1'X_2'X_3'$. Zakon inverzne transformacije dobija se zamenom mesta starih i novih koordinata kao i indeksa i i k, pri čemu se kosinusi uglova između koordinatnih osa ne menjaju

$$x_k=\alpha_{ik}x_i' \quad (k=1, 2, 3). \tag{1.6}$$



Sl. 1.2

23 **Veze između koeficijenata pravca.** Povucimo iz koordinatnog početka O dva proizvoljna pravca sa jediničnim vektorima $\vec{\mu}_0$ i $\vec{\nu}_0$ i za x_1' osu uzmimo pravu određenu vektorom $\vec{\mu}_0$ (sl. 1.2). Koordinate krajnje tačke M vektora $\vec{\nu}_0$ u odnosu na izabrani sistem biće $x_k=\cos(\vec{\nu}_0, \mathbf{e}_k)$, a njegova projekcija na $\vec{\mu}_0$ je $x_1'=\cos(\vec{\mu}_0, \vec{\nu}_0)$. S druge strane, iz obrasca (1.5) za $i=1$ se dobija

$$x_1'=\alpha_{1k}x_k=\cos(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_k)\cos(\vec{\nu}_0, \mathbf{e}_k),$$

odnosno

$$\cos(\vec{\mu}_0, \vec{\nu}_0)=\cos(\vec{\mu}_0, \mathbf{e}_i)\cos(\vec{\nu}_0, \mathbf{e}_i) \tag{1.7}$$

Ovaj obrazac određuje *ugao između dva bilo koja pravca.* U specijalnom slučaju $\vec{\mu}_0=\vec{\nu}_0=\mathbf{e}_\sigma'$ imaćemo

$$1=\cos(\mathbf{e}_\sigma', \mathbf{e}_i)\cos(\mathbf{e}_\sigma', \mathbf{e}_i),$$

gde prema učinjenoj konvenciji treba sumirati samo po indeksu i, a za $\vec{\mu}_0=\mathbf{e}_\sigma', \vec{\nu}_0=\mathbf{e}_\tau'$ biće

$$0=\cos(\mathbf{e}_\sigma', \mathbf{e}_i)\cos(\mathbf{e}_\tau', \mathbf{e}_i).$$

Uvedemo li tzv. *Kronecker-ov simbol*

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{za } i=j\\ 0 & \text{,, } i\neq j\end{cases}, \tag{1.8}$$

oba gornja obrasca mogu se napisati konciznije

$$\alpha_{\sigma i}\alpha_{\tau i}=\delta_{\sigma\tau}.$$

Ako još izmenimo uloge starih i novih koordinata, $\cos(\mathbf{e}_\sigma', \mathbf{e}_i)$ prelazi u $\cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_\sigma')$, tj. $\alpha_{\sigma i}$ prelazi u $\alpha_{i\sigma}$, te dobijamo

$$\alpha_{i\sigma}\alpha_{i\tau}=\delta_{\sigma\tau}. \tag{1.9}$$

Ove relacije, kojih ima šest, izražavaju *veze između koeficijenata pravaca* α_{ik}, odakle neposredno vidimo da su samo tri od njih nezavisna.

Osnovna osobina vektora. Neka je $\mathbf{A}$ ma kakav vektor u pravcu jediničnog vektora $\vec{\nu}_0$, njegova projekcija na pravac određen jediničnim vektorom μ_0 biće tada

$$A^{(\mu)}=A\cos(\vec{\nu}_0, \vec{\mu}_0). \tag{1.10}$$

Ako ovaj obrazac primenimo na koordinatne ose, dobićemo komponente posmatranog vektora

$$A_i=A\cos(\vec{\nu}_0, \mathbf{e}_i) \qquad (i=1, 2, 3). \tag{1.11}$$

Kombinujući ove formule sa (1.7), možemo projekciju $A^{(\mu)}$ vektora $\mathbf{A}$ izraziti pomoću kosinusa pravca

$$A^{(\mu)}=A\cos(\vec{\mu}_0, \mathbf{e}_i)\cos(\vec{\nu}_0, \mathbf{e}_i),$$

tj.

$$A^{(\mu)}=A_i\cos(\vec{\mu}_0, \mathbf{e}_i). \tag{1.12}$$

Ovim obrascem izražena je sledeća fundamentalna karakteristika vektora: *ma za kakav pravac u prostoru svakom vektoru može se pridružiti izvestan skalar relacijom linearnom i homogenom u odnosu na kosinuse tog pravca.* To može služiti i kao definicija pojma vektora: svaka veličina koja ima gornju osobinu predstavlja vektor. S ovog gledišta, intenzitet vektora je maksimalna vrednost svih projekcija na različite pravce, a pravac koji odgovara ovom maksimumu biće pravac posmatranog vektora.

Zakon transformacije vektora pri rotaciji koordinatnog sistema. Ispitajmo sad kako se transformišu komponente ma kog vektora **A** pri rotaciji koordinatnog sistema. Ako u obrascu (1.12) jedinični vektor $\vec{\mu}_0$ predstavlja pravac i smer X_1' ose, odgovarajuća projekcija vektora **A** će biti

$$A_1' = A_i \cos(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_i). \qquad (1.13)$$

Zamenjujući ovde indeks i indeksom k (ovakve zamene oznake indeksa po kome se vrši sumiranje uvek su dozvoljene), poslednji obrazac možemo napisati u obliku

$$A_1' = A_k \cos(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_k) = \alpha_{1k} A_k,$$

gde su uzete u obzir oznake (1.2). Ako umesto indeksa 1 stavimo indeks 2 odnosno 3 dobićemo i ostale projekcije vektora **A** na nove koordinatne ose, tako da uopšte važi

$$A_i' = \alpha_{ik} A_k \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (1.14)$$

Ovaj obrazac predstavlja *zakon transformacije ma kog vektora pri rotaciji koordinatnog sistema*. Ta osobina može takođe služiti i kao ekvivalentna definicija vektora: *u ma kom pravouglom koordinatnom sistemu vektor je određen trima komponentama koje se pri transformaciji koordinata* (1.5) *transformišu prema zakonu* (1.14). Drugim rečima, komponente vektora pri rotaciji osa transformišu se po istom zakonu kao i same koordinate.

Inverzni obrasci mogu se dobiti množenjem relacija (1.14) sa α_{ij} i sumiranjem po indeksu i, imajući pri tome u vidu (1.9)

$$\alpha_{ij} A_i' = A_k \alpha_{ij} \alpha_{ik} = A_k \delta_{jk} = A_j.$$

Odavde sledi, ako se indeks j zameni sa k

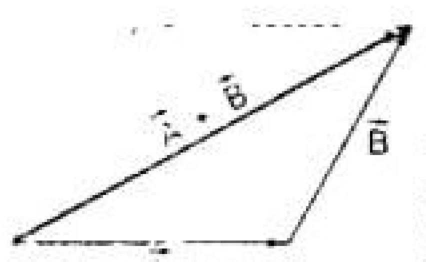
$$A_k = \alpha_{ik} A_i'. \qquad (k = 1, 2, 3) \qquad (1.15)$$

1.2. OPERACIJE SA VEKTORIMA

Osnovne operacije. Vektorska algebra može se izgraditi bilo na bazi simboličkog bilo analitičkog metoda. Dva vektora **A** i **B** smatraćemo *jednakim* ako i samo ako su im odgovarajuće komponente međusobno jednake

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow A_i = B_i \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (1.16)$$

Osnovne operacije sa vektorima definišu se tada na sledeći način.



Sl. 1.3

Zbir dvaju vektora je vektor čije su komponente jednake zbiru odgovarajućih komponenata vektora

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_1 + B_1,\ A_2 + B_2,\ A_3 + B_3). \qquad (1.17)$$

To geometrijski predstavlja vektor čiji je početak u početku prvog, a kraj u kraju drugog vektora nadovezanog na prvi (sl. 1.3). *Proizvod vektora skalarom* je vektor čije su komponente proizvodi skalara i odgovarajućih komponenata vektora

$$\lambda \mathbf{A} = (\lambda A_1, \lambda A_2, \lambda A_3). \qquad (1.18)$$

Za ove operacije važe sledeći zakoni

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}, \qquad (1.19)$$

$$\lambda(\mu \mathbf{A}) = (\lambda\mu)\mathbf{A}, \quad (\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}, \quad \lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}. \qquad (1.20)$$

Ako primenimo zakon transformacije vektora (1.14) na vektore **A** i **B** i saberemo dobijene jednačine, dobićemo

$$A_i' + B_i' = \alpha_{ik}(A_k + B_k). \qquad (1.21)$$

Pomnožimo li, pak, navedeni obrazac skalarom λ, biće

$$\lambda A_i' = \alpha_{ik} \lambda A_k \qquad (1.22)$$

Odavde vidimo da se *komponente zbira dvaju vektora i proizvoda vektora skalarom transformišu po opštem zakonu transformacije vektora*, tj. navedene veličine su zaista vektori.

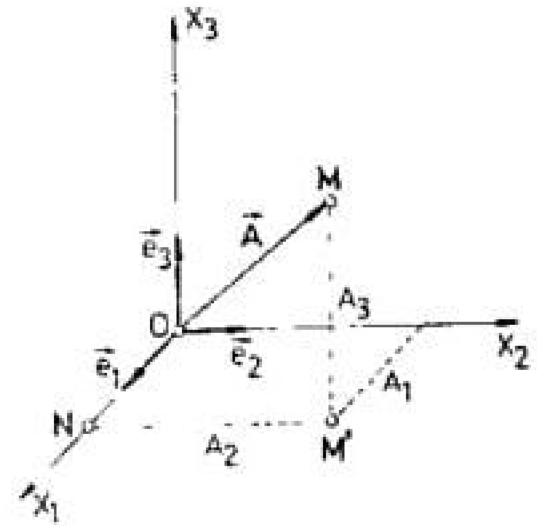
Na osnovu ovih osnovnih operacija može se ma koji vektor **A** razložiti na tri sabirka kolinearna sa koordinatnim osama (sl. 1.4)

$$\mathbf{A} = \mathbf{ON} + \mathbf{NM'} + \mathbf{M'M},$$

a pošto je $\mathbf{ON} = A_1 \mathbf{e}_1$ itd., dobićemo

$$\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}_i. \qquad (1.23)$$

Skup jediničnih vektora koordinatnih osa $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ naziva se *bazis prostora*, a veličine A_i su *komponente vektora* u odnosu na ovaj bazis. Sabirke $A_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ (po grčkom indeksu α se ne sumira) sa desne strane jednačine (1.23) zvaćemo *komponentni vektori* vektora **A**.



Sl. 1.4

Skalarni proizvod. Za dva vektora **A** i **B** *skalarni ili unutrašnji proizvod* definiše se kao proizvod njihovih intenziteta i kosinusa ugla između njih i obično se označava tačkom ili malim zagradama

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \qquad (1.24)$$

Odavde se neposredno može zaključiti da za skalarni proizvod važe sledeći zakoni

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \cdot (\lambda \mathbf{B}) = (\lambda \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}. \qquad (1.25)$$

Iz same definicije se vidi da postoji nekoliko bitnih razlika između ovog proizvoda i proizvoda brojeva. Skalarni proizvod može biti jednak nuli iako *nijedan* od vektora nije jednak nuli i to ako su vektori ortogonalni. Ako je poznat jedan od vektora činilaca i vrednost skalarnog proizvoda, iz toga se *ne može* jednoznačno odrediti drugi vektor. Najzad, iz jednakosti $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ *ne sledi* da mora biti $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, sem ako je **C** proizvoljan vektor.

Prema samoj definiciji mogu se neposredno naći skalarni proizvodi jediničnih vektora koordinatnih osa, na pr. $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ itd., što možemo složiti u šemu

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	1	0	0
$\mathbf{e}_2$	0	1	0
$\mathbf{e}_3$	0	0	1

(1.26)

Ako vektore **A** i **B** razložimo na komponente i primenimo zakone distribucije i asocijacije, imaćemo

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(A_j\mathbf{e}_j)\cdot(B_k\mathbf{e}_k)=A_jB_k(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k).$$

Ovde prema šemi (1.26) vidimo da je $\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k=\delta_{jk}$, pa kao *analitički oblik* skalarnog proizvoda dobijamo

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_iB_i. \qquad (1.27)$$

Da bismo videli kako se skalarni proizvod ponaša pri transformaciji koordinata (1.5), primenićemo relacije (1.14)

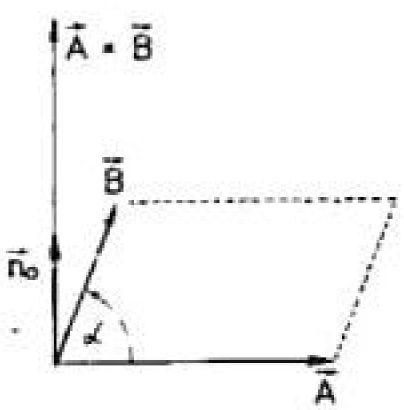
$$A_i'B_i'=(\alpha_{ij}A_j)(\alpha_{ik}B_k)=A_jB_k(\alpha_{ij}\alpha_{ik}),$$

što prema (1.9) možemo napisati u obliku

$$A_i'B_i'=A_kB_k. \qquad (1.28)$$

Odavde zaključujemo da *skalarni proizvod pri rotaciji osa ostaje invarijantan*.

Vektorski proizvod. Druga vrsta proizvoda, *vektorski* ili *spoljašnji proizvod*, definiše se kao vektor čiji je intenzitet brojno jednak površini paralelograma konstruisanog nad tim vektorima (sl. 1.5), pravac normalan na ravni koju obrazuju ovi vektori, a uperen je na onu stranu odakle se vidi da prvi vektor najkraćim putem prelazi u drugi. Ova operacija obično se označava krstom ili srednjim zagradama i ako je $\mathbf{n}_0$ jedinični vektor tako usmerene normale, imaćemo



Sl. 1.5

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=[\mathbf{A},\mathbf{B}]=AB\sin(\mathbf{A},\mathbf{B})\,\mathbf{n}_0. \qquad (1.29)$$

Na osnovu ove definicije vidi se da za vektorski proizvod važe sledeći zakoni

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A},\quad \mathbf{A}\times(\lambda\mathbf{B})=(\lambda\mathbf{A})\times\mathbf{B},$$
$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}. \qquad (1.30)$$

Prva od navedenih relacija izražava tzv. *zakon alternacije*, koji ovde važi umesto zakona komutacije. I ovaj proizvod pokazuje nekoliko bitnih razlika u odnosu na proizvod brojeva, koje su analoge onima koje smo naveli kod skalarnog proizvoda.

Za jedinične vektore koordinatnih osa vektorski proizvodi biće $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1=0$, $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3$ itd., što možemo prikazati šemom

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	0	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	0	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	0

(1.31)

Obrazujmo sad vektorski proizvod vektora **A** i **B**, rastavljajući ih pri tom na komponente. Primenimo li zakone distribucije i asocijacije, imaćemo

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(A_j\mathbf{e}_j)\times(B_k\mathbf{e}_k)=A_jB_k(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k).$$

Ovaj izraz, kao i mnoge druge, možemo konciznije pisati ako uvedemo tzv. *ε-simbol* ili *simbol Levi-Civita*

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & \text{ako je permutacija } ijk \text{ parna}\\ -1 & \text{,, ,, ,, ,, neparna}\\ 0 & \text{,, su bar dva indeksa jednaka}\end{cases} \qquad (1.32)$$

Tada se vektorski proizvodi $\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k$ mogu napisati u obliku

$$\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k=\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i,$$

na pr. za $j=1$, $k=2$

$$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\varepsilon_{112}\mathbf{e}_1+\varepsilon_{212}\mathbf{e}_2+\varepsilon_{312}\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3,$$

pa prethodni izraz za $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ prelazi u

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\varepsilon_{ijk}A_jB_k\mathbf{e}_i. \qquad (1.33)$$

Ako se ovaj izraz razvije na osnovu (1.32), dobija se eksplicitni *analitički oblik* vektorskog proizvoda

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(A_2B_3-A_3B_2)\mathbf{e}_1+(A_3B_1-A_1B_3)\mathbf{e}_2+(A_1B_2-A_2B_1)\mathbf{e}_3,$$

što se može izraziti preglednije u vidu determinante

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix} \qquad (1.34)$$

Pravi vektori i pseudovektori. U odnosu na rotaciju koordinatnih osa vektorski proizvod se ponaša kao i svaki drugi vektor, što se može i neposredno proveriti pomoću (1.14). Međutim, postoji transformacija koordinata pri kojoj se ispoljava jedna bitna karakteristika vektorskog proizvoda, naime tzv. *ogledanje koordinata*

$$x_i'=-x_i \qquad (i=1,2,3), \qquad (1.35)$$

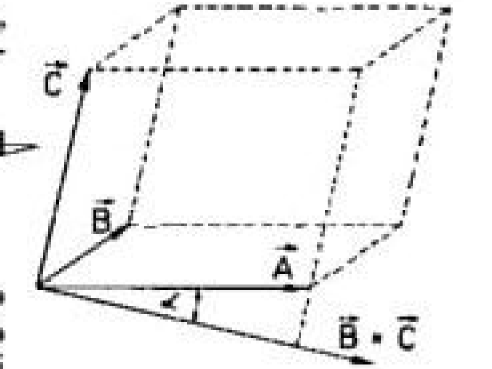
što odgovara izmeni orijentacije koordinatnih osa. Pri ovoj transformaciji koordinate svih vektora koji po svojoj prirodi imaju određenu orijentaciju (na pr. vektor položaja, sila) takođe menjaju znak, tj. $\mathbf{A}'=-\mathbf{A}$. Međutim ima i vektora koji se pri ogledanju koordinata ne menjaju, tj. za koje je $\mathbf{A}'=\mathbf{A}$ (kao na pr. moment sile).

Vektori prve vrste nazivaju se *pravi vektori* (ili *polarni vektori*), a vektori druge *pseudovektori* (ili *aksijalni vektori*). Takvi su oni vektori koji nemaju određenu prirodnu orijentaciju, već se ona određuje po dogovoru i stoga su oni nezavisni od koordinatnog sistema. Vektorski proizvod dva prava vektora uvek je pseudovektor, dok je vektorski proizvod pravog vektora i pseudovektora pravi vektor.

Mešoviti proizvod vektora. Skalarni proizvod vektora i vektorskog proizvoda dva vektora

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

naziva se *mešoviti proizvod vektora*. Da bismo videli njegov geometrijski smisao, konstruišimo paralelepiped nad vektorima **A**, **B** i **C** (sl. 1.6) i za njegovu osnovu uzmimo paralelogram nad



Sl. 1.6

vektorima **B** i **C**. Zapremina ovog paralelepipeda biće jednaka proizvodu površine osnove **B** × **C** i odgovarajuće visine $A\cos\alpha$

$$V = |\mathbf{B}\times\mathbf{C}|\,A\cos\alpha = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}). \qquad (1.36)$$

Dakle, *mešoviti proizvod vektora predstavlja zapreminu paralelepipeda konstruisanog nad ovim vektorima.* Kako zapremina paralelepipeda ne zavisi od toga koju ćemo stranu uzeti za osnovu, sledi

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}), \qquad (1.37)$$

čime je izražena njegova *invarijantnost pri cikličnoj permutaciji svojih faktora.* Pošto je ovde važan samo red vektora, ovaj proizvod često se označava i simbolom [**A B C**].

Ako mešoviti proizvod izrazimo u komponentama prema (1.27) i (1.34), dobićemo

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = A_1(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_1 + A_2(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_2 + A_3(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_3 = A_1(B_2C_3 - B_3C_2) +$$
$$+ A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1).$$

Što se može napisati i u obliku determinante

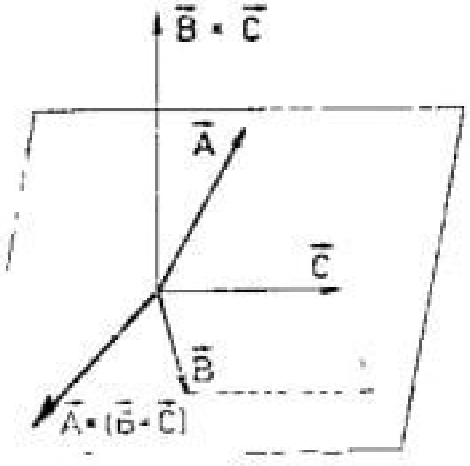
$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}. \qquad (1.38)$$

Dvostruki vektorski proizvod. Vektorski proizvod vektora i vektorskog proizvoda dva vektora

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

naziva se *dvostruki vektorski proizvod.* Prema definiciji vektorskog proizvoda ovaj vektor je normalan na **B** × **C** (sl. 1.7), a ovaj na vektorima **B** i **C**. Stoga *dvostruki vektorski proizvod leži u ravni koju obrazuju vektori* **B** *i* **C**, te je oblika

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \alpha\mathbf{B} + \beta\mathbf{C}. \qquad (1.39)$$



Sl. 1.7

Da bismo ga razvili, izrazimo analitički njegovu prvu komponentu prema obrascu (1.34)

$$[\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]_1 = A_2(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_3 - A_3(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_2 =$$
$$= A_2(B_1C_2 - B_2C_1) - A_3(B_3C_1 - B_1C_3).$$

Ovaj izraz transformišimo dodavanjem i oduzimanjem člana $A_1B_1C_1$, čime dobijamo

$$[\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]_1 = B_1(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - C_1(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) =$$
$$= B_1(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - C_1(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}).$$

Zamenjujući indeks 1 indeksima 2 i 3, naći ćemo analogne izraze i za ostale komponente, tako da krajnji rezultat možemo napisati i u vektorskom obliku

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}). \qquad (1.40)$$

Gornjom relacijom je dvostruki vektorski proizvod sveden na jednostavnije izraze, što nam daje praktično pravilo za njegovo izračunavanje i znatno uprošćava i olakšava operacije sa njim.

ZADACI

1.1. Pod kojim uslovima će vektor **A** + **B** deliti ugao između vektora **A** i **B** na dva jednaka dela?

1.2. Kakav uslov moraju zadovoljavati vektori **A** i **B** da bi bila ispunjena jednakost $|\mathbf{A}+\mathbf{B}| = |\mathbf{A}-\mathbf{B}|$?

1.3. Koliki ugao obrazuju vektori $\mathbf{A} = P\cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + P\sin\varphi\,\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{B} = S\cos\varphi\,\mathbf{e}_1 - S\sin\varphi\,\mathbf{e}_2$ ako su P, S i φ date konstante? Kolika je površina paralelograma konstruisanog nad ovim vektorima?

1.4. Odrediti λ i μ tako da vektor $\mathbf{A} = (2, \lambda, \mu)$ bude normalan na vektorima $\mathbf{B} = (-1, 4, 2)$ i $\mathbf{C} = (3, -3, -1)$. Koliki je intenzitet tako određenog vektora **A** i koliki su uglovi koje on zaklapa sa vektorima **B**, **C** i **A** − **B** − **C**?

1.5. Koliki je ugao između vektora **A** i **B**, ako je $(2\mathbf{A}-\mathbf{B}) \perp (\mathbf{A}+\mathbf{B})$ i $(\mathbf{A}-2\mathbf{B}) \perp (2\mathbf{A}-\mathbf{B})$?

1.6. Data su tri proizvoljna vektora **A**, **B** i **C**. Odrediti skalar λ tako da $\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$ bude normalno na **C**. Odrediti skalar λ tako da $\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$ bude kolinearno sa **C**. Da li drugi deo zadatka ima uvek rešenja?

1.7. Za koje vrednosti parametra α će vektori $\mathbf{A} = (1, -1, \alpha)$, $\mathbf{B} = (1, \alpha, -1)$, $\mathbf{C} = \left(3, 1, \frac{\alpha}{2}\right)$ biti linearno zavisni? Koliki uglove oni zaklapaju međusobno u tom slučaju?

1.8. Napisati izraz $\mathbf{A}\times\mathbf{B}\ \mathbf{B}\times\mathbf{C}\ \mathbf{C}\times\mathbf{A}$ u obliku jednog vektorskog proizvoda.

1.9. Pokazati da je $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = 2(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ i objasniti geometrijski smisao te relacije.

1.10. Data su tri nekomplanarna vektora **A**, **B**, **C** koji obrazuju desni trijedar. Kakvu orijentaciju će imati trijedar vektora **B** × **C**, **C** × **A**, **A** × **B**? U kakvom odnosu stoje zapremine paralelepipeda konstruisanih nad prva tri i nad druga tri vektora?

1.11. Izraziti pomoću jednog četvorostrukog proizvoda svaki od sledećih izraza

(a) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) - \mathbf{C}\cdot[(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{D}]$.

(b) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) - \mathbf{C}\cdot[(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{D}]$.

1.12. Pokazati da je:

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) + (\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{D}) + (\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{D}) = 0$$

1.13. Koliki ugao zaklapaju vektori $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A}$ i $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}$, ako vektori **A** i **B** zaklapaju ugao θ.

1.14. Data su dva vektora **A** i **B**. Rastaviti vektor **B** na dve komponente od kojih će jedna biti kolinearna sa **A**, a druga normalna na njega.

1.15. Pomoću datih vektora **A** i **B** koji imaju zajednički početak izraziti vektor **B'** dobijen rotacijom vektora **B** oko vektora **A** kao ose za ugao θ u pozitivnom smeru. Izračunati zatim ugao γ između **B** i **B'**.

1.16. Rešiti vektorsku jednačinu:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}\times\mathbf{X}=\lambda\mathbf{X},$$

u kojoj su **A** i **B** poznati vektori, a λ poznati skalar.

1.17. U koordinatnom sistemu $OX_1X_2X_3$ dat je vektor $\mathbf{A}=(2,\ 0,\ 1)$. Naći komponente ovog vektora u sistemu $OX_1'X_2'X_3'$ koji se dobija od polaznog rotacijom za $\frac{\pi}{6}$ oko (a) X_1-ose, (b) X_3-ose.

1.18. Posmatrati determinantu:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}$$

čiji su elementi kosinusi pravaca jednog koordinatnog sistema u odnosu na drugi.

(a) Kako se pomoću nje mogu iskazati veze: $\alpha_{pq}\,\alpha_{pr}=\delta_{qr}$?

(b) Kolika je vrednost ove determinante?

(c) Dokazati da je u ovoj determinanti svaki element jednak svom kofaktoru.

1.19. Pokazati da se vektorski proizvod dva vektora ponaša kao vektor pri rotaciji koordinatnog sistema.

1.20. Koordinatni sistem $OX_1X_2X_3$ prelazi u $OX_1'X_2'X_3'$ rotacijom oko neke ose koja prolazi kroz koordinatni početak O. Kosinusi pravaca su:

$$\alpha_{11}=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \alpha_{12}=\frac{\sqrt{3}}{4},\qquad \alpha_{13}=\frac{1}{4},$$

$$\alpha_{21}=-\frac{1}{2},\qquad \alpha_{22}=\frac{3}{4},\qquad \alpha_{23}=\frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\alpha_{31}=0,\qquad \alpha_{32}=-\frac{1}{2},\qquad \alpha_{33}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Odrediti na osnovu ovih podataka jedinični vektor ose **a** oko koje je rotacija izvršena; smer vektora **a** izabrati pri tom tako da u odnosu na njega zadana rotacija bude u pozitivnom smeru.

1.21. U prethodnom zadatku naći ugao θ za koji je rotacija oko **a** izvršena.

1.22. Rešiti zadatak 1.20 u opštem slučaju: Naći jedinični vektor ose rotacije kojom sistem $OX_1X_2X_3$ prelazi u $OX_1'X_2'X_3'$, ako su poznati svi kosinusi pravaca.

1.23. Koordinatni sistem $OX_1X_2X_3$ obrne se za ugao $\theta=\frac{\pi}{2}$ oko vektora $\mathbf{A}=(1,\ 1,\ -1)$ i prelazi u sistem $OX_1'X_2'X_3'$. Naći kosinuse pravaca α_{pq} primovanog sistema u odnosu na neprimovani.

1.24. Data su tri koordinatna sistema $OX_1X_2X_3$, $OX_1'X_2'X_3'$ i $OX_1''X_2''X_3''$ sa zajedničkim koordinatnim početkom. Kosinusi pravaca osa drugog sistema u odnosu na prvi su α_{pq}, a osa trećeg sistema u odnosu na drugi β_{pq}. Izraziti pomoću ovih veličina kosinuse pravaca osa trećeg sistema u odnosu na prvi γ_{pq} i direktno pokazati da važi osnovna relacija $\gamma_{pq}\,\gamma_{pr}=\delta_{qr}$.

1.25. Data su tri nekomplanarna vektora **A**, **B** i **C**. Pomoću njih su obrazovani tzv. vektori *recipročnog trijedra*,

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathbf{B}\times\mathbf{C}}{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}},\qquad \mathbf{B}^{-1}=\frac{\mathbf{C}\times\mathbf{A}}{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}},\qquad \mathbf{C}^{-1}=\frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}}.$$

Pokazati:

(a) Da ovi vektori obrazuju trijedar iste orijentacije kao trijedar vektora **A**, **B**, **C** i zapremine jednake recipročnoj vrednosti zapremine ovog trijedra;

(b) Trijedar $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}$, $(\mathbf{B}^{-1})^{-1}$, $(\mathbf{C}^{-1})^{-1}$ vektora recipročan vektorima recipročnog trijedra indentičan je sa polaznim trijedrom;

(c) Za svaki vektor **Q** se mogu napisati tzv. *Gibbs-ove relacije*

$$\mathbf{Q}=(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}^{-1})\,\mathbf{A}+(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}^{-1})\,\mathbf{B}+(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{C}^{-1})\,\mathbf{C},$$

$$\mathbf{Q}=(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A})\,\mathbf{A}^{-1}+(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{B}^{-1}+(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{C}^{-1}.$$

1.26. Pokazati da simbol Levi-Civita, definisan formulom (1.32), zadovoljava sledeće relacije:

(a) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{imn}=\delta_{jm}\,\delta_{kn}-\delta_{km}\,\delta_{jn}$,

(b) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijm}=2\,\delta_{km}$,

(c) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk}=6$,

pri čemu se u prvoj sumiranje vrši po jednom, u drugoj po dva, a u trećoj po sva tri indeksa.

2. VEKTORSKA ANALIZA

2.1. VEKTORSKE FUNKCIJE SKALARA

Pojam vektorske funkcije. Skalarne i vektorske veličine mogu biti promenljive i zavisiti od jednog ili više argumenata, koji takođe mogu biti skalarne ili vektorske prirode. U ovom odeljku ćemo razmatrati vektorske funkcije skalarnog argumenta, koje možemo definisati na sledeći način. Ako svakoj vrednosti nekog skalara u u izvesnom intervalu odgovara određena vrednost nekog vektora $\mathbf{A}$, kažemo da je $\mathbf{A}$ *vektorska funkcija skalara*, što se obično označava sa

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}(u). \tag{2.1}$$

Kao primer navedimo vektor položaja materijalne tačke, koji je, ako se ova tačka kreće, određena funkcija vremena. Ako pak vrednost nekog vektora zavisi od više argumenata $u, v, \ldots$, imamo vektorsku funkciju više skalara

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}(u, v, \ldots) \tag{2.2}$$

Granična vrednost i neprekidnost. Osnovni pojmovi matematičke analize mogu se preneti i na vektorske funkcije. Ako za svako $\varepsilon>0$ možemo naći takav broj $\delta(\varepsilon)>0$ da za sve vrednosti u za koje je

$$|u-u_0|<\delta$$

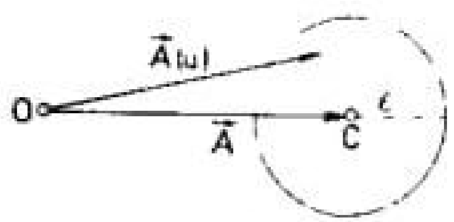
važi nejednakost

$$|\mathbf{A}(u)-\mathbf{A}|<\varepsilon, \tag{2.3}$$

kažemo da je $\mathbf{A}$ *granična vrednost funkcije* $\mathbf{A}(u)$ *kad u teži ka* u_0, što se označava sa

$$\lim_{u\to u_0}\mathbf{A}(u)=\mathbf{A}. \tag{2.4}$$

Geometrijski ovo znači da ako se sve vrednosti vektora $\mathbf{A}(u)$ u ovom intervalu argumenta dovedu na zajednički početak (sl. 2.1), krajevi vektora $\mathbf{A}(u)$ moraju ležati u sferi poluprečnika ε oko krajnje tačke vektora $\mathbf{A}$.



Sl. 2.1

Pojam neprekidnosti može se tada definisati na sledeći način. Ako je vektorska funkcija $\mathbf{A}(u)$ definisana za $u=u_0$, ako postoji granična vrednost ove funkcije kad $u\to u_0$ i ako je

$$\lim_{u\to u_0}\mathbf{A}(u)=\mathbf{A}(u_0), \tag{2.5}$$

kaže se da je funkcija $\mathbf{A}(u)$ *neprekidna u tački* $u=u_0$.

Izvodi i pravila izvoda. Ako je data neka vektorska funkcija $\mathbf{A}(u)$, neprekidna u izvesnoj tački u, *izvod vektorske funkcije* $\mathbf{A}(u)$ *po argumentu* u u toj tački definiše se kao granična vrednost

$$\frac{d\mathbf{A}}{du}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\mathbf{A}(u+\Delta u)-\mathbf{A}(u)}{\Delta u}. \tag{2.6}$$

Svaka funkcija koja je diferencijabilna, tj. ima određeni izvod u nekoj tački, prema samoj definiciji sigurno je i *neprekidna* u toj tački, međutim obrnuto ne mora da važi.

Ako vektor $\mathbf{A}$ rastavimo na komponentne vektore duž koordinatnih osa, izvode vektora možemo svesti na izvode njegovih komponenata. Odavde sledi da za izvode vektorskih funkcija važe sledeća *pravila izvoda*, analoga odgovarajućim pravilima za skalarne funkcije

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\frac{d\mathbf{A}}{du}+\frac{d\mathbf{B}}{du},\qquad \frac{d}{du}(\lambda\mathbf{A})=\lambda\frac{d\mathbf{A}}{du}+\frac{d\lambda}{du}\mathbf{A}, \tag{2.7}$$

kao i

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du}+\frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B},\qquad \frac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\frac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{du}, \tag{2.8}$$

pri čemu je u poslednjem obrascu bitno zadržati isti redosled članova.

Slučaj više argumenata. Ako imamo vektorsku funkciju više skalara $\mathbf{A}(u, v, \cdots)$, *granična vrednost* definiše se time da za svako $\varepsilon>0$ postoji takvo $\delta(\varepsilon)>0$ da za

$$|u-u_0|<\delta,\qquad |v-v_0|<\delta$$

važi nejednakost

$$|\mathbf{A}(u, v, \cdots)-\mathbf{A}|<\varepsilon,$$

što se označava sa

$$\lim_{u\to u_0,\, v\to v_0}\mathbf{A}(u, v, \cdots)=\mathbf{A}. \tag{2.9}$$

Pomoću ovog pojma mogu se formulisati i ostali pojmovi na analog način kao i za skalarne funkcije. Tako se umesto običnog pojavljuju tada *parcijalni izvodi*, koji se na pr. za promenljivu u definišu obrascem

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\mathbf{A}(u+\Delta u, v, \cdots)-\mathbf{A}(u, v, \cdots)}{\Delta u} \tag{2.10}$$

Određeni integral. Neka je zadana vektorska funkcija $\mathbf{A}(u)$, *ograničena* u intervalu (a, b), tj. neka je za sve tačke tog intervala $|\mathbf{A}(u)|<M$, gde je M neki određeni broj. Podelimo ovaj interval na na koji način na n delova, koje ćemo označiti sa Δu_i i to tako da za neki unapred dati mali broj δ bude

$$|\Delta u_i|=|u_i-u_{i-1}|<\delta.$$

Obrazujmo potom sumu

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{A}(\xi_i)\,\Delta u_i,$$

gde je ξ_i bilo koja vrednost argumenta u u intervalu Δu_i. Ako postoji granična vrednost ove sume kad $n\to\infty$ i ako ona ne zavisi od načina podele intervala

(a, b) na delove, ona se naziva *određeni integral funkcije* $\mathbf{A}(u)$ *od a do b* i označava sa

$$\int_a^b \mathbf{A}(u)\,du = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}(\xi_i)\,\Delta u_i. \qquad (2.11)$$

Rastavljanjem vektora $\mathbf{A}$ na komponentne vektore možemo ovaj integral svesti na određene integrale skalarnih funkcija (komponenata vektora $\mathbf{A}$), tako da i za njih važe slična pravila integracije kao i za integrale skalarnih funkcija.

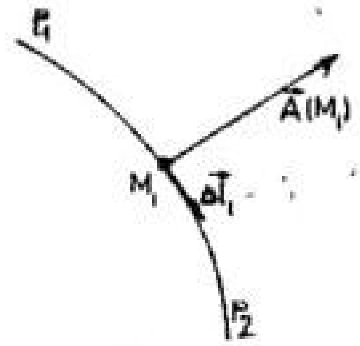
Ako je vrednost funkcije $\mathbf{A}(u)$ beskonačna u izvesnim tačkama, na pr. u tački $u = c$, pojam određenog integrala može se generalisati na sledeći način

$$\int_a^b \mathbf{A}(u)\,du = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1} \mathbf{A}(u)\,du + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} \mathbf{A}(u)\,du \qquad (2.12)$$

Na sličan način, pomoću odgovarajućeg graničnog procesa, mogu se definisati i integrali u beskonačnom intervalu, na pr. u intervalu (a, ∞). Oba ova tipa integrala zajedničkim imenom nazivaju se, kao i u matematičkoj analizi, *nesvojstveni integrali*.

Linijski i površinski integrali. Posmatrajmo izvesnu liniju $x_k = x_k(u)$ i podelimo njen deo između tačaka P_1 i P_2 na n delova Δl_i (sl. 2.2). Označimo sa $\Delta \mathbf{l}_i$ orijentisani element ove krive ($\Delta \mathbf{l}_i = \Delta l_i \vec{\tau}_0$, gde je $\vec{\tau}_0$ jedinični vektor tangente), a sa $\mathbf{A}(M_i)$ vrednost vektorske funkcije u ma kojoj tački M_i ovog elementa. Onda se *linijski integral funkcije* $\mathbf{A}(u)$ *duž date krive od* P_1 *do* P_2 definiše graničnim procesom

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}(M_i)\cdot\Delta \mathbf{l}_i, \qquad (2.13)$$



Sl. 2.2

pod uslovom da granična vrednost sa desne strane postoji i da je nezavisna od načina podele luka P_1P_2. Ako je ova linija zatvorena, gornji integral se obično označava simbolom $\oint$.

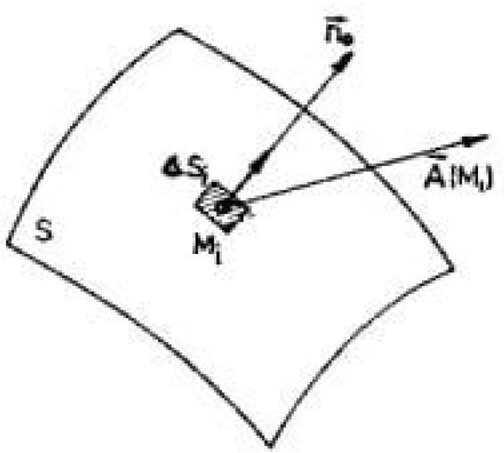
Posmatrajmo sad deo S neke zadane površi, čije su jednačine $x_k = x_k(u, v)$ i podelimo ga na n delova ΔS_i (sl. 2.3.) Orijentišimo ovu površ i sa

$$\Delta \mathbf{S}_i = \Delta S_i \mathbf{n}_0 \qquad (2.14)$$

označimo njen usmereni element, a sa $\mathbf{A}(M_i)$ vrednost vektorske funkcije u ma kojoj tački M_i ovog elementa. Tada se *površinski integral funkcije* $\mathbf{A}(u, v)$ *po oblasti S date površi* definiše obrascem

$$\int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}(M_i)\cdot\Delta \mathbf{S}_i, \qquad (2.15)$$

opet samo ako ova granična vrednost postoji i ako ne zavisi od načina podele S na delove ΔS_i. Kod zatvorenih površi ovaj integral se često označava simbolom $\oint$.



Sl. 2.3

2.2. SKALARNA POLJA. GRADIJENT

Pojam skalarnog polja. Ako svakoj tački neke oblasti prostora odgovara izvesna određena vrednost nekog skalara

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3), \qquad (2.16)$$

kažemo da postoji *skalarno polje*. Na primer temperatura u nekoj oblasti je određena funkcija položaja

$$T = T(x_1, x_2, x_3)$$

i karakteriše posmatrano polje temperature. Pošto skup (x_1, x_2, x_3) predstavlja vektor položaja, funkcija (2.16) može se posmatrati i kao skalarna funkcija vektorskog argumenta $\mathbf{r}$.

Stavimo li $\Phi = \Phi_0$, gde je Φ_0 neka konstanta,

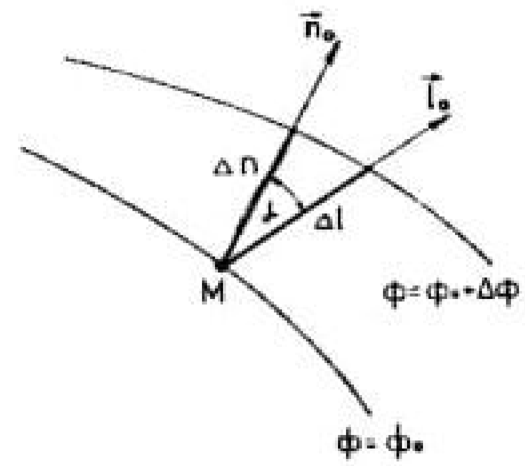
$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi_0, \qquad (2.17)$$

dobićemo geometrijsko mesto tačaka u kojima Φ ima istu vrednost Φ_0; to je obično površ i naziva se *ekviskalarna površ*. Ponekad su od interesa i skalarna polja $\Phi = \Phi(u, v)$ definisana za sve tačke neke zadane površi $x_i = x_i(u, v)$. U tom slučaju, geometrijsko mesto tačaka u kojima skalar Φ ima konstantnu vrednost, $\Phi(u, v) = \Phi_0$, predstavljaće neku liniju na posmatranoj površi, tzv. *ekviskalarnu liniju* (npr. izobare na površi Zemlje).

Definicija gradijenta. Posmatrajmo dve vrlo bliske ekviskalarne površi, koje odgovaraju vrednostima Φ_0 i $\Phi_0 + \Delta\Phi$ i uočimo na prvoj površi neku tačku M (sl. 2.4). Ako se iz nje pomerimo duž proizvoljnog pravca jediničnog vektora $\mathbf{l}_0$ do druge površi za Δl, onda se granična vrednost

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l} = \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta l} \qquad (2.18)$$

naziva *izvod skalara* Φ *u datom pravcu* $\mathbf{l}_0$.



Sl. 2.4

Brzina promene skalara u datom pravcu bitno zavisi od samog pravca i najveća je u pravcu normale na ekviskalarnu površ. Orijentišimo ovu površ tako da je njen jedinični vektor normale $\mathbf{n}_0$ usmeren ka ekviskalarnoj površi $\Phi = \Phi_0 + |\Delta\Phi|$, tj. u smeru rašćenja skalara. Vektor čiji je intenzitet $\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}$, a ima pravac i smer jediničnog vektora $\mathbf{n}_0$ naziva se *gradijent skalarne funkcije* Φ *u tački* M i označava se sa

$$\operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathbf{n}_0 \qquad (2.19)$$

a takođe i simbolom $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{r}}$. Gradijent je, dakle, *vektor čiji intenzitet predstavlja najveću promenu posmatrane skalarne funkcije po jedinici dužine, ima pravac normale na ekviskalarnu površ u toj tački, a orijentisan je u smeru rašćenja ove skalarne funkcije*. Iz same definicije se, dalje, vidi da je *vrednost gradijenta nezavisna od koordinatnog sistema*.

2*

Pošto izvod $\frac{\partial\Phi}{\partial l}$ možemo napisati u obliku

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta n}\,\frac{\Delta n}{\Delta l}\right),\qquad \Delta n\approx\Delta l\cos(\mathbf{n}_0,\mathbf{l}_0),$$

u graničnom slučaju $\Delta l\to 0$ dobićemo

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l}=|\operatorname{grad}\Phi|\cos(\mathbf{n}_0,\mathbf{l}_0),$$

odnosno

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l}=\operatorname{grad}\Phi\cdot\mathbf{l}_0 \tag{2.20}$$

Time je izražena veza između izvoda skalara u datom pravcu, odgovarajućeg jediničnog vektora $\mathbf{l}_0$ i gradijenta tog skalara.

Analitički oblik gradijenta. Ako se obrazac (2.20) primeni na jedinične vektore koordinatnih osa $\mathbf{e}_i$ ($i=1, 2, 3$), imaćemo

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=\operatorname{grad}\Phi\cdot\mathbf{e}_i=|\operatorname{grad}\Phi|\cos(\mathbf{n}_0,\mathbf{e}_i).$$

Desna strana predstavlja projekciju vektora grad Φ na X_i-osu, tj. njegovu odgovarajuću komponentu

$$(\operatorname{grad}\Phi)_i=\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\quad(i=1, 2, 3). \tag{2.21}$$

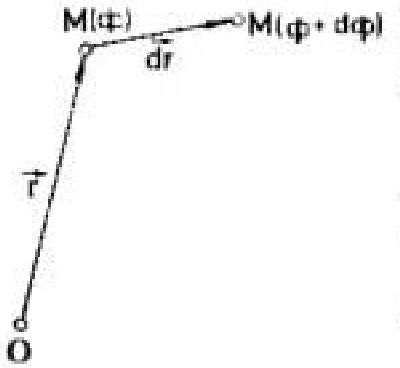
Odavde vidimo da komponente gradijenta nekog skalara prikazuju *promene te skalarne funkcije po jedinici dužine u pravcima koordinatnih osa*, a sam gradijent dobija oblik

$$\operatorname{grad}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\mathbf{e}_i, \tag{2.22}$$

pri čemu je opet upotrebljena sumaciona konvencija.

Elementarna promena skalara. Ako posmatrana skalarna funkcija u tački M ima vrednost Φ, a u veoma bliskoj tački M' vrednost $\Phi+d\Phi$ (sl. 2.5), prema obrascu za totalni diferencijal imaćemo

$$d\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}dx_i.$$



Sl. 2.5

Ovaj izraz na osnovu (1.27) i (2.22) može se napisati i u obliku skalarnog proizvoda vektora grad Φ i $d\mathbf{r}$

$$d\Phi=d\mathbf{r}\cdot\operatorname{grad}\Phi, \tag{2.23}$$

čime je određena *elementarna promena skalarne funkcije Φ pri pomeranju za $d\mathbf{r}$*.

Simbolički prikaz gradijenta. Ako izraz (2.22) napišemo simbolički u obliku

$$\operatorname{grad}\Phi=\left(\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Phi,$$

simbol u zagradi, koji ćemo označiti sa

$$\nabla=\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.24}$$

označava operacije koje treba izvršiti na skalarnoj funkciji Φ da bi se dobio gradijent te funkcije. Tada se gradijent može prikazati kao

$$\operatorname{grad}\Phi=\nabla\Phi, \tag{2.25}$$

a ovako definisan simbol ∇ (čitaj „del" ili „nabla") naziva se *Hamilton-ov operator*. Prema samoj definiciji vidimo da on istovremeno pretstavlja i *diferencijalni operator* i *simbolički vektor*, pošto podrazumeva operacije diferenciranja, a sa formalne strane je vektor, što treba stalno imati na umu.

Gradijent posredne funkcije. Ako je $\Phi=f(u)$, gde je $f(u)$ ma kakva funkcija nekog skalara u, biće

$$\operatorname{grad}f(u)=\frac{\partial f(u)}{\partial x_i}\mathbf{e}_i=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\mathbf{e}_i,$$

tj. dobijamo

$$\operatorname{grad}f(u)=f'(u)\operatorname{grad}u, \tag{2.26}$$

čime je određen gradijent ma kakve posredne funkcije. U slučaju $u=r$, gde je $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ intenzitet vektora položaja, imamo

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}=\frac{x_i}{r},$$

te je

$$\operatorname{grad}r=\frac{\partial r}{\partial x_i}\mathbf{e}_i=\frac{x_i}{r}\mathbf{e}_i=\frac{\mathbf{r}}{r}=\mathbf{e}_r,$$

pa dobijamo

$$\operatorname{grad}f(r)=f'(r)\,\mathbf{e}_r. \tag{2.27}$$

2.3. VEKTORSKA POLJA. DIVERGENCIJA

Pojam vektorskog polja. Ako svakoj tački neke određene oblasti prostora odgovara određeni vektor

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3), \tag{2.28}$$

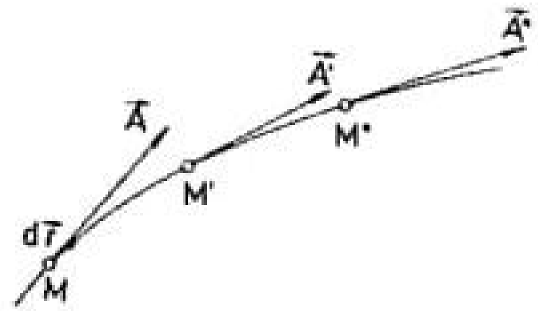
time je definisano *vektorsko polje*, a $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$ predstavlja vektorsku funkciju vektorskog argumenta $\mathbf{r}$. Na primer jačina električnog polja u nekoj oblasti je funkcija položaja

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}(x_1, x_2, x_3),$$

koja određuje posmatrano polje, pri čemu napomenimo da ovaj naziv ne treba brkati sa pojmom intenziteta električnog polja E.

Linije koje imaju tu osobinu da u svakoj njihovoj tački vektor $\mathbf{A}$ ima pravac tangente (sl. 2.6) nazivaju se *vektorske linije* tog polja. Jednačine ovih linija možemo dobiti polazeći od kolinearnosti vektora $d\mathbf{r}$ i $\mathbf{A}$

$$d\mathbf{r}=\lambda\mathbf{A},$$



Sl. 2.6

odakle sledi proporcionalnost odgovarajućih komponenata

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1,x_2,x_3)} = \frac{dx_2}{A_2(x_1,x_2,x_3)} = \frac{dx_3}{A_3(x_1,x_2,x_3)}, \qquad (2.29)$$

što predstavlja diferencijalne jednačine ovih linija.

Elementarna promena vektora. Ako neka vektorska funkcija u tački M ima vrednost $\mathbf{A}$, a u beskonačno bliskoj tački M' vrednost $\mathbf{A}+d\mathbf{A}$, elementarna promena ove vektorske funkcije biće

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i}\, dx_i = \left(dx_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\mathbf{A}$$

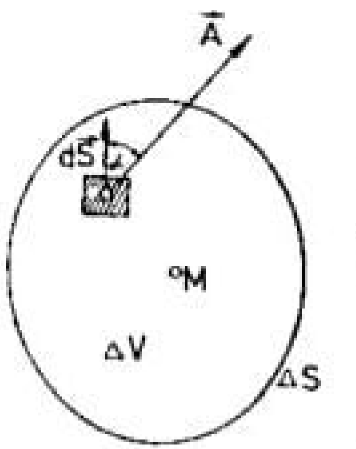
Operator u zagradi predstavlja skalarni proizvod vektora $d\mathbf{r}$ i Hamilton-ovog operatora (2.24), te se gornji izraz može simbolički napisati u obliku

$$d\mathbf{A} = (d\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{A} \qquad (2.30)$$

Definicija divergencije. Uočimo neku tačku M vektorskog polja i oko nje ma kakvu malu zatvorenu površ ΔS, koja obuhvata zapreminu ΔV (sl. 2.7). Formirajmo površinski integral

$$\oint_{\Delta S} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S},$$

a zatim graničnu vrednost količnika ovog integrala i obuhvaćene zapremine ΔV kada ova poslednja teži nuli stežući se u tačku M. Ako ona postoji i ne zavisi od načina kako ΔV teži nuli, ova granična vrednost



Sl. 2.7

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\oint_{\Delta S}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \qquad (2.31)$$

naziva se *divergencija vektorske funkcije* **A** *u tački M* i označava simbolom div **A**.

Prema samoj definiciji vidi se da je vrednost divergencije *nezavisna od koordinatnog sistema*, te je invarijantna u odnosu na ma kakvu transformaciju koordinata, a takođe *ne zavisi ni od oblika površi* ΔS, pa možemo uvek uzeti takvu površ koja nam je u datom slučaju najpogodnija.

Fizička interpretacija divergencije. Smisao divergencije u primenama u fizici najbolje se može videti iz sledećeg razmatranja. Uvedimo najpre *konvenciju o broju vektorskih linija*: kroz jedinicu površine normalno postavljene na linije vektora **A** uzima se toliko vektorskih linija orijentisanih u smeru vektora **A** koliki je intenzitet ovog vektora (u izabranom sistemu jedinica) na tom mestu. Tada kroz element površi dS prolazi isto toliko vektorskih linija koliko i kroz normalno postavljenu površ $dS\cos\alpha$, tj.

$$A\cdot dS\cos\alpha = \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

Broj vektorskih linija kroz površ S biće tada

$$\Phi = \int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \qquad (2.32)$$

i naziva se *fluks vektora* **A** *kroz površ S*. Pri tome element fluksa $\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$ je pozitivan ako vektor **A** na tom mestu zaklapa oštar ugao sa spoljnom normalom, tj. ako vektorske linije tu izlaze iz površi S, a negativan u suprotnom slučaju.

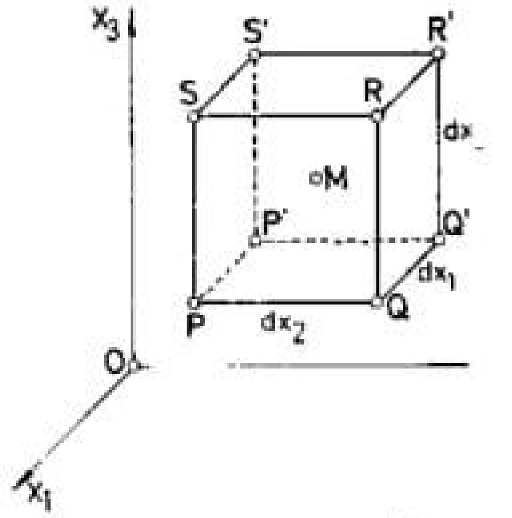
Na osnovu definicije divergencije (2.29) vidimo da *divergencija m[...] vektora u datoj tački predstavlja fluks toga vektora kroz ma koju [...] zatvorenu površ oko te tačke po jedinici obuhvaćene zapremine*. Ako je u n[...] tački div $\mathbf{A}>0$, biće više vektorskih linija koje izlaze iz te površi nego ulaze, a ako je div $\mathbf{A}<0$ biće obrnuto. Iz ovoga možemo zaključiti da *u [...]kama u kojima je div* $\mathbf{A}>0$ *postoje izvori, a gde je div* $\mathbf{A}<0$ *ponori vektor[skih] linija, a sama vrednost divergencije daje nam meru izdašnosti izvora ili ponora [po] jedinici zapremine.*

Analitički oblik divergencije. Ako želimo da nađemo analitički oblik di[ver]gencije u pravouglim koordinatama, izaberimo za element zapremine ΔV [ele]mentarni paralelepiped oko tačke $M(x_1, x_2, x_3)$ kao centra sa ivicama dx_1, $d[x_2]$ i dx_3 paralelnim koordinatnim osama (sl. 2.8). Tada se fluks vektora **A** kr[oz] površ $PQRS$ može izraziti kao proizvod odgovarajuće projekcije vektora **A** [na] x_1 osu i površine $PQRS$

$$d\Phi_1 = (A_1)_{PQRS}\cdot dx_2\, dx_3.$$

Za vrednost komponente A_1 na beskonačno maloj površi $PQRS$ mož[emo] uzeti njenu vrednost u centru te površi tj. u tački $\left(x_1+\frac{1}{2}dx_1,\ x_2, x_3\right)$. Ovu vrednost ćemo dobiti razvijanjem funkcije $A_1\left(x_1+\frac{1}{2}dx_1,\ x_2, x_3\right)$ za fiksirano x_2 i x_3 u Taylor-ov red

$$(A_1)_{PQRS} \approx A_1\left(x_1+\frac{1}{2}dx_1, x_2, x_3\right) = A_1(x_1,x_2,x_3) + \frac{1}{2}dx_1\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1}\right)+\cdots$$



Sl. 2.8

te je ovaj fluks oblika

$$d\Phi_1 = \left[(A_1)_M + \frac{1}{2}dx_1\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1}\right)_M\right]dx_2\, dx_3.$$

Fluks kroz naspramnu površ $P'Q'R'S'$, pošto je tu spoljna normala supr[otno] orijentisana od x_1 ose, biće

$$d\Phi_2 = -(A_1)_{P'Q'R'S'}\, dx_2\, dx_3 = -\left[(A_1)_M - \frac{1}{2}dx_1\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1}\right)_M\right]dx_2\, dx_3,$$

što ukupno iznosi

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1}\right)_M dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

Na sličan način možemo naći i flukseve kroz ostale parove naspra[mnih] površi, pa tako nalazimo (izostavljajući indeks M) da ukupni fluks kroz paralelepiped iznosi

$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right)dx_1\, dx_2\, dx_3$$

S druge strane, zapremina ovog paralelepipeda je

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3,$$

pa prema obrascu (2.31)

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{dV}$$

dobijamo *analitički oblik divergencije*

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}, \tag{2.35}$$

gde se u skladu sa sumacionom konvencijom podrazumeva sumiranje po indeksu i. Na primer za vektor položaja $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ biće

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = 3.$$

Simbolički prikaz divergencije. Ako izraz (2.35) napišemo simbolički u obliku

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x_i} A_i$$

i uporedimo ga sa obrascem za skalarni proizvod (1.28), vidimo da on predstavlja skalarni proizvod vektora ∇, definisanog obrascem (2.24) i posmatranog vektora $\mathbf{A}$. Na taj način divergenciju možemo simbolički prikazati pomoću Hamilton-ovog operatora kao skalarni proizvod

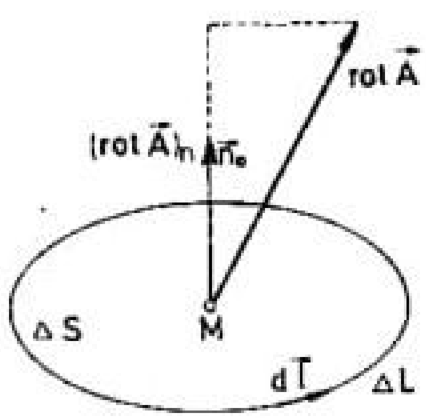
$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \tag{2.36}$$

2.4. ROTOR VEKTORA

Definicija rotora. Uočimo neku tačku M u vektorskom polju (sl. 2.9) i izaberimo povoljno jedan pravac određen jediničnim vektorom $\mathbf{n}_0$. Zatim kroz tačku M postavimo neku površ, takvu da $\mathbf{n}_0$ bude jedinični vektor njene normale u tački M, i uočimo na njoj jednu zatvorenu konturu ΔL koja obuhvata posmatranu tačku M i na odabranoj površi omeđuje deo čija je površina ΔS.

Formirajmo linijski integral

$$\oint_{\Delta L} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$



Sl 2.9

i zatim graničnu vrednost količnika ovog integrala i površine ΔS kad $\Delta S \to 0$ stežući se oko tačke M. Ako ova granična vrednost postoji i ne zavisi od načina kako ΔS teži nuli, smatraćemo je projekcijom nekog vektora na $\mathbf{n}_0$:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{\Delta L} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}. \tag{2.37}$$

Tako definisan vektor naziva se *rotor vektorske funkcije* $\mathbf{A}$ *u tački* M i obično se označava sa $\operatorname{rot} \mathbf{A}$, a u anglosaksonskoj literaturi često se upotrebljava simbol $\operatorname{curl} \mathbf{A}$. Uzimajući tri površi ΔS_i oko tačke M sa nekomplanarnim normalama, dobijamo tri odgovarajuće projekcije ovog vektora, čime će $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ biti potpuno određen.

Prema samoj definiciji vidi se da je vrednost rotora, slično divergenciji, *nezavisna od koordinatnog sistema, a takođe i od oblika konture* ΔL, te i ovde možemo uzeti takvu konturu koja nam je u datom slučaju najpogodnija.

Fizička interpretacija rotora. Da bismo istakli smisao rotora sa gledišta primena u fizici, ukažimo najpre na jednu karakteristiku zatvorenih vektorskih linija. Posmatrajmo jedno vektorsko polje u kome takve linije postoje, pa uočimo jednu od njih, orijentišimo je u smeru vektora $\mathbf{A}$ i formirajmo duž nje linijski integral

$$\Gamma = \int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \tag{2.38}$$

Integral ovakvog tipa naziva se *cirkulacija vektora* $\mathbf{A}$ *duž konture* L, bez obzira da li se ova kontura poklapa sa vektorskom linijom ili ne.

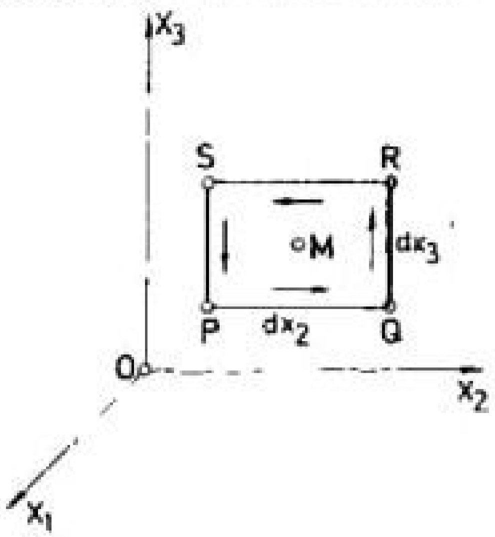
U ovom slučaju duž vektorskih linija vektori $\mathbf{A}$ i $d\mathbf{l}$ su svuda istog pravca i smera, te će gornji integral uvek biti pozitivan, a pri suprotnoj orijentaciji negativan. Sem u izuzetnim slučajevima*, važi i obrnuto: ako duž izvesnih kontura cirkulacija nije jednaka nuli, u tom polju postoje zatvorene vektorske linije.

Na osnovu definicije rotora (2.37) vidimo da *normalna komponenta rotora u datoj tački predstavlja cirkulaciju tog vektora duž ma koje male konture oko te tačke po jedinici obuhvaćene površine*. Ako je u nekoj tački $\operatorname{rot} \mathbf{A} \neq 0$ i ako za površ ΔS izaberemo takvu da se pravac njene normale u tački M poklapa sa pravcem $\operatorname{rot} \mathbf{A}$, cirkulacija duž konture te površi biće maksimalna, čemu odgovara slučaj kad se kontura ΔL poklapa sa vektorskom linijom. Odavde možemo zaključiti da *oko tačaka u kojima je* $\operatorname{rot} \mathbf{A} \neq 0$ *postoje zatvorene vektorske linije koje obavijaju pravac vektora* $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ *u tim tačkama, a intenzitet rotora daje nam meru vrtložnosti ovih zatvorenih vektorskih linija po jedinici površine*.

Fizički smisao rotora može se sagledati i pri posmatranju rotacije krutog tela oko neke ose, gde se pokazuje da je rotor brzine ma koje tačke jednak dvostrukoj ugaonoj brzini krutog tela, o čemu se detaljnije govori u kursu mehanike.

Analitički oblik rotora. Izaberimo za konturu ΔL u obrascu (2.37) elementarni pravougaonik oko tačke $M(x_1, x_2, x_3)$ kao centra sa ivicama dx_2 i dx_3 paralelnim x_2 i x_3 osi u ravni $x_2 O x_3$ (sl. 2.10). Orijentišimo konturu kao na slici, čemu odgovara orijentacija površi $PQRS$ ka pozitivnom smeru x_1 ose. Cirkulacija vektora $\mathbf{A}$ duž QR biće tada jednaka proizvodu odgovarajuće projekcije vektora $\mathbf{A}$ na x_3 osu i ove dužine QR

$$d\Gamma_1 = (A_3)_{QR} \cdot dx_3.$$



Sl 2.10

Za vrednost komponente A_3 duž beskonačno male strane QR uzmimo njenu vrednost u centru ove strane, tj. u tački $(x_1, x_2 + \frac{1}{2} dx_2, x_3)$. Nju možemo naći razvijanjem funkcije $A_3(x_1, x_2 + \frac{1}{2} dx_2, x_3)$ u Taylor-ov red

$$(A_3)_{QR} \approx A_3\left(x_1, x_2 + \frac{1}{2} dx_2, x_3\right) = A_3(x_1, x_2, x_3) + \frac{1}{2} dx_2 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}\right) + \cdots,$$

*Videti, npr., И. Е. Тамм: Основы теории электричества (1957), стр. 245.

čime dobijamo

$$d\Gamma_1 = \left[(A_3)_M + \frac{1}{2}\, dx_2 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}\right)_M\right] dx_3 \qquad (2.39)$$

Cirkulacija duž suprotne strane SP zbog suprotne orijentacije biće

$$d\Gamma_2 = -(A_3)_{SP}\cdot dx_3 = -\left[(A_3)_M - \frac{1}{2}\, dx_2 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}\right)_M\right] dx_3,$$

što ukupno iznosi

$$d\Gamma_1 + d\Gamma_2 = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}\right)_M dx_2\, dx_3.$$

Na sličan način može se pokazati da je suma cirkulacija duž drugih dveju paralelnih strana

$$-\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)_M dx_2\, dx_3,$$

tako da (izostavljajući indeks M) za ukupnu cirkulaciju duž ovog paralelograma dobijamo

$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) dx_2\, dx_3. \qquad (2.40)$$

Pošto je ovde obuhvaćena površina

$$dS_1 = dx_2\, dx_3,$$

a ovoj površini odgovara komponenta rotora u pravcu X_1 ose, prema obrascu (2.37)

$$(\text{rot}\,\mathbf{A})_1 = \frac{\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}}{dS_1}$$

dobijamo prvu komponentu rotora

$$(\text{rot}\,\mathbf{A})_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}. \qquad (2.41)$$

Ostale komponente možemo naći cikličnom permutacijom indeksa

$$(\text{rot}\,\mathbf{A})_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \qquad (\text{rot}\,\mathbf{A})_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2},$$

a sam rotor biće

$$\text{rot}\,\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3.$$

Ovaj *analitički oblik rotora* konciznije se izražava u obliku simboličke determinante

$$\text{rot}\,\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}, \qquad (2.42)$$

gde se npr. pod proizvodom $\frac{\partial}{\partial x_2}$ i A_3 podrazumeva $\frac{\partial A_3}{\partial x_2}$. Tako za vekt. položaja imamo, pošto su koordinate x_i međusobno nezavisne

$$\text{rot}\,\mathbf{r} = \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2} - \frac{\partial x_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_3} - \frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1} - \frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3 = 0.$$

Simbolički prikaz rotora. Ako gornji izraz uporedimo sa obrascem vektorski proizvod (1.34), vidimo da on predstavlja vektorski proizvod vekto. ∇ i vektora $\mathbf{A}$. Na taj način rotor možemo napisati simbolički pomoću Ham ton-ovog operatora u obliku

$$\text{rot}\,\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}. \qquad (2.4$$

Poređenjem obrazaca (2.25), (2.36) i (2.43) zapažamo da se gradije divergencija i rotor mogu prikazati na analog način pomoću Hamilton-o operatora.

Klasifikacija vektorskih polja. Prema vrednostima divergencije i rot vektorska polja mogu se podeliti na četiri grupe.

1. *Potencijalna* ili *bezvrtložna polja*, kod kojih je u svim tačkama p rot $\mathbf{A} = 0$, a div $\mathbf{A} \neq 0$ bar u nekim tačkama.

2. *Solenoidna* ili *vrtložna polja*, gde je u svim tačkama div $\mathbf{A} = 0$, rot $\mathbf{A} \neq 0$ bar u nekim tačkama.

3. *Laplace-ova polja*, definisana time da je u svim tačkama polja div $\mathbf{A}$ i rot $\mathbf{A} = 0$

4. *Složena polja*, gde je bar u nekim tačkama div $\mathbf{A} \neq 0$ i rot $\mathbf{A} \neq 0$. Ovakva polja uvek se mogu predstaviti u vidu superpozicije jednog potencijaln i jednog solenoidnog polja.

2.5. PRIMENA HAMILTON-OVOG OPERATORA

Gradijenti složenijih izraza. Polazeći od analitičkog ili simboličkog prik.. gornjih veličina, možemo izvesti odgovarajuće operacije i za složenije izra bilo analitički bilo primenom Hamilton-ovog operatora. Pošto je prvi me često skopčan sa glomaznim izračunavanjima, u praksi se skoro isključivo kor drugi, tj. *primena Hamilton-ovog operatora*.

Pri tome zbog njegovog diferencijalnog karaktera moramo ga primen redom na pojedine skalarne ili vektorske funkcije, koje označimo zvezdicom dobijene rezultate saberemo. Potom na osnovu njegovog vektorskog karaktera sv od dobijenih članova moramo tako transformisati da se operator ∇ nađe l od funkcije na koju ga treba primeniti.

Prema definiciji za *gradijent zbira dva skalara* imamo

$$\text{grad}\,(\Phi + \Psi) = \text{grad}\,\Phi + \text{grad}\,\Psi. \qquad (2.$$

Gradijent proizvoda dva skalara nalazimo primenom Hamilton-ovog operat

$$\nabla(\Phi\Psi) = \nabla(\Phi^*\Psi) + \nabla(\Phi\Psi^*) = \Psi\nabla\Phi^* + \Phi\nabla\Psi^*,$$

odnosno

$$\text{grad}\,(\Phi\Psi) = \Psi\,\text{grad}\,\Phi + \Phi\,\text{grad}\,\Psi. \qquad (2.$$

Da bismo našli *gradijent skalarnog proizvoda* razvijmo izraz $\mathbf{A} \times (\nabla$ prema obrascu (1.40)

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*) - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}^*.$$

Zamenom mesta $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ izlazi

$$\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^*)-(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}^*,$$

tako da sabiranjem dobijamo

$$\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\mathbf{A}^*\cdot\mathbf{B})+\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*)-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}^*-(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}^*.$$

Pošto je

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\nabla(\mathbf{A}^*\cdot\mathbf{B})+\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*),$$

odavde sledi

$$\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}+\mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}. \tag{2.46}$$

Divergencije složenijih izraza. Na osnovu definicije neposredno se vidi da je *divergencija zbira dva vektora*

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\operatorname{div}\mathbf{A}+\operatorname{div}\mathbf{B} \tag{2.47}$$

Pomoću drugog obrasca (1.25) *divergencija proizvoda skalara i vektora* može se pisati u obliku

$$\nabla\cdot(\Phi\mathbf{A})=\nabla\cdot(\Phi^*\mathbf{A})+\nabla\cdot(\Phi\mathbf{A}^*)=(\nabla\Phi^*)\cdot\mathbf{A}+\Phi(\nabla\cdot\mathbf{A}^*),$$

odnosno

$$\operatorname{div}(\Phi\mathbf{A})=\Phi\operatorname{div}\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\operatorname{grad}\Phi. \tag{2.48}$$

Prema osobini (1.37) *divergencija vektorskog proizvoda* biće

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\nabla\cdot(\mathbf{A}^*\times\mathbf{B})+\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}^*)=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}^*)-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}^*),$$

čime dobijamo

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}. \tag{2.49}$$

Rotori složenijih izraza. Na sličan način zaključuje se da je *rotor zbira dva vektora* jednak

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\operatorname{rot}\mathbf{A}+\operatorname{rot}\mathbf{B}. \tag{2.50}$$

Na osnovu drugog obrasca (1.30) *rotor proizvoda skalara i vektora* dovodi se u oblik

$$\nabla\times(\Phi\mathbf{A})=\nabla\times(\Phi^*\mathbf{A})+\nabla\times(\Phi\mathbf{A}^*)=(\nabla\Phi^*)\times\mathbf{A}+\Phi(\nabla\times\mathbf{A}^*).$$

odnosno

$$\operatorname{rot}(\Phi\mathbf{A})=\Phi\operatorname{rot}\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\operatorname{grad}\Phi. \tag{2.51}$$

Najzad, prema (1.40) *rotor vektorskog proizvoda* može se pisati kao

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\nabla\times(\mathbf{A}^*\times\mathbf{B})+\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}^*)=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}^*-$$
$$-\mathbf{B}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{A}^*)+\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}^*)-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}^*,$$

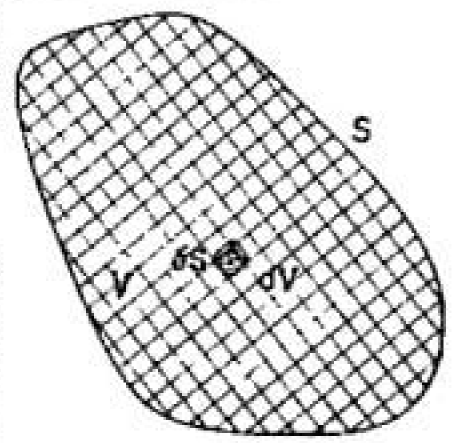
odakle sledi

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B}-\mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}. \tag{2.52}$$

Navedeni obrasci nam pokazuju kako se gradijent, divergencija i rotor nekog složenijeg izraza mogu svesti na prostije operacije, koje se odnose samo na pojedinačne funkcije u tom izrazu.

2.6 INTEGRALNE TEOREME

Gauss-ova teorema. Posmatrajmo u vektorskom polju neku zatvorenu površ S, koja obuhvata izvesnu zapreminu V (sl. 2.11). Pretpostavimo da je posmatrana *vektorska funkcija* $\mathbf{A}(x_1\, x_2\, x_3)$ *diferencijalna, a njeni prvi izvodi ograničeni u toj oblasti.* Izdelimo na bilo koji način ovu oblast u beskonačno male elemente i uočimo jedan takav



Sl 2.11

element, zapremine dV ograničen izvesnom površi δS. Za bilo koju tačku u njemu obrazac (2.31) možemo prepisati u obliku

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{\oint_{\delta S}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}}{dV},$$

a otuda

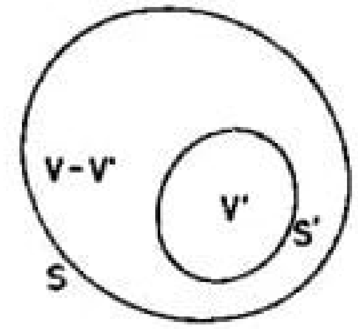
$$\oint_{\delta S}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\operatorname{div}\mathbf{A}\,dV. \tag{2.53}$$

Ako za svaki element zapremine napišemo ovakvu jednačinu i potom ih saberemo, na desnoj strani dobićemo zapreminski integral po oblasti V. Pri sabiranju izraza na levoj strani za svaki element površi $d\mathbf{S}$ koji je zajednički za dva susedna elementa zapremine, zbog jednoznačnosti funkcije $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$ i suprotno usmerenih elemenata površi $d\mathbf{S}$, pojaviće se dva suprotna člana $\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$ i $-\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$. Na taj način poništiće se svi članovi koji se odnose na elemente $d\mathbf{S}$ u unutrašnjosti, te zbir izraza na levoj strani daje površinski integral po spoljnoj površi S

$$\oint_S\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\int_V\operatorname{div}\mathbf{A}\,dV. \tag{2.54}$$

Ovo je *teorema Gauss-Ostrogradskog*, koju neki autori nazivaju i *Green-ovom teoremom*, a kratkoće radi mi ćemo je u daljem izlaganju zvati prosto Gauss-ova teorema. Ona pokazuje kako se *površinski integral po ma kojoj zatvorenoj površi može pretvoriti u zapreminski.*

Iz same formule (2.54) vidi se i razlog za uvedene pretpostavke o funkciji $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$ i njenim izvodima. Naime, ako je vektorska funkcija $\mathbf{A}$ diferencijabilna, sigurno je i neprekidna, što je dovoljno za egzistenciju integrala na levoj strani. S druge strane, diferencijabilnost obezbeđuje i postojanje divergencije, dok je ograničenost njenih izvoda dovoljan uslov za egzistenciju integrala s desne strane.



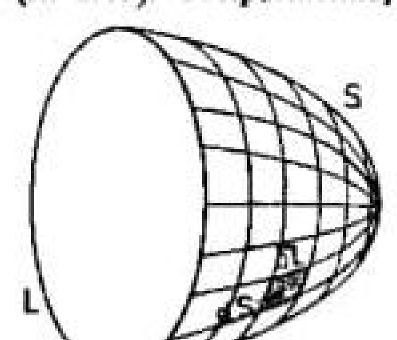
Sl. 2.12

Ako navedeni uslovi nisu ispunjeni u izvesnoj oblasti V', tu oblast moramo izdvojiti i samo na preostali deo $V-V'$ (sl. 2.12) možemo primeniti Gauss-ovu teoremu. Sad je ta oblast ograničena i iznutra izvesnom površi S', tako da Gauss-ova teorema u ovom slučaju glasi

$$\oint_{S+S'}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\int_{V-V'}\operatorname{div}\mathbf{A}\,dV. \tag{2.55}$$

Stokes-ova teorema. Posmatrajmo sad neku prosto zatvorenu konturu L i neka je S ma koja površ oivičena ovom konturom (sl. 2.13). Pretpostavimo, kao i pri izvođenju Gauss-ove teoreme, da je *vektorska funkcija* $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$ *diferencijabilna, a njeni prvi izvodi ograničeni u toj oblasti.* Podelimo na bilo koji način ovu površ u beskonačno male elemente i uočimo jedan takav element dS, oivičen konturom δL. Za ma koju tačku tog elementa obrazac (2.37) daje

$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})_n=\frac{\oint_{\delta L}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}}{dS},$$



Sl. 2.13

odakle sledi

$$\oint_{\delta L} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \tag{2.56}$$

Napišemo li ovakvu jednačinu za svaki element površi i zatim ih saberemo, na desnoj strani ćemo dobiti površinski integral po površi S. Pri tome svakom linijskom elementu $d\mathbf{l}$ koji je zajednički za dva susedna elementa površi, zbog jednoznačnosti funkcije $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$ i suprotno usmerenih elemenata $d\mathbf{l}$, odgovaraju dva suprotna člana $\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$ i $-\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$. Stoga će se pri sabiranju izraza na levoj strani poništiti svi članovi na zajedničkim granicama, tako da se dobija linijski integral po konturi L ove oblasti

$$\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \tag{2.57}$$

To je *Stokes-ova teorema*, koja se u ravni često naziva i Greenovom teoremom. Ona nam pokazuje kako se *linijski integral po ma kojoj prosto zatvorenoj konturi može pretvoriti u površinski*. Diferencijabilnost funkcije $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$ i ograničenost njenih izvoda potrebni su ovde iz istih razloga kao i kod Gauss-ove teoreme. Ako navedeni uslovi nisu ispunjeni u izvesnoj oblasti, tu oblast i ovde moramo izdvojiti i samo na preostali deo možemo primeniti Stokes-ovu teoremu.

Primene osnovnih teorema. Iz Gauss-ove teoreme možemo kao posledicu dobiti niz novih integralnih stavova. Tako na pr. ako stavimo $\mathbf{A} = \Phi\mathbf{C}$ gde je $\mathbf{C}$ proizvoljan konstantan vektor, Gauss-ova teorema daje

$$\oint_S \Phi\mathbf{C}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div}(\Phi\mathbf{C})\,dV \tag{2.58}$$

Pošto je na osnovu obrasca (2.48)

$$\operatorname{div}(\Phi\mathbf{C}) = \Phi\operatorname{div}\mathbf{C} + \mathbf{C}\cdot\operatorname{grad}\Phi = \mathbf{C}\cdot\operatorname{grad}\Phi,$$

dobijamo

$$\mathbf{C}\cdot\oint_S \Phi\,d\mathbf{S} = \mathbf{C}\cdot\int_V \operatorname{grad}\Phi\,dV,$$

a da bi ova jednakost važila za bilo koji vektor $\mathbf{C}$, mora biti

$$\oint_S \Phi\,d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{grad}\Phi\,dV \tag{2.59}$$

Ako Gauss-ovu teoremu primenimo na vektor $\mathbf{A}\times\mathbf{C}$, gde je $\mathbf{C}$ opet proizvoljan konstantan vektor, dobićemo

$$\oint_S (\mathbf{A}\times\mathbf{C})\cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{C})\,dV \tag{2.60}$$

Ovde prema (2.49) i (1.37) možemo staviti

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{C}) = \mathbf{C}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{C} = \mathbf{C}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}$$

$$d\mathbf{S}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C}) = \mathbf{C}\cdot(d\mathbf{S}\times\mathbf{A}),$$

pa gornji obrazac prelazi u

$$\mathbf{C}\cdot\oint_S d\mathbf{S}\times\mathbf{A} = \mathbf{C}\cdot\int_V \operatorname{rot}\mathbf{A}\,dV.$$

Zbog proizvoljnosti vektora $\mathbf{C}$ odavde sledi

$$\oint d\mathbf{S}\times\mathbf{A} = \int_V \operatorname{rot}\mathbf{A}\,dV. \tag{2.61}$$

Stavimo li još $\mathbf{A} = \Phi\operatorname{grad}\psi$, gde su Φ i ψ ma kakve skalarne funkcije koje zadovoljavaju navedene uslove Gauss-ove teoreme, ova teorema dobija oblik

$$\oint_S \Phi\operatorname{grad}\psi\cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div}(\Phi\operatorname{grad}\psi)\,dV. \tag{2.62}$$

Pošto je na osnovu (2.48)

$$\operatorname{div}(\Phi\operatorname{grad}\psi) = \Phi\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi + \operatorname{grad}\psi\cdot\operatorname{grad}\Phi,$$

iz (2.62) sledi

$$\oint_S \Phi\operatorname{grad}\psi\cdot d\mathbf{S} = \int_V \Phi\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi\,dV + \int_V \operatorname{grad}\psi\operatorname{grad}\Phi\,dV, \tag{2.63}$$

što u specijalnom slučaju $\Phi = \psi$ daje

$$\oint_S \psi\operatorname{grad}\psi\cdot d\mathbf{S} = \int_V [\psi\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi + (\operatorname{grad}\psi)^2]\,dV. \tag{2.64}$$

Ako izvršimo uzajamnu izmenu Φ i ψ u (2.63)

$$\oint_S \psi\operatorname{grad}\Phi\,d\mathbf{S} = \int_V \psi\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi\,dV + \int_V \operatorname{grad}\Phi\operatorname{grad}\psi\,dV$$

i oduzmemo ove jednačine, dobićemo

$$\oint_S (\Phi\operatorname{grad}\psi - \psi\operatorname{grad}\Phi)\cdot d\mathbf{S} = \int_V (\Phi\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi - \psi\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi)\,dV. \tag{2.65}$$

Navedeni stavovi (2.63), (2.64) i (2.65) poznati su pod imenom *Green-ove teoreme*.

Na sličan način kao u prethodnom slučaju, mogu se dobiti analoge posledice i Stokes-ove teoreme.

2.7. PROSTORNI IZVODI

Pojam prostornog izvoda. Posmatrajmo polje ma kakve fizičke veličine $\mathfrak{A}$, koja može biti skalar, vektor ili složenije prirode. Uočimo neku tačku M u tom polju i opkolimo je nekom malom zatvorenom površi ΔS, koja obuhvata zapreminu ΔV, kao pri definiciji divergencije (sl. 2.7). Označimo sa $*$ neku operaciju množenja vektorom; za skalarne funkcije to je proizvod skalara i vektora, a za vektorske funkcije to može biti skalarni ili vektorski proizvod. Tada se granična vrednost

$$\lim_{\Delta V\to 0} \frac{\oint_{\Delta S} d\mathbf{S} * \mathfrak{A}}{\Delta V}, \tag{2.66}$$

ako ona postoji i ne zavisi od načina kako ΔV teži nuli stežući se u tački M, prema Jung-u naziva *prostorni izvod funkcije $\mathfrak{A}$ u tački M u odnosu na operaciju* $*$.

Iz same definicije se vidi da je vrednost prostornog izvoda u nekoj tački bitno određena ponašanjem funkcije $\mathfrak{A}$ u okolini te tačke, otkuda i potiče naziv. Tako uveden pojam omogućava, kao što ćemo odmah videti, jedinstveno sagledavanje pojmova teorije polja.

Prostorni izvodi prvog reda. Ako je veličina $\mathfrak{A}$ neka skalarna funkcija $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ odgovarajući prostorni izvod možemo transformisati prema obrascu (2.59)

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} d\mathbf{S} \cdot \Phi}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta V} \operatorname{grad} \Phi \cdot dV}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \overline{\operatorname{grad} \Phi},$$

a to je *gradijent* posmatrane funkcije u tački M

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint d\mathbf{S} \cdot \Phi}{\Delta V} = \operatorname{grad} \Phi \tag{2.67}$$

Ako je pak veličina $\mathfrak{A}$ vektorska funkcija $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$, a zvezdica u (2.66) znači skalarno množenje, na osnovu (2.31) neposredno se vidi da je ovaj prostorni izvod *divergencija* funkcije u tački M

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}}{\Delta V} = \operatorname{div} \mathbf{A} \tag{2.68}$$

Najzad, ako zvezdica znači vektorsko množenje, odgovarajući prostorni izvod se transformiše prema obrascu (2.61)

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} d\mathbf{S} \times \mathbf{A}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta V} \operatorname{rot} \mathbf{A}\, dV}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \overline{\operatorname{rot} \mathbf{A}},$$

čime dobijamo *rotor* posmatrane funkcije u tački M

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint d\mathbf{S} \times \mathbf{A}}{\Delta V} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \tag{2.69}$$

Na ovaj način se pomoću pojma prostornog izvoda može dati *jedinstvena definicija* gradijenta, divergencije i rotora.

Prostorni izvodi drugog reda. Pošto su rezultati navedenih operacija izvesne skalarne ili vektorske funkcije, od njih se takođe mogu obrazovati prostorni izvodi, koji se stoga nazivaju *prostorni izvodi drugog reda*. Od gradijenta, koji je vektor, mogu se formirati divergencija i rotor

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi, \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi,$$

od divergencije kao skalara samo gradijent

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A},$$

dok se od rotora, koji je vektor, mogu obrazovati divergencija i rotor

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Odavde vidimo da ima *pet prostornih izvoda drugog reda*, koji najlakše možemo naći primenom Hamiltonovog operatora (2.24), imajući u vidu simboličke prikaze prostornih izvoda.

Divergencija gradijenta može se, primenom asocijativnog zakona za skalarni proizvod, simbolički napisati u obliku

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \nabla \cdot (\nabla \Phi) = (\nabla \cdot \nabla)\, \Phi,$$

ili kraće

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \Delta \Phi, \tag{2.70}$$

gde je

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 \tag{2.71}$$

tzv. *Laplace-ov operator*. Njegov eksplicitni oblik dobija se pomoću obrasca (1.27) simboličkim množenjem odgovarajućih komponenata:

$$\Delta = \nabla_i \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

odnosno, bez primene sumacione konvencije,

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \tag{2.72}$$

Do istog rezultata možemo doći i analitički, prema (2.35) i (2.21),

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2},$$

što se poklapa sa gornjim izrazom.

Rotor gradijenta izražava se na sličan način, koristeći asocijativni zakon za vektorski proizvod

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = \nabla \times (\nabla \Phi) = (\nabla \times \nabla)\, \Phi,$$

a pošto je $\nabla \times \nabla = 0$, za ma koje Φ dobijamo

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = 0. \tag{2.73}$$

Gradijent divergencije može se napisati u simboličkom obliku

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}),$$

a u komponentama na osnovu (2.35) i (2.21) imamo

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_k} \right) \mathbf{e}_i. \tag{2.74}$$

Divergencija rotora iznosi, ako se primeni osobina ciklične permutacije (1.35)

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{A},$$

a pošto je $\nabla \times \nabla \equiv 0$, sledi da je za ma koje $\mathbf{A}$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0. \tag{2.75}$$

Rotor rotora možemo transformisati prema obrascu (1.40)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A},$$

čime dobijamo

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} \tag{2.76}$$

gde je

$$\Delta \mathbf{A} = (\Delta A_i) \mathbf{e}_i. \tag{2.77}$$

Ovaj obrazac omogućava nam da rotor rotora svedemo na jednostavnije izraze, koji su pogodniji za upotrebu, naročito u slučajevima kad znamo divergenciju tog vektora.

2.8. NALAŽENJE VEKTORSKE FUNKCIJE POMOĆU DIVERGENCIJE I ROTORA

Formulacija problema. U mnogim pitanjima teorijske fizike nailazi se na problem određivanja vektorske funkcije $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$ na osnovu poznavanja njene divergencije i rotora, dakle na problem rešavanja jednačina:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = D(x_1, x_2, x_3), \qquad \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{R}(x_1, x_2, x_3), \tag{2.78}$$

u kojima su skalarna funkcija $D(x_1, x_2, x_3)$ i vektorska funkcija $\mathbf{R}(x_1, x_2, x_3)$ unapred zadane. Za nalaženje rešenja potrebno je precizirati i granične uslove koje tražena vektorska funkcija mora zadovoljavati. U najvećem broju slučajeva ti uslovi su formulisani tako da na zadanoj površi S normalna komponenta tražene vektorske funkcije mora imati zadanu vrednost:

$$A_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3), \tag{2.79}$$

gde je $f(x_1, x_2, x_3)$ unapred zadana funkcija, a crta iznad argumenata ukazuje da se jednakost odnosi samo na tačke površi S. Granični uslovi se mogu zadati i drukčije, ali se ovde u to nećemo upuštati. Niže ćemo dokazati da relacije (2.78) i (2.79) zaista jednoznačno određuju traženu vektorsku funkciju $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$. Pri ovome ćemo pretpostaviti da su *funkcije* $D(x_1, x_2, x_3)$ *i* $\mathbf{R}(x_1, x_2, x_3)$ *neprekidne u oblasti G omeđenoj površi S, osim možda na konačnom broju površi* Σ.

Učinimo prethodno dve važne napomene.

Da bi problem određivanja vektorske funkcije $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$ iz navedenih relacija imao smisla, moraju biti ispunjeni određeni uslovi kompatibilnosti. Tako, zbog identiteta (2.75) mora važiti:

$$\operatorname{div} \mathbf{R} = 0, \tag{2.80}$$

a na osnovu (2.54) i (2.79) mora biti:

$$\int_G D(x_1, x_2, x_3)\, dV = \oint_S f(x_1, x_2, x_3)\, ds. \tag{2.81}$$

U daljim razmatranjima ćemo pretpostaviti da su ovi uslovi ispunjeni.

S druge strane, jednačine (2.78) predstavljaju sistem od *četiri* parcijalne diferencijalne jednačine sa *tri* nepoznate funkcije $A_1(x_1, x_2, x_3)$, $A_2(x_1, x_2, x_3)$ i $A_3(x_1, x_2, x_3)$. Sistem koji ima više jednačina nego nepoznatih funkcija može imati rešenja samo u specijalnim slučajevima, kada su jednačine u tzv. involuciji. Uslovi za ovo se detaljnije analiziraju u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina prvoga reda. Na ovom mestu ćemo na jednostavniji način pokazati da sistem:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = D(x_1, x_2, x_3),$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = R_1(x_1, x_2, x_3),$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} = R_2(x_1, x_2, x_3),$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = R_3(x_1, x_2, x_3)$$

eksplicitno napisanih jednačina (2.78) zaista ima rešenja. Ako drugu od ovih jednačina diferenciramo po x_1 a treću po x_2 pa rezultate saberemo, dobićemo nakon neznatnih uprošćenja i korišćenja uslova $\operatorname{div} \mathbf{R} = 0$ relaciju:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial R_3}{\partial x_3},$$

iz koje integracijom po x_3 proizilazi:

$$\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = R_3(x_1, x_2, x_3) + F(x_1, x_2) \tag{2.82}$$

gde je $F(x_1, x_2)$ neka proizvoljna funkcija, uvedena umesto proizvoljne konstante integracije. Međutim, prema poslednjoj od jednačina gornjeg sistema ta funkcija mora biti jednaka nuli. Stoga se ta poslednja jednačina (odnosno, bilo koja od tri skalarne jednačine ekvivalentne $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{R}$) može shvatiti ne kao jednačina nezavisna od preostale dve, već kao dopunski uslov koji moraju zadovoljavati rešenja A_1, A_2 i A_3 (tj. na osnovu koga smo stavili $F(x_1, x_2) = 0$ u gornjoj jednačini). Dakle, gornji sistem ima samo tri nezavisne jednačine. Razume se, pri izvođenju opštih zaključaka podesno je koristiti sve četiri jednačine.

Ispitajmo najpre neke osobine rešenja jednačina (2.78) i (2.79).

Jednoznačnost rešenja. Ova osobina se lako može pokazati indirektno. Pretpostavimo, naime, da postoje dve vektorske funkcije $\mathbf{A}'(x_1, x_2, x_3)$ i $\mathbf{A}''(x_1, x_2, x_3)$ koje zadovoljavaju jednačine (2.78) i (2.79). Njihova razlika, $\mathbf{B} = \mathbf{A}' - \mathbf{A}''$ onda očevidno mora zadovoljavati relacije:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_0 = 0, \tag{2.83}$$

gde je $\mathbf{n}_0$ jedinični vektor normale u datoj tački površi S. Na osnovu identiteta (2.73), iz druge od ovih relacija odmah zaključujemo da postoji skalarna funkcija Φ, takva da je

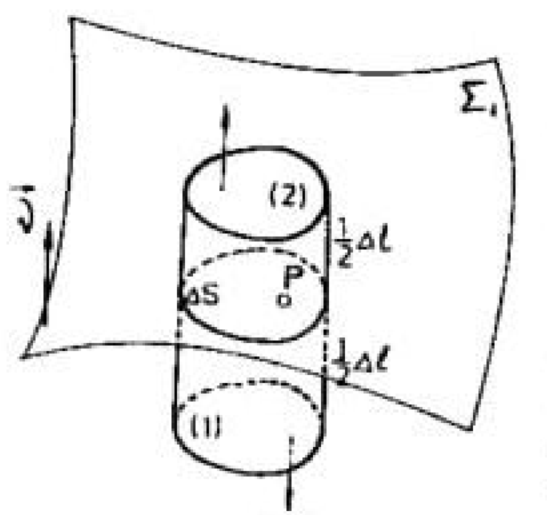
$$\mathbf{B} = \operatorname{grad} \Phi, \quad \Delta \Phi = 0, \quad \mathbf{n}_0 \cdot \operatorname{grad} \Phi = 0; \tag{2.84}$$

poslednja dva uslova slede iz prve i treće relacije (2.83) i jednačine (2.70). Primenimo sad na funkciju Φ Green-ovu teoremu (2.64), uzimajući za S i V graničnu površ i zapreminu njome obuhvaćenu. Zbog poslednja dva uslova (2.84) otpada površinski integral sa leve strane jednačine (2.64), kao i prvi zapreminski integral sa desne strane, tako da se dobija:

$$\int_G (\mathrm{grad}\,\Phi)^2\, dV = 0. \tag{2.85}$$

Pošto integrand u ovom integralu sigurno ne može biti negativan, u svakoj tački oblasti integracije mora biti grad $\Phi = \mathbf{B} = 0$, tj. $\mathbf{A}' = \mathbf{A}''$, čime je jednoznačnost rešenja dokazana. Dakle, *sistem jednačina* (2.78) *uz granični uslov* (2.79) *jednoznačno određuje vektorsku funkciju* $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$.

Neprekidnost rešenja. Funkcije $D(x_1, x_2, x_3)$ i $\mathbf{R}(x_1, x_2, x_3)$ mogu, kao što smo već istakli, biti prekidne na nekim površima Σ unutar oblasti G u kojoj nas rešenje interesuje. Može se stoga očekivati da i vektorska funkcija $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$ na tim površima bude prekidna. Dokazaćemo da će to zaista biti slučaj samo ako su prekidi funkcija $D(x_1, x_2, x_3)$ i $\mathbf{R}(x_1, x_2, x_3)$ posebnog tipa.



Sl. 2.14

Posmatrajmo sliku 2.14 koja prikazuje deo površi Σ_1 na kojoj funkcija $D(x_1, x_2, x_3)$ nije neprekidna. Neka je $\vec{\nu}$ jedinični vektor pozitivne normale na tu površ. Uočimo na Σ_1 neku tačku P i proizvoljan element površi ΔS oko nje. Kroz sve tačke granične linije ovog elementa površi povucimo odgovarajuće normale i na ovima uzmimo odsečke dužine $\frac{1}{2}\Delta l$ sa jedne i sa druge strane površi Σ_1. Fluks vektorske funkcije $\mathbf{A}$ kroz ovako dobijen elementarni cilindar možemo naći s jedne strane direktno:

$$\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_{(1)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} + \int_{(2)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} + \int_{(M)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

(prva dva integrala se odnose na osnovice, a poslednji na omotač), a s druge strane pomoću Gauss-ove teoreme (2.54):

$$\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_V D\, dV = \int_{\Delta S}\int_{\Delta l} D\, dS\, dl.$$

Izjednačimo dobijene izraze:

$$\int_{(1)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} + \int_{(2)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} + \int_{(M)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta S}\int_{\Delta l} D\, dS\, dl. \tag{2.86}$$

Pustimo sad da se visina cilindra smanjuje ($\Delta l \to 0$). Integral po omotaču postaje onda jednak nuli, a oni po osnovicama se svode na integrale po ΔS, računate s jedne i s druge strane Σ_1:

$$\int_{\Delta S} \vec{\nu}\cdot(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\, dS = \int_{\Delta S} \left(\lim_{\Delta l \to 0} \int_{\Delta l} D\, dl\right) dS,$$

gde je $d\mathbf{S} = \vec{\nu}\, dS$, a znak minus uz $\mathbf{A}_1$ potiče otud, što je pri računanju fluksa kroz osnovicu (1) smer normale suprotan od $\vec{\nu}$. Primenimo li na poslednju relaciju teoremu o srednjoj vrednosti integralnog računa, dobićemo:

$$\overline{[\vec{\nu}\cdot(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)]}\,\Delta S = \overline{\left[\lim_{\Delta l \to 0} \int_{\Delta l} D\, dl\right]}\,\Delta S.$$

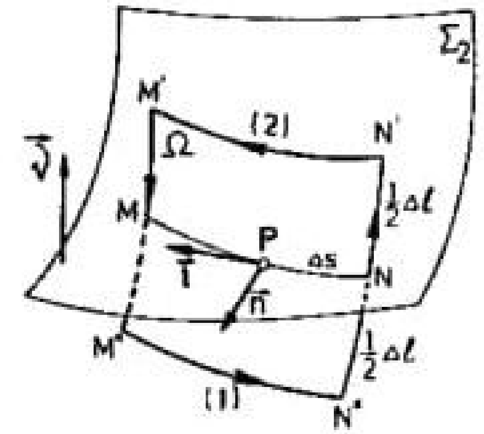
Pustimo li, najzad, da $\Delta S \to 0$ sažimajući se u tačku P, dolazimo do rezultata:

$$\vec{\nu}\cdot(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) = A_{2\nu} - A_{1\nu} = \lim_{\Delta l \to 0} \int_{\Delta l} D\, dl, \tag{2.87}$$

gde su sa $A_{2\nu}$ i $A_{1\nu}$ označene projekcije vektorske funkcije $\mathbf{A}$ sa jedne i druge strane površi Σ_1 na normalu $\vec{\nu}$ (tzv. normalne komponente). Dakle, na površima gde $D(x_1, x_2, x_3)$ nije neprekidno, *normalna komponenta vektorske funkcije* $\mathbf{A}$ *može trpeti skok.*

U integralu sa desne strane integracija se vrši duž malog odsečka Δl normale na površ Σ_1 u tački P, pri čemu je polovina tog odsečka s jedne, a polovina s druge strane ove površi.

Posmatrajmo dalje neku površ Σ_2 na kojoj funkcija $\mathbf{R}(x_1, x_2, x_3)$ nije neprekidna (sl. 2.15). Uočimo na njoj jednu tačku P, provucimo kroz nju proizvoljnu liniju koja leži na Σ_2 i na toj liniji uzmimo odsečak MN dužine Δs. Orijentišimo ovu liniju uzimanjem jednog smera tangente za pozitivan; neka je pozitivni jedinični vektor tangente $\mathbf{t}$. Kroz sve tačke odsečka MN provucimo normale na Σ_2 i na tako dobijenoj površi Ω odmerimo odsečke dužine po $\frac{1}{2}\Delta l$ sa obe strane Σ_2, čime dobijamo neke krive $M'N'$ i $M''N''$, na kojima ćemo tangente orijentisati u istom smeru kao i na MN. Izračunajmo sada cirkulaciju vektorske funkcije $\mathbf{A}$ duž konture $M''N''N'M'M''$, u smeru naznačenom na slici, tj. uzimajući $\mathbf{n}$ za pozitivnu normalu na Ω. Kao i u malopređašnjem izvođenju, i ovde ćemo cirkulaciju računati najpre direktno:



Sl. 2.15

$$\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_{N'}^{M'} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} + \int_{M''}^{N''} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} + \int_{(N)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$$

(poslednji integral s desne strane se računa duž odsečaka normala, $M'M''$ i $N''N'$), a zatim pomoću Stokes-ove teoreme (2.57):

$$\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_\Omega \mathbf{R}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta s}\int_{\Delta l} (\mathbf{R}\cdot\mathbf{n})\, ds\, dl,$$

nakon čega ćemo dobijene izraze izjednačiti:

$$\int_{N'}^{M'} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} + \int_{M''}^{N''} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} + \int_{(N)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_{\Delta s}\int_{\Delta l} (\mathbf{R}\cdot\mathbf{n})\, ds\, dl. \tag{2.88}$$

Pustimo li sada da $\Delta l \to 0$, poslednji integral sa leve strane će takođe težiti nuli, a prva dva prelaze u integrale duž MN računate s jedne i s druge strane Σ_2:

$$\int_{\Delta s} \mathbf{t}\cdot(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1)\,ds=\int_{\Delta s}[\lim_{\Delta l\to 0}\int_{\Delta l}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{n})\,dl]\,ds$$

(znak minus uz $\mathbf{A}_1$ potiče otud, što je pri računanju cirkulacije duž $M''N''$ smer obilaženja konture bio suprotan od smera $\mathbf{t}$). Primenimo li opet teoremu o srednjoj vrednosti integralnog računa, uzimajući u obzir da je, kako se vidi sa slike, $\mathbf{t}=\mathbf{n}\times\vec{\mathbf{v}}$ dobijamo:

$$\overline{[(\mathbf{n}\times\vec{\mathbf{v}})\cdot(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1)]}\,\Delta s=\overline{[\lim_{\Delta l\to 0}\int_{\Delta l}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{n})\,dl]}\,\Delta s.$$

Pustimo li, najzad, da $\Delta s \to 0$ sažimajući se u tačku P, imaćemo:

$$\mathbf{n}\cdot[\vec{\mathbf{v}}\times(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1)]=\mathbf{n}\cdot(\lim_{\Delta l\to 0}\int_{\Delta l}\mathbf{R}\,dl),$$

gde je istovremeno izmenjeno mesto skalarnog i vektorskog množenja u mešovitom proizvodu sa leve strane, u skladu sa osobinom (1.37). Uzmimo još u obzir da je $\mathbf{n}$ proizvoljan jedinični vektor (geodezijska normala površi Σ_2 u odnosu na proizvoljnu liniju povučenu kroz tačku P), pa gornju relaciju napišimo u definitivnom obliku:

$$\vec{\mathbf{v}}\times(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1)=\lim_{\Delta l\to 0}\int_{\Delta l}\mathbf{R}\,dl. \tag{2.89}$$

Vektori $\vec{\mathbf{v}}\times\mathbf{A}_2$ i $\vec{\mathbf{v}}\times\mathbf{A}_1$ su u vezi sa tangencijalnim komponentama vektorske funkcije $\mathbf{A}_2$ i $\mathbf{A}_1$ sa obe strane površi Σ_2. Naime, *intenzitet* ovih vektora jednak je odgovarajućim tangencijalnim komponentama, dok im je smer normalan na ravan određenu vektorima $\mathbf{A}_1$ i $\vec{\mathbf{v}}$. Dakle na površima Σ_2 gde $\mathbf{R}(x_1, x_2, x_3)$ nije neprekidno, *tangencijalna komponenta vektorske funkcije može trpeti skok.* Kao i kod relacije (2.87), u integralu sa desne strane se integracija vrši duž malog odsečka normale na Σ_2 u tački P, pri čemu je polovina tog odsečka s jedne, a polovina sa druge strane površi.

Iz (2.87) i (2.89) se vidi da će vektorska funkcija $\mathbf{A}$ na površi Σ biti prekidna (tj. biće $\mathbf{A}_2 \neq \mathbf{A}_1$) jedino ako su granične vrednosti integrala sa desne strane ovih relacija različite od nule. Ako funkcija $D(x_1, x_2, x_3)$ i $\mathbf{R}(x_1, x_2, x_3)$ na ovim površima trpe konačan skok, funkcija $\mathbf{A}$ će biti neprekidna, jer su pomenute granične vrednosti onda jednake nuli. Ako, pak, $D(x_1, x_2, x_3)$ i $\mathbf{R}(x_1, x_2, x_3)$ imaju beskonačne skokove, ove granične vrednosti su ili jednake nuli ili ne postoje (postaju beskonačne), tj. vektorska funkcija $\mathbf{A}$ je ili neprekidna ili trpi beskonačan skok. Da bi $\mathbf{A}$ na Σ imala konačan skok, potrebno je da diskontinuiteti funkcija $D(x_1, x_2, x_3)$ odnosno $\mathbf{R}(x_1, x_2, x_3)$ budu naročitog tipa (oblika tzv. δ-funkcije, o kojoj će docnije biti reči).

Napomenimo uzgred da se izrazi $\vec{\mathbf{v}}\cdot(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1)$ i $\vec{\mathbf{v}}\times(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1)$ zovu *površinska divergencija i površinski rotor* vektorske funkcije $\mathbf{A}$ u odnosu na datu površ; oni

se ponekad obeležavaju sa Div $\mathbf{A}$ i Rot $\mathbf{A}$ (sa velikim početnim slovom). Površinska divergencija i površinski rotor su različiti od nule jedino ako na uočenoj površi vektorska funkcija trpi skok.

Slučaj kad je oblast G beskonačna. U mnogim problemima je potrebno naći rešenje jednačine (2.78) u celom beskonačnom prostoru. U tom slučaju površ S je u beskonačnosti i granični uslovi (2.79) gube smisao. Dokazaćemo sada sledeće tvrđenje: *Vektorska funkcija* $\mathbf{A}$ *određena je jednoznačno u celom beskonačnom prostoru samo jednačinama* (2.78) (dakle, bez graničnih uslova) *ukoliko* $|\mathbf{A}|$ *pri udaljavanju u beskonačnost teži nuli ne sporije nego* $\frac{1}{r^2}$, gde je r intenzitet vektora položaja tačke u kojoj posmatramo traženu vektorsku funkciju. Pre nego što pređemo na dokazivanje ovog tvrđenja, zapazimo da će jednačine (2.78) dopuštati postojanje rešenja $\mathbf{A}$ sa gornjom osobinom jedino ako funkcije $D(x_1, x_2, x_3)$ i $\mathbf{R}(x_1, x_2, x_3)$ teže nuli ne sporije nego $\frac{1}{r^3}$ kad $r \to \infty$.

Kao i u slučaju konačne oblasti G, pretpostavimo da rešenje nije jednoznačno, tj. da postoje dve vektorske funkcije, $\mathbf{A}'$ i $\mathbf{A}''$ koje zadovoljavaju (2.78). Njihova razlika, $\mathbf{B}=\mathbf{A}'-\mathbf{A}''$, će u tom slučaju morati zadovoljavati prve dve od relacija (2.83), pa će se moći uvesti skalarna funkcija Φ sa osobinama datim prvim dvema jednačinama (2.84). Osim toga, na osnovu (2.23) moći će se pisati:

$$d\Phi=\mathbf{B}\cdot d\mathbf{r},\quad \text{tj.}\quad \Phi=\int_{M_0}^{M}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{r},$$

gde je M_0 proizvoljna početna tačka, a M je tačka sa radijus-vektorom $\mathbf{r}$. Iz poslednjeg izraza se vidi da funkcija Φ teži nuli kad $r \to \infty$ ne sporije nego $\frac{1}{r}$, ukoliko su ispunjene pretpostavke tvrđenja koje dokazujemo. Drugim rečima, u površinskom integralu Green-ove teoreme (2.64) integrand teži nuli kad $r \to \infty$ ne sporije nego $\frac{1}{r^3}$, a sam integral teži nuli ne sporije nego $\frac{1}{r}$. Prema tome, iz (2.64) se ponovo dobija uslov (2.85), iz koga sledi zaključak o jednoznačnosti rešenja jednačina (2.78).

U pogledu neprekidnosti rešenja, ostaju na snazi svi zaključci izvedeni za slučaj kada je G konačno.

Izračunavanje vektorske funkcije $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$. Pokazaćemo na ovom mestu kako se iz jednačina (2.78) nalazi vektorska funkcija $\mathbf{A}$ u slučaju kad je *oblast G beskonačna*, jer je to za primene u fizici najinteresantnije. Pomenutim jednačinama je definisano jedno složeno vektorsko polje, pošto ni divergencija ni rotor nisu svugde identički jednaki nuli. Takvo vektorsko polje se može razložiti na potencijalnu i solenoidalnu komponentu, tj. pisati $\mathbf{A}=\mathbf{P}+\mathbf{S}$, gde je:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{P}=D(x_1, x_2, x_3), && \operatorname{div}\mathbf{S}=0,\\ &\operatorname{rot}\mathbf{P}=0, && \operatorname{rot}\mathbf{S}=\mathbf{R}(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \tag{2.90}$$

Time je problem izračunavanja vektorske funkcije $\mathbf{A}$ sveden na dva nešto jednostavnija.

Usredsredimo pažnju najpre na potencijalnu komponentu $\mathbf{P}(x_1, x_2, x_3)$. Kako se iz odgovarajućih jednačina (2.90) vidi, smemo na osnovu (2.73) pisati:

$$\mathbf{P} = -\operatorname{grad} U, \tag{2.91}$$

gde je $U = U(x_1, x_2, x_3)$ tzv. ***skalarni potencijal*** vektorske funkcije $\mathbf{P}(x_1, x_2, x_3)$, a znak minus je uveden konvencionalno. Za skalarni potencijal pretpostavićemo da je neprekidna funkcija, ali ne nužno i njeni izvodi. Kako se iz (2.87) i (2.89) vidi, površinski rotor funkcije $\mathbf{P}(x_1, x_2, x_3)$ je uvek nula (tj. tangencijalna komponenta ovog vektora je neprekidna na svim površima Σ), ali površinska divergencija može biti različita od nule (tj. normalna komponenta funkcije $\mathbf{P}(x_1, x_2, x_3)$ na površima Σ može trpeti skok, što je prema (2.91) vezano za diskontinuitete izvoda skalarnog potencijala). Iz jednačina (2.90) za $\mathbf{P}(x_1, x_2, x_3)$ i relacije (2.70) nalazimo da skalarni potencijal mora zadovoljavati tzv. *Poisson-ovu jednačinu:*

$$\Delta U = -D(x_1, x_2, x_3), \tag{2.92}$$

čijom integracijom je u skladu sa (2.91), rešeno pitanje nalaženja potencijalne komponente.

Da bismo našli vrednost skalarne funkcije U u nekoj tački $C(x_1, x_2, x_3)$ sa vektorom položaja $\mathbf{r}$ u odnosu na neki pol O (sl. 2.16), primenićemo Green-ovu teoremu u obliku (2.65). Uzećemo pri tom $\Phi = U, \psi = \frac{1}{l}$, gde je $\mathbf{l}$ vektor povučen iz tačke C do neke proizvoljne tačke $M(x_1', x_2', x_3')$ oblasti G, a

$$l = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i' - x_i)^2},$$

je intenzitet tog vektora. Neposrednim diferenciranjem po koordinatama tačke M se može proveriti važenje relacija:

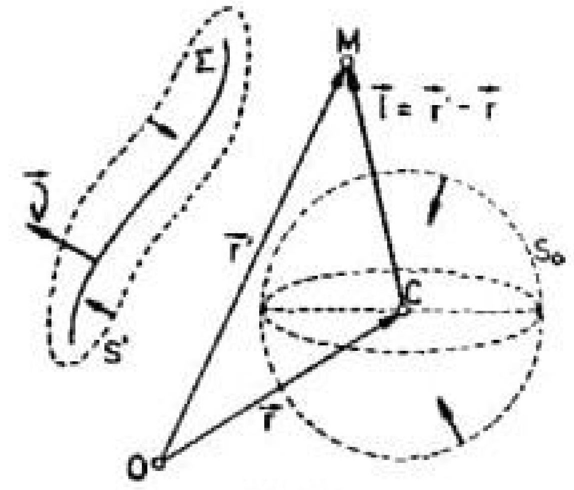
$$\operatorname{grad}_M\left(\frac{1}{l}\right) = -\frac{\mathbf{l}}{l^3}, \quad \Delta_M\left(\frac{1}{l}\right) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i'^2}\left(\frac{1}{l}\right) = 0, \tag{2.93}$$

koje će nam biti potrebne u daljim razmatranjima, i koje su zadovoljene svugde u G osim za $l = 0$ (tačka M se poklapa sa C), jer tamo $\frac{1}{l}$ ima pol. Na slici 2.16 prikazana je i jedna od površi Σ na kojima $D(x_1, x_2, x_3)$ nije neprekidna i naznačena je njena pozitivna normala $\vec{\nu}$.

Green-ova teorema (2.65), koju želimo primeniti u ovim razmatranjima, isto kao i Gauss-ova teorema (2.54) iz koje je dobijena, važi samo ako je u oblasti integracije V integrand diferencijabilna funkcija sa ograničenim izvodima. Stoga ćemo morati, u skladu sa rečenim uz formulu (2.55), tačku C i površi Σ isključiti iz domena integracije. To ćemo učiniti na taj način što ćemo tačku C

opkoliti jednom sferom S_0 poluprečnika ε sa centrom u C, a površ Σ izdvojiti nekom površi S'. Jednačinu (2.65) prepisujemo, dakle, u obliku:

$$\oint_{S+S_0+S'}\left[U\operatorname{grad}\left(\frac{1}{l}\right) - \frac{1}{l}\operatorname{grad} U\right]\cdot d\mathbf{S} = \int_{G'}\left[U\Delta\left(\frac{1}{l}\right) - \frac{1}{l}\Delta U\right]dV,$$



Sl. 2.16

gde je S beskonačno udaljena granična površ oblasti G. Površinski integral po njoj jednak je nuli, ukoliko vektorska funkcija $\mathbf{A}$ (pa, prema tome i njena potencijalna komponenta $\mathbf{P}$) zadovoljava uslov egzistencije rešenja razmotren u prethodnom odeljku, tj. njen intenzitet teži nuli ne sporije nego $\frac{1}{r^2}$ kad $r \to \infty$. Tačnije, ovaj integral u tom slučaju teži nuli ne sporije nego $\frac{1}{r}$ kad $r \to \infty$. Površinski integrali po S_0 i S' računaju se sa normalom usmerenom ka unutrašnjosti oblasti koje one omeđuju (tj ka spoljašnjoj strani zapremine G' po kojoj se vrši integracija). Zapremina G' obuhvata ceo prostor osim oblasti ograničenih površima S_0 i S'. Uzimajući još u obzir jednačinu (2.92) i osobine (2.93), možemo gornju relaciju pisati u obliku:

$$-\oint_{S_0+S'}\left(U\frac{\mathbf{l}}{l^3} + \frac{1}{l}\operatorname{grad} U\right)\cdot d\mathbf{S} = \int_{G'}\frac{D}{l}dV. \tag{2.94}$$

Razmotrimo najpre integral po S_0. U svim tačkama te sfere vektor $\mathbf{l}$ ima intenzitet jednak poluprečniku sfere ε i smer radijusa, tako da je $d\mathbf{S} = -\frac{\mathbf{l}}{\varepsilon}dS$. jer pri računanju ovog površinskog integrala treba normalu na površ S_0 usmeriti ka centru. Tako dobijamo:

$$-\oint_{S_0}\left(U\frac{\mathbf{l}}{l^3} + \frac{1}{l}\operatorname{grad} U\right)\cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_0}\left(\frac{U}{\varepsilon^2} + \frac{\mathbf{l}\cdot\operatorname{grad} U}{\varepsilon^2}\right)dS.$$

Primenimo li još na dobijeni rezultat teoremu o srednjoj vrednosti integralnog računa, nalazimo:

$$\oint_{S_0}\left(\frac{U}{\varepsilon^2} + \frac{\mathbf{l}\cdot\operatorname{grad} U}{\varepsilon^2}\right)dS = \frac{1}{\varepsilon^2}(\overline{U + \mathbf{l}\cdot\operatorname{grad} U})\cdot 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi\left(U + \varepsilon\frac{\partial U}{\partial n}\right),$$

gde je $\frac{\partial U}{\partial n}$ izvod funkcije U u pravcu normale na sferi S_0, a $4\pi\varepsilon^2$ je površina te sfere. Pustimo li najzad da $\varepsilon \to 0$ (tj. da se sfera S_0 smanjuje sažimajući se u tačku C), imaćemo:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\oint_{S_0}\left(U\frac{\mathbf{l}}{l^3} + \frac{1}{l}\operatorname{grad} U\right)\cdot d\mathbf{S}\right] = 4\pi U(x_1, x_2, x_3), \tag{2.95}$$

jer srednja vrednost funkcije U po sferi, zbog pretpostavke o neprekidnosti, pri tome teži vrednosti funkcije u tački C. Slično se može postupiti i sa integralom po S'. U graničnom prelazu $S' \to \Sigma$ on će biti različit od nule jedino ako integrand nije neprekidan na Σ. Pošto smo pretpostavili da je potencijal U neprekidna funkcija, diskontinuiteti integranda mogu biti vezani samo za $\operatorname{grad} U = -\mathbf{P}$ i postojaće jedino ako je desna strana jednačine (2.87) različita od nule (u ovoj jednačini, razume se, prethodno treba u skladu sa (2.90) $\mathbf{A}$ zameniti sa $\mathbf{P}$). Dakle:

$$\lim_{S' \to \Sigma} \left[- \oint_{S'} \left(U \frac{\mathbf{l}}{l^3} + \frac{1}{l} \operatorname{grad} U \right) \cdot d\mathbf{S} \right] - \lim_{S' \to \Sigma} \oint_{S'} \frac{\mathbf{P}}{l} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{\Sigma} \frac{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \vec{\mathbf{v}}}{l} dS,$$

jer se u graničnom prelazu integracija vrši po obema stranama površi Σ pri čemu se integrali od prvog člana poništavaju. Pri pisanju poslednje jednakosti uzeto je uz to u obzir da se smer normale na S' poklapa sa smerom pozitivne normale na Σ sa negativne strane ove poslednje površi, zbog čega se u poslednjem članu pojavio znak minus. Uvrstimo li sad (2.95) i (2.96) u (2.94), dobićemo nakon neznatnog sređivanja:

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{D(x_1', x_2', x_3')\, dx_1'\, dx_2'\, dx_3'}{[(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)^2]^{1/2}} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{[\mathbf{P}_2(x_1', x_2', x_3') - \mathbf{P}_1(x_1', x_2', x_3')] \cdot d\mathbf{S}'}{[(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)^2]^{1/2}}, \tag{2.97}$$

pri čemu su svi argumenti i izraz za l eksplicitno napisani, i uzeto je u obzir da se pri graničnim prelazima (2.95) i (2.96) oblast G' poklapa sa G.

Učinimo na ovom mestu jednu važnu napomenu. U gornjem izvođenju smo pretpostavili da je potencijal U neprekidna funkcija. Zaista, potencijal je jednačinom (2.91) određen samo s tačnošću do jedne proizvoljne aditivne konstante, koja uvek može biti određena tako da ovaj ostane neprekidan na Σ (po potrebi se toj konstanti mogu dati različite vrednosti u oblastima sa jedne i sa druge strane Σ). Međutim, mogli smo takođe tražiti rešenje Poisson-ove jednačine (2.92) koje bi na zadanim površinama Σ' imalo diskontinuitete zadanog tipa. U tom slučaju bi diskontinuiteti integranda leve strane jednačine (2.96) mogli poticati i od prvog člana, usled čega bi se u (2.97) pojavio još jedan član sa desne strane. Taj član bi obezbeđivao potrebne diskontinuitete funkcije $U(x_1, x_2, x_3)$.

Nalaženje vektorske funkcije $P(x_1, x_2, x_3)$ na osnovu rezultata (2.97) je elementarno. U tu svrhu treba naći $-\operatorname{grad} U$, diferencirajući po x_1, x_2, x_3. Pošto se integracija vrši po x_1', x_2', x_3' operacije diferenciranja i integriranja mogu izmeniti mesto, što daje:

$$\mathbf{P}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4\pi} \int_G \operatorname{grad} \frac{D(x_1', x_2', x_3')}{l} dx_1'\, dx_2'\, dx_3' - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \operatorname{grad}$$

$$\operatorname{grad} \frac{\mathbf{P}_2(x_1', x_2', x_3') - \mathbf{P}_1(x_1', x_2', x_3')}{l} \cdot d\mathbf{S}'.$$

Na osnovu obrasca (2.45) i činjenice da do koordinata tačke C po kojima se diferencira zavisi samo $\frac{1}{l}$, tako da je

$$\operatorname{grad}_C \left(\frac{1}{l} \right) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{l} \right) = \frac{\mathbf{l}}{l^3}$$

(u relaciji (2.93) diferenciranje je vršeno po x_1', x_2', x_3'), izlazi definitivno:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_G \frac{D(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} d^3\mathbf{r}' - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{[\mathbf{P}_2(\mathbf{r}') - \mathbf{P}_1(\mathbf{r}')] \cdot \vec{\mathbf{v}}'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} (\mathbf{r}' - \mathbf{r})\, ds, \tag{2.98}$$

gde su oznake $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$, $P(\mathbf{r}')$, $d^3\mathbf{r}'$ uvedene radi konciznosti i njihov smisao je očevidan na osnovu prethodnih razmatranja.

Za nalaženje solenoidalne komponente $\mathbf{S}(x_1, x_2, x_3)$ tražene vektorske funkcije polazimo od odgovarajućih jednačina sistema (2.90). Kako se iz tih jednačina i identiteta (2.75) vidi, može se pisati:

$$\mathbf{S} = \operatorname{rot} \mathbf{W}, \tag{2.99}$$

gde je $\mathbf{W} = \mathbf{W}(x_1, x_2, x_3)$ tzv. *vektorski potencijal* vektorske funkcije $\mathbf{S}$. Zbog identiteta (2.73) ovaj potencijal nije određen jednoznačno, već samo sa tačnošću do gradijenta proizvoljne skalarne funkcije. Zbog toga se može uvesti dopunski uslov:

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = 0, \tag{2.100}$$

kojim će onda vektorski potencijal biti jednoznačno određen. Pod tim uslovom imaćemo:

$$\operatorname{rot} \mathbf{S} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{W} = \mathbf{R}(x_1, x_2, x_3),$$

i na osnovu (2.76) i (2.100) dolazimo definitivno do jednačine:

$$\Delta \mathbf{W} = -\mathbf{R}(x_1, x_2, x_3). \tag{2.101}$$

To je jedna vektorska jednačina za određivanje vektorskog potencijala. Ona je ekvivalentna trima skalarnim Poisson-ovim jednačinama za W_1, W_2 i W_3, čije rešavanje ide na isti način kao i rešavanje jednačine (2.92), tako da ćemo ovde navesti samo rezultat:

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{\mathbf{R}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r} + \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{\vec{\mathbf{v}}' \times [\mathbf{S}_2(\mathbf{r}') - \mathbf{S}_1(\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} ds', \tag{2.102}$$

sa istim konciznim oznakama kao u (2.98). Za nalaženje solenoidalne komponente koristimo sada relaciju (2.99), vodeći i ovde računa o tome da se pri uzimanju rotora diferenciranje vrši po x_1, x_2, x_3 a integriranje se vrši po x_1', x_2', x_3', tako da se može izmeniti mesto integriranju i diferenciranju:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_G \operatorname{rot} \frac{\mathbf{R}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}' + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \operatorname{rot} \frac{\vec{\mathbf{v}}' \times [\mathbf{S}_2(\mathbf{r}') - \mathbf{S}_1(\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} ds'.$$

Na osnovu identiteta (2.51) i činjenice da od promenljivih po kojima se diferencira zavisi samo $|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^{-1}$, nalazimo definitivno:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_G \frac{\mathbf{R}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^3}\, d^3\mathbf{r} - \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \frac{\{\vec{\nu}'\times[\mathbf{S}_2(\mathbf{r}')-\mathbf{S}_1(\mathbf{r}')]\}\times(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^3}\, ds', \tag{2.103}$$

čime je postavljeni problem nalaženja vektorske funkcije koja zadovoljava jednačine (2.78) u potpunosti rešen.

ZADACI

2.1. Data je vektorska funkcija $\mathbf{A} = (x_1{}^2 - x_2,\ x_2{}^2 - x_3,\ x_3{}^2 - x_1)$. Formirati integrale:

$$\int_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}, \quad \int_L \mathbf{A}\times d\mathbf{l}, \quad \int_L \mathbf{A}\, dl,$$

i izračunati njihove vrednosti duž zavoja zavojnice $x_1 = a\cos\varphi$, $x_2 = a\sin\varphi$, $x_3 = b\varphi$ od $\varphi = 0$ do $\varphi = 2\pi$.

2.2. Za vektorsku funkciju $\mathbf{A} = (x_2 x_3,\ x_3 x_1,\ x_1 x_2)$ formirati i izračunati integrale:

$$\int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}, \quad \int_S \mathbf{A}\times d\mathbf{S}, \quad \int_S \mathbf{A}\, dS.$$

po gornjoj polovini $(x_3 > 0)$ sfere $x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = a^2$.

2.3. Pokazati da je $\operatorname{grad} U$ polarni vektor. U kom slučaju će $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ biti polarni vektor?

2.4. Naći $\operatorname{grad} U$, ako je (a) $U = \mathbf{A}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}$, (b) $U = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{r})\, r$, gde je $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ vektor položaja, a $\mathbf{A}$ neki konstantan vektor.

2.5. Data je skalarna funkcija $U = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{r}) + \mathbf{M}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{N})$, gde su $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ konstantni vektori. Naći $\operatorname{grad} U$ i ekviskalarne površine.

2.6. Ako je gustina nekog fluida ρ funkcija samo pritiska $p(x_1, x_2, x_3, t)$ i ako je:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)},$$

gde je p_0 neka konstanta, dokazati da je $\nabla\varphi = \frac{1}{\rho}\nabla p$.

2.7. Naći ∇r, $\nabla\vartheta$ i $\nabla\varphi$ ako su r, ϑ i φ sferne koordinate.

2.8. Neposrednim izračunavanjem pokazati da relacija $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{A}$ važi za svaki vektor $\mathbf{A}$, a relacija $(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{A} = \mathbf{A}$ važi samo ako je $\mathbf{A}$ linearna homogena funkcija vektora položaja $\mathbf{r}$.

2.9. Napisati eksplicitni izraz za vektorski diferencijalni operator $\mathbf{A}\times\nabla$ i pokazati da se on, u primenama na skalarne i vektorske funkcije, može izraziti pomoću standardnih diferencijalnih operatora (grad, div, rot i $\mathbf{A}\cdot\nabla$).

2.10. Dokazati da za operator $\mathbf{m} = \mathbf{r}\times\nabla$ važe sledeće operatorske relacije:

(a) $\mathbf{m}\times\mathbf{m} = -\mathbf{m}$,

(b) $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{m})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m}) - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}) = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\mathbf{m}$

ako su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ konstantni vektori.

2.11. Razviti i uprostiti sledeće izraze u kojima se Hamilton-ov operator pojavljuje dvaput:

(a) $[(\nabla\times\mathbf{A})\times\nabla]\times\mathbf{B}$, (b) $[(\nabla\times\mathbf{A})\times\nabla]\cdot\mathbf{B}$, (c) $[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})]\cdot\mathbf{B}$.

2.12. Ako su $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$ vektori položaja tačke $P(x_1, x_2, x_3)$ u odnosu na tačke $A(a_1, a_2, a_3)$ i $B(b_1, b_2, b_3)$, odrediti

$$\nabla\cdot(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2), \quad \nabla\times(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2), \quad \nabla\cdot(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2).$$

2.13. Data je vektorska funkcija

$$\mathbf{A} = x_1(x_1{}^2 + x_2{}^2)\,\mathbf{e}_1 + x_2(x_1{}^2 + x_2{}^2)\,\mathbf{e}_2.$$

(a) Izračunati $\operatorname{div}\mathbf{A}$ i $\operatorname{rot}\mathbf{A}$;

(b) Izračunati fluks ove vektorske funkcije kroz neku zatvorenu površinu i povezati ga sa momentom inercije tela ograničenog tom površinom.

2.14. Kod skalarne funkcije $\Phi(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, r_1, r_2, r_3, \ldots)$, mogu se definisati tzv. *parcijalni gradijenti*:

$$\nabla_{\vec{p}}\,\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\mathbf{e}_i, \quad \nabla_{\vec{q}}\,\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\mathbf{e}_i, \ldots,$$

koji se često obeležavaju i sa $\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{p}}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{q}}, \ldots$. Za skalarnu funkciju

$$Q = (\vec{\omega}\times\mathbf{r})^2 - (\vec{\omega}\cdot\mathbf{r})\, r^2$$

izračunati na osnovu gornje definicije $\frac{\partial Q}{\partial\vec{\omega}}$ i $\frac{\partial Q}{\partial\mathbf{r}}$.

2.15. Za vektorsku funkciju $\mathbf{A} = \mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2$, gde su $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$ vektori položaja dveju tačaka u prostoru izračunati vrednosti sledećih izraza:

(a) $\nabla_{\vec{r}_1}(\nabla_{\vec{r}_2}\cdot\mathbf{A}) - \nabla_{\vec{r}_2}(\nabla_{\vec{r}_1}\cdot\mathbf{A})$,

(b) $\nabla_{\vec{r}_1}\times(\nabla_{\vec{r}_2}\times\mathbf{A}) - \nabla_{\vec{r}_2}\times(\nabla_{\vec{r}_1}\times\mathbf{A})$,

(c) $\nabla_{\vec{r}_1}\cdot(\nabla_{\vec{r}_2}\times\mathbf{A}) - \nabla_{\vec{r}_2}\cdot(\nabla_{\vec{r}_1}\times\mathbf{A})$.

2.16. Dokazati tačnost sledećih relacija:

(a) $\operatorname{div}[\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\, r^n] = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\, r^n + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\, n r^{n-2}$,

(b) $\operatorname{rot}[\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\, r^n] = (\mathbf{b}\times\mathbf{a})\, r^n + (\mathbf{r}\times\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\, n r^{n-2}$,

gde je $\mathbf{r}$ vektor položaja, r njegov intenzitet, a $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ su dva konstantna vektora.

2.17. Proveriti tačnost sledećih obrazaca:

(a) $\operatorname{div}[(\mathbf{a}\times\mathbf{r})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})r^n]=[\mathbf{r}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})]r^n$,

(b) $\operatorname{rot}[(\mathbf{a}\times\mathbf{r})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})r^n]=(n+3)\,\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})r^n-\mathbf{r}\left[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+n\dfrac{(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^2}\right]r^n$,

ako $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{r}$ i r imaju isto značenje kao u prethodnom zadatku.

2.18. Ispitati tačnost jednačina:

(a) $\operatorname{div}[\mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})r^n]=(n+5)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})r^n$,

(b) $\operatorname{rot}[\mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})r^n]=(\mathbf{a}\times\mathbf{r})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})r^n+(\mathbf{b}\times\mathbf{r})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})r^n$,

gde opet $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{r}$ i r imaju isto značenje kao u prethodna dva zadatka.

2.19. Ako su vektorska funkcija $\mathbf{A}$ i njen rotor kolinearni, naći vrednost izraza $\Delta\mathbf{A}+\alpha^2\mathbf{A}$, gde je α faktor proporcionalnosti između $\mathbf{A}$ i $\operatorname{rot}\mathbf{A}$. Ako je on konstantan, pokazati da traženi izraz dovodi do tzv. Helmholtzove jednačine:

$$\Delta\mathbf{A}+\alpha^2\mathbf{A}=0.$$

2.20. Proveriti tačnost relacije:

$$\Delta f(\Phi)=\frac{df}{d\Phi}\Delta\Phi+\frac{d^2f}{d\Phi^2}(\operatorname{grad}\Phi)^2.$$

2.21. Dokazati tačnost obrasca:

$$\Delta(\Phi\psi)=\Phi\Delta\psi+\psi\Delta\Phi+2\operatorname{grad}\Phi\cdot\operatorname{grad}\psi.$$

2.22. Na krug čije su jednačine $x_1^2+x_2^2=a^2$ i $x_3=0$ „nategnute" su sledeće površi:

(a) cilindar $x_1^2+x_2^2=a^2$ zatvoren odozgo ravni $x_3=h$,

(b) konus sa vrhom u $(0,0,q)$ i datim krugom kao generatrisom,

(c) gornja polusfera poluprečnika a sa centrom u koordinatnom početku.

Izračunati u sva tri slučaja neposredno integral $\int_S d\mathbf{S}$ po ovim površinama i pokazati da je njegova vrednost nezavisna od izbora površi „nategnute" na zadani krug. Da li će ovo uvek važiti?

2.23. Izračunati $\oint_S(\mathbf{e}^3\times\mathbf{r})\times d\mathbf{S}$ po zatvorenoj površini koju obrazuju paraboloid $x_1^2+x_2^2=2px_3$ i ravan $x_3=h$.

2.24. Integrale:

$$\oint_S[(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}]\cdot d\mathbf{S},\quad \oint_S[(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}]\cdot d\mathbf{S}$$

transformisati u zapreminske, ukoliko je $\operatorname{rot}\mathbf{A}=0$, $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$.

2.25. Dokazati tačnost formula:

(a) $\int_S(\operatorname{grad}U_1\times\operatorname{grad}U_2)\cdot d\mathbf{S}=\oint_L U_1\,dU_2$,

(b) $\oint_S(U_1U_2\operatorname{grad}U_3)\cdot d\mathbf{S}=\int_V[U_1\operatorname{div}(U_2\operatorname{grad}U_3)+$

$+U_2(\operatorname{grad}U_1\cdot\operatorname{grad}U_3)]\,dV.$

2.26. Ako $\mathbf{A}$ vektorska funkcija koja definiše jedno potencijalno vektorsko polje, onda će $\mathbf{B}=\mathbf{a}\times\mathbf{A}$ gde je $\mathbf{a}$ konstantan vektor uvek predstavljati jedno solenoidalno polje. Dokazati. Da li analogo tvrđenje važi i za solenoidalna polja?

2.27. Ispitati prirodu vektorskih polja definisanih funkcijama:

(a) $\mathbf{A}=\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$,

(b) $\mathbf{A}=\dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{r}}{r^3}$,

ako je $\mathbf{r}$ vektor položaja, a $\mathbf{a}$ konstantan vektor. Ako se ispostavi da su ova polja čisto potencijalna ili čisto solenoidalna, naći odgovarajuće potencijale.

2.28. Ispitati prirodu sledećih vektorskih polja:

(a) $\mathbf{A}=\vec{\omega}\times\mathbf{r}$,

(b) $\mathbf{A}=(\vec{\omega}\times\mathbf{r})r$,

(c) $\mathbf{A}=(\vec{\omega}\times\mathbf{r})\times\vec{\omega}$,

gde je opet $\mathbf{r}$ vektor položaja a $\vec{\omega}$ jedan konstantan vektor. Ukoliko je neko od ovih polja čisto potencijalno ili čisto solenoidalno, naći odgovarajuće potencijale.

2.29. Pomoću dve poznate skalarne funkcije $\Phi(x_1,x_2,x_3)$ i $\psi(x_1,x_2,x_3)$ obrazovana je vektorska funkcija $\mathbf{A}=\operatorname{grad}\Phi\times\operatorname{grad}\psi$.

(a) Pokazati da je vektorsko polje $\mathbf{A}$ uvek solenoidalno i naći vektorski potencijal $\mathbf{W}$ tog polja, koji ima osobinu da je uvek ortogonalan na $\mathbf{A}$.

(b) Pokazati da su jednačine vektorskih linija ovog polja date jednačinama:

$$\Phi(x_1,x_2,x_3)=C_1,\quad \psi(x_1,x_2,x_3)=C_2,$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

2.30. Operacija kojom se uređenom paru vektora $\mathbf{A}=(A_1,A_2,A_3)$ i $\mathbf{B}=(B_1,B_2,B_3)$ pridružuje treći vektor $\mathbf{C}=(C_1,C_2,C_3)$ definisana je relacijama:

(a) $\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}=\mathbf{C}\Leftrightarrow C=(A_1B_2B_3,\ A_2B_3B_1,\ A_3B_1B_2)$,

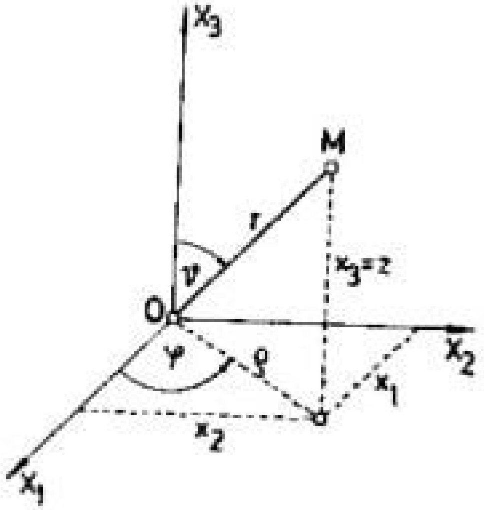
(b) $\mathbf{A}\circ\mathbf{B}=\mathbf{C}\Leftrightarrow C=\left(A_1B_1-\frac{1}{3}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B},\ A_2B_2-\frac{1}{3}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B},\ A_3B_3-\frac{1}{3}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)$.

Naći, na osnovu opšte definicije, prostorne izvode vektorske funkcije $\mathbf{Q}$ u odnosu na operacije $\bullet$ i $\circ$.

3. GENERALISANE KOORDINATE

3.1. GEOMETRIJA PROSTORA

Određivanje položaja tačke. U dosadašnjem izlaganju upotrebljavali smo samo Descartes-ov pravougli koordinatni sistem. Međutim, za određivanje položaja tačke u prostoru mogu se upotrebljavati i drugi koordinatni sistemi, na pr. cilindrični ili sferni. U svakom koordinatnom sistemu koordinate tačke predstavljaju skup triju veličina koje potpuno određuju njen položaj u prostoru. Tako je u pravouglom sistemu položaj tačke M (sl. 3.1) određen skupom (x_1, x_2, x_3), u cilindričnom sistemu skupom (ρ, φ, z), a u sfernom skupom (r, ϑ, φ).



Sl. 3.1

Generalisani koordinatni sistem. Navedene sisteme možemo generalisati na taj način što ćemo položaj tačke u prostoru određivati sa *tri ma kakve veličine koje potpuno određuju njen položaj* i označimo ih sa q_1, q_2 i q_3. Tako uvedene veličine nazivaju se *generalisane* (ili *krivolinijske*) *koordinate tačke*, a odgovarajući sistem *generalisani koordinatni sistem*.

Neka su veze između pravouglih i generalisanih koordinata jedne iste tačke oblika

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{3.1}$$

i pretpostavimo da se one mogu rešiti po generalisanim koordinatama

$$q_i = q_i(x_1, x_2, x_3),$$

tj. da odgovarajući jakobijan nije identički jednak nuli

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right| \neq 0. \tag{3.2}$$

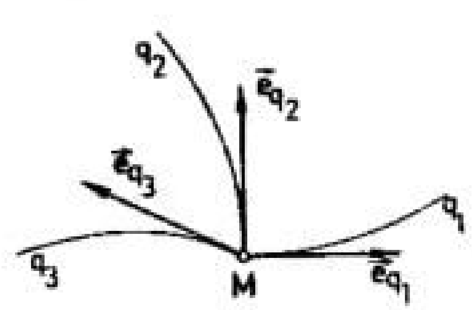
Tada možemo uvesti koordinatne površi, linije i ose na sledeći način. Geometrijsko mesto tačaka kod kojih je jedna generalisana koordinata konstantna, dok se druge dve mogu menjati na proizvoljan način naziva se *koordinatna površ*. Takvih površi ima tri familije, i njihove su jednačine

$$q_i(x_1, x_2, x_3) = \text{const} \tag{3.3}$$

Presek dveju koordinatnih površi naziva se *koordinatna linija* i duž nje su dve generalisane koordinate konstantne, a samo se jedna menja na proizvoljan način. Takvih linija ima takođe tri, na pr. jednačine koordinatne linije duž koje se menja samo q_1 su

$$q_2(x_1, x_2, x_3) = \text{const}, \qquad q_3(x_1, x_2, x_3) = \text{const}.$$

Kroz svaku tačku u prostoru mogu se povući tri koordinatne površi i tri koordinatne linije (sl. 3.2). Tangente povučene na koordinatne linije u posmatranoj tački predstavljaju lokalne koordinatne ose. Usmerimo ove ose u smeru rašćenja odgovarajućih generalisanih koordinata i označimo njihove jedinične vektore sa $\mathbf{e}_{q1}, \mathbf{e}_{q2}, \mathbf{e}_{q3}$. Pri tome na pr. $\mathbf{e}_{q1}$ predstavlja jedinični vektor tangente na koordinatnu liniju duž koje se menja samo q_1. Ako su ove tri koordinatne ose međusobno normalne u svakoj tački M, za takav koordinatni sistem kažemo da je *ortogonalan*, a u protivnom slučaju *loksogonalan*.



Sl. 3.2

U slučaju određivanja položaja tačke u ravni dovoljne su dve generalisane koordinate q_1 i q_2. Tada imamo samo dve koordinatne linije, duž kojih se menjaju q_1 odnosno q_2 i odgovarajuće dve koordinatne ose.

Metrička forma. Osnovnu geometrijsku karakteristiku koordinatnog sistema daje nam kvadrat elementa luka. Pošto je $ds = |d\mathbf{r}|$, odgovarajući analitički izraz možemo naći polazeći od vektora položaja u generalisanim koordinatama

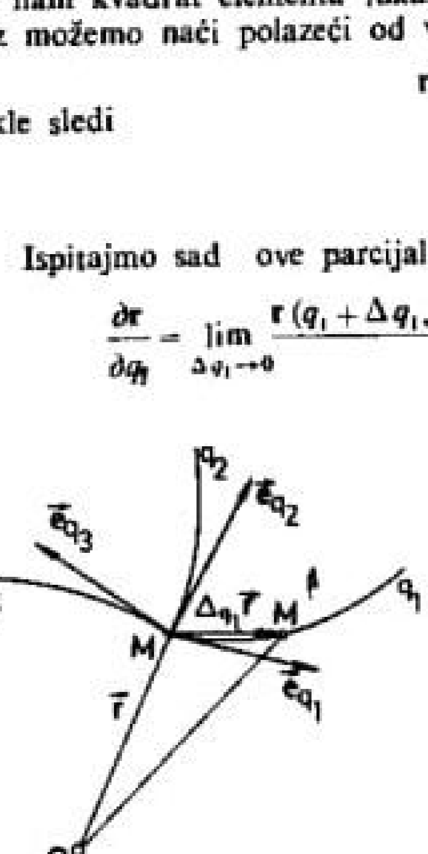
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3),$$

odakle sledi

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i. \tag{3.4}$$

Ispitajmo sad ove parcijalne izvode i posmatrajmo na pr. prvi od njih

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = \lim_{\Delta q_1 \to 0} \frac{\mathbf{r}(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) - \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)}{\Delta q_1} = \lim_{\Delta q_1 \to 0} \frac{\Delta_{q_1}\mathbf{r}}{\Delta q_1}.$$



Sl. 3.3

Kad Δq_1 teži nuli, tačka M' (sl. 3.3) teži tački M, a $\Delta_{q_1}\mathbf{r}$ teži da zauzme pravac i smer jediničnog vektora $\mathbf{e}_{q1}$. Analogi zaključak može se izvesti i za ostala dva parcijalna izvoda, tako da uopšte važi

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} = h_\alpha \mathbf{e}_{q\alpha}, \quad h_\alpha = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha}\right|, \tag{3.5}$$

$$(\alpha = 1, 2, 3).$$

Ovde smo upotrebili grčki indeks da bismo u skladu sa uvedenom sumacionom konvencijom, istakli da ovde ne treba vršiti sumiranje po tom indeksu. Komponente ovih vektora dobićemo diferenciranjem vektora položaja, izraženog u Descartes-ovim koordinatama

$$\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$$

po q_α

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\mathbf{e}_i,$$

odakle vidimo da je

$$h_\alpha=\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha}\right|=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\right)^2}. \tag{3.6}$$

Tako definisani koeficijenti h_α nazivaju se *Lamé-ovi koeficijenti* i oni su potpuno određeni relacijama (3.1).

Na osnovu (3.5) izraz (3.4) dobija oblik

$$d\mathbf{r}=\sum_{i=1}^{3} h_i \mathbf{e}_{qi} dq_i, \tag{3.7}$$

gde smo eksplicitno istakli sumiranje, jer se isti indeks tri puta pojavljuje. Ova formula izražava elementarnu promenu vektora položaja razloženu duž koordinatnih osa posmatranog sistema. Imajući u vidu da je $ds=|d\mathbf{r}|$, kvadrat elementa luka može se napisati u obliku

$$ds^2=d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}=\sum_i h_i\mathbf{e}_{qi}dq_i\cdot\sum_k h_k\mathbf{e}_{qk}dq_k,$$

te dobijamo

$$ds^2=\sum_i\sum_k h_i h_k(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k)\,dq_i\,dq_k. \tag{3.8}$$

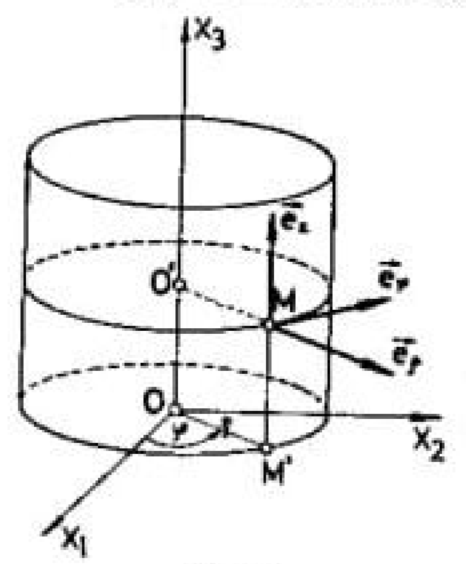
Ovaj izraz za kvadrat elementa luka naziva se *metrička forma* i ona karakteriše posmatrani generalisani koordinatni sistem.

Ako je sistem *ortogonalan*, svi skalarni proizvodi jediničnih vektora $\mathbf{e}_{qi}\cdot\mathbf{e}_{qk}$ sa različitim indeksima biće jednaki nuli. U tom slučaju metrička forma svodi se na zbir čisto kvadratnih članova

$$ds^2=\sum_i h_i^2\,dq_i^2, \tag{3.9}$$

što je bitna karakteristika ortogonalnih sistema. Odavde vidimo da se kod ovakvih sistema, koji se najčešće koriste u praksi, element luka ds može smatrati dijagonalom elementarnog krivolinijskog paralelepipeda sa međusobno normalnim ivicama dužine

$$ds_\alpha=h_\alpha dq_\alpha \qquad (\alpha=1,2,3) \tag{3.10}$$



Sl. 3.4

Odgovarajući Lamé-ovi koeficijenti mogu se tada odrediti bilo geometrijski iz navedenog elementa zapremine bilo analitički transformacijom metričke forme iz pravouglih u odgovarajuće koordinate.

Cilindrični sistem. U ovom sistemu položaj ma koje tačke M određen je skupom (ρ, φ, z), prikazanim na sl. 3.4. Veza između pravouglih i cilindričnih koordinata data je obrascima

$$x_1=\rho\cos\varphi,\qquad x_2=\rho\sin\varphi,\qquad x_3=z. \tag{3.11}$$

Ovde imamo sledeće koordinatne površi: $\rho=\text{const}$ predstavlja kružni cilindar poluprečnika ρ sa osom Ox_3, $\varphi=\text{const.}$ ravan kroz osu Ox_3 i tačku M, a $z=\text{const.}$ ravan paralelnu x_1Ox_2 ravni na rastojanju z. Koordinatne linije za ovaj sistem su sledeće: za koordinatu ρ prava kroz tačku M normalna na osi $0x_3$, za φ krug poluprečnika ρ sa centrom u tački O' paralelan X_1OX_2 ravni, a za z prava kroz tačku M paralelna osi OX_3. Sa slike neposredno vidimo da su jedinični vektori $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$ i $\mathbf{e}_z$ međusobno normalni, te je ovaj sistem *ortogonalan*.

Da bismo našli metričku formu, pođimo od izraza (3.9) u pravouglim koordinatama

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2$$

i transformišimo ga prema obrascima (3.11). Tako imamo

$$dx_1=\cos\varphi\,d\rho-\rho\sin\varphi\,d\varphi,\qquad dx_2=\sin\varphi\,d\rho+\rho\cos\varphi\,d\varphi,\qquad dx_3=dz, \tag{3.12}$$

a odavde kvadriranjem i sabiranjem dobijamo

$$ds^2=d\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\rho^2d\varphi^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+dz^2,$$

tj.

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2d\varphi^2+dz^2. \tag{3.13}$$

Poređenjem sa obrascem (3.9) neposredno nalazimo i vrednosti odgovarajućih Lamé-ovih koeficijenata

$$h_\rho=1,\quad h_\varphi=\rho,\quad h_z=1 \tag{3.14}$$

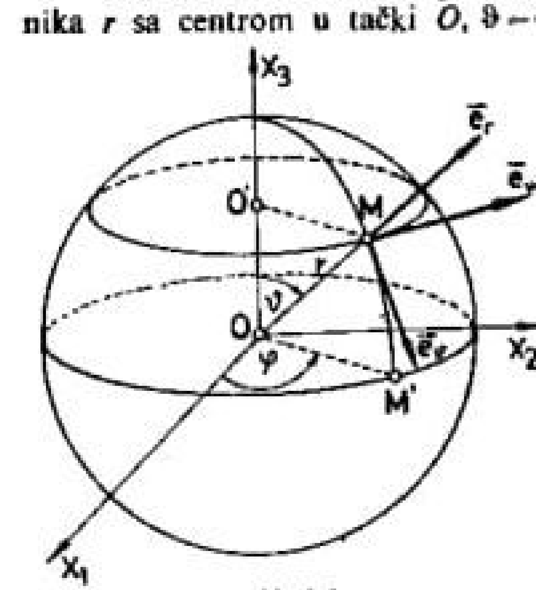
Polarni sistem u ravni može se shvatiti kao specijalan slučaj cilindričnog sistema kod koga je $z=0$, te je $\rho=r$, pa se izraz (3.13) svodi na

$$ds^2=dr^2+r^2d\varphi^2 \tag{3.15}$$

Sferni sistem. Ovde se položaj tačke M određuje skupom (r, ϑ, φ) (sl. 3.5. Pošto je $OM'=r\sin\vartheta$, pravougle i sferne koordinate vezane su relacijama

$$x_1=r\sin\vartheta\cos\varphi,\qquad x_2=r\sin\vartheta\sin\varphi,\qquad x_3=r\cos\vartheta. \tag{3.16}$$

Ovde su koordinatne površi sledeće: $r=\text{const}$ predstavlja sferu poluprečnika r sa centrom u tački O, $\vartheta=\text{const.}$ konus otvora ϑ sa temenom u tački O, a $\varphi=\text{const.}$ ravan kroz osu OX_3 i tačku M. Koordinatne linije biće: za koordinatu r prava kroz tačke O i M, za ϑ krug poluprečnika r sa centrom u tački O u ravni X_3OM, a za φ krug poluprečnika $O'M$ sa centrom u tački O' paralelan X_1OX_2 ravni. Prema slici vidimo da je ovaj sistem takođe *ortogonalan*.



Sl. 3.5

Radi nalaženja metričke forme pođimo opet od izraza

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2$$

i transformišimo ga na osnovu obrazaca (3.16)

$$dx_1 = \sin\vartheta\cos\varphi\, dr + r\cos\vartheta\cos\varphi\cos d\vartheta - r\sin\vartheta\sin\varphi\, d\varphi,$$
$$dx_2 = \sin\vartheta\sin\varphi\, dr + r\cos\vartheta\sin\varphi\, d\vartheta + r\sin\vartheta\cos\varphi\, d\varphi, \tag{3.17}$$
$$dx_3 = \cos\vartheta\, dr - r\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Odavde kvadriranjem i sabiranjem dobijamo

$$ds^2 = \sin^2\vartheta\, dr^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\vartheta\, dr^2 + r^2\cos^2\vartheta\, d\vartheta^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\sin^2\vartheta\, d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi),$$

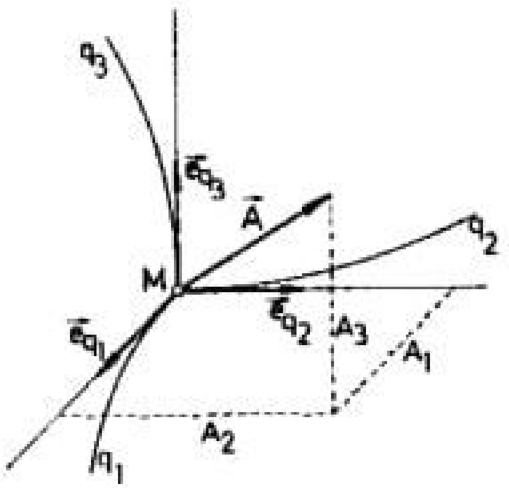
a posle sređivanja

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2. \tag{3.18}$$

Iz ovog izraza i obrasca (3.9) zaključujemo da su vrednosti odgovarajućih Lamé-ovih koeficijenata u ovom slučaju

$$h_r = 1, \quad h_\vartheta = r, \quad h_\varphi = r\sin\vartheta \tag{3.19}$$

3.2. VEKTORI U GENERALISANIM KOORDINATAMA



Sl. 3.6

Operacije sa vektorima. Pošto loksogonalne generalisane sisteme nećemo koristiti u okviru ovog kursa Teorijske fizike, u daljem izlaganju pretpostavljaćemo stalno da je *posmatrani sistem ortogonalan*. Uzmimo vektor $\mathbf{A}$ sa početkom u tački M (sl. 3.6) i formirajmo u toj tački trijedar odgovarajućih koordinatnih osa. Vektor $\mathbf{A}$ se može razložiti na komponentne vektore duž ovih osa

$$\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}_{q_i}, \tag{3.20}$$

čime dobijamo formalno isti obrazac kao za pravougli koordinatni sistem. Skup jediničnih vektora $\mathbf{e}_{qi}$, po kojima se može razložiti bilo koji vektor $\mathbf{A}$, predstavlja *bazis prostora*, a veličine A_i su *komponente vektora* $\mathbf{A}$ u odnosu na ovaj bazis.

Sve operacije vektorske algebre možemo izraziti i u generalisanim koordinatama. Na primer za skalarni proizvod na isti način kao i ranije dobijamo

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_i B_k (\mathbf{e}_{qi}\cdot\mathbf{e}_{qk}),$$

a pošto smo pretpostavili da je sistem ortogonalan, biće $\mathbf{e}_{qi}\cdot\mathbf{e}_{qk} = \delta_{ik}$, pa se prethodni izraz svodi na

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_i B_i, \tag{3.21}$$

što se poklapa sa obrascem (1.28). Tim putem možemo doći do zaključka da *sve formule vektorske algebre u ma kakvom ortogonalnom sistemu imaju isti oblik kao i u Descartes-ovom pravouglom*. Međutim, napomenimo da ovaj zaključak ne važi i za loksogonalne sisteme.

Na sličan način možemo tretirati i vektorsku analizu u generalisanim koordinatama. Tako ćemo na pr. skalarno polje definisati izvesnom funkcijom generalisanih koordinata

$$\Phi = \Phi(q_1, q_2, q_3), \tag{3.22}$$

međutim, u operacijama diferenciranja u generalisanim ortogonalnim sistemima javljaju se izvesne *razlike u odnosu na Descartes-ov pravougli sistem*. U ispitivanju tih razlika zadržaćemo se samo na prostornim izvodima i potražićemo njihove analitičke izraze u generalisanim koordinatama.

Gradijent skalara. Da bismo našli gradijent nekog skalara Φ, podimo od njegove definicije (2.19) i obrasca (2.20)

$$\operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathbf{n}_0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial l} = \operatorname{grad}\Phi\cdot\mathbf{l}_0, \tag{3.23}$$

koji su nezavisni od koordinatnog sistema. Ako ovaj poslednji obrazac primenimo na izvod po luku s_i jedne od koordinatnih osa, imaćemo

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s_i} = |\operatorname{grad}\Phi|\cos(\mathbf{n}_0, \mathbf{e}_{qi}),$$

a to je odgovarajuća komponenta gradijenta

$$(\operatorname{grad}\Phi)_i = \frac{\partial\Phi}{\partial s_i} \tag{3.24}$$

Desna strana može se transformisati, na osnovu (3.10)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s_\alpha} = \frac{\partial\Phi}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{ds_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial\Phi}{\partial q_\alpha}$$

za svaku fiksiranu vrednost indeksa α, pa komponente gradijenta u generalisanim koordinatama imaju oblik

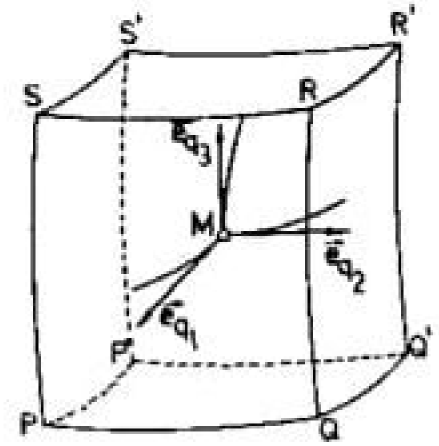
$$(\operatorname{grad}\Phi)_\alpha = \frac{1}{h_\alpha}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{3.25}$$

a sam gradijent biće

$$\operatorname{grad}\Phi = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{h_i}\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\mathbf{e}_{qi} \tag{3.26}$$

Divergencija vektora. Potražimo analitički oblik divergencije, koja je definisana obrascem (2.31)

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_{\Delta S}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \tag{3.27}$$



Sl. 37

i primenimo isti postupak kao u pravouglim koordinatama. Za element zapremine ΔV uzmimo elementarni krivolinijski paralelepiped oko tačke M kao centra (sl. 3.7) sa ivicama $h_\alpha dq_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) paralelnim koordinatnim linijama. Fluks vektora $\mathbf{A}$ kroz površ $PQRS$ iznosi

$$d\Phi_1 = (A_1 ds_2 ds_3)_{PQRS} \approx (h_2 h_3 A_1)_{q_1+\frac{1}{2}dq_1}\cdot dq_2\, dq_3,$$

pri čemu smo označili samo one nezavisno promenljive koje se u posmatranom slučaju menjaju. Vrednost funkcije u zagradi možemo približno naći njenim razvijanjem u Taylor-ov red u tački M, imajući u vidu da su ovde i Lamé-ovi koeficijenti h_i funkcije položaja:

$$d\Phi_1 = \left[(h_2 h_3 A_1)_M + \frac{1}{2}\, dq_1 \frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 A_1)\right] dq_2\, dq_3. \tag{3.28}$$

Fluks kroz naspramnu površ $P'Q'R'S'$ biće

$$d\Phi_2 = -(h_2h_3A_1)_{q_1-\frac{1}{2}dq_1}\cdot dq_2dq_3 = -\left[(h_2h_3A_1)_M - \frac{1}{2}dq_1\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3A_1)\right]dq_2dq_3,$$

što zajedno daje
$$d\Phi_1 + d\Phi_2 = \frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3A_1)\,dq_1\,dq_2\,dq_3.$$

Ako se na sličan način izračuna i fluks kroz ostale naspramne površi, nalazimo

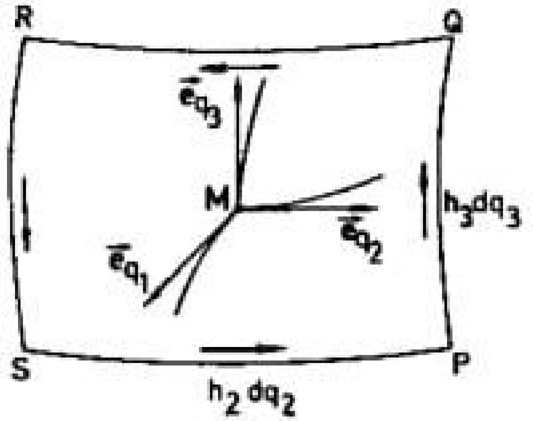
$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3h_1A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2A_3)\right]dq_1dq_2dq_3. \quad (3.29)$$

Pošto je zapremina posmatranog krivolinijskog paralelepipeda

$$dV = ds_1\,ds_2\,ds_3 = h_1h_2h_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3,$$

prema obrascu (3.27) dobija se

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_i}A_i\right) \quad (3.30)$$



Sl. 3.7

Rotor vektora. Da bismo našli analitički oblik rotora, pođimo od njegove definicije (2.37)

$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})_n = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{\Delta L}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad (3.31)$$

i primenimo opet analog postupak. Za konturu ΔL uzmimo elementarni krivolinijski pravougaonik oko tačke M kao centra (sl. 3.8), sa ivicama h_2dq_2 i h_3dq_3 paralelnim koordinatnim linijama u tangentnoj ravni na koordinatnu površ $q_1 = \text{const}$. Sa naznačenom orijentacijom konture cirkulacija vektora $\mathbf{A}$ duž PQ biće

$$d\Gamma_1 = (A_3ds_3)_{PQ} \approx (h_3A_3)_{q_2+\frac{1}{2}dq_2}\cdot dq_3,$$

a njena približna vrednost može se naći razvijanjem u Taylor-ov red

$$d\Gamma_1 = \left[(h_3A_3)_M + \frac{1}{2}dq_2\cdot\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3A_3)\right]dq_3. \quad (3.32)$$

Cirkulacija duž suprotne strane RS tada će biti

$$d\Gamma_2 = -(h_3A_3)_{q_2-\frac{1}{2}dq_2}\cdot dq_3 = -\left[(h_3A_3)_M - \frac{1}{2}dq_2\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3A_3)\right]dq_3$$

odakle sledi

$$d\Gamma_1 + d\Gamma_2 = \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3A_3)\,dq_2\,dq_3.$$

Na sličan način može se naći i cirkulacija duž drugih dveju strana

$$-\frac{\partial}{\partial q_3}(h_2A_2)\,dq_2\,dq_3,$$

pa je ukupna cirkulacija

$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3A_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2A_2)\right]dq_2dq_3. \quad (3.33)$$

Pošto je ovde obuhvaćena površina

$$dS_1 = ds_2\,ds_3 = h_2h_3\,dq_2\,dq_3,$$

a posmatranoj površi $PQRS$ odgovara komponenta rotora u pravcu jediničnog vektora $\mathbf{e}_{q_1}$, prema obrascu (3.31) dobićemo

$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})_1 = \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3A_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2A_2)\right]. \quad (3.34)$$

Ostale komponente rotora možemo naći cikličnom permutacijom:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})_2 = \frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1A_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(h_3A_3)\right],$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})_3 = \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2A_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1A_1)\right].$$

Odavde se dobija i sam rotor, koji se konciznije može napisati u obliku simboličke determinante

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_{q_1} & h_2\mathbf{e}_{q_2} & h_3\mathbf{e}_{q_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}. \quad (3.35)$$

Laplace-ov operator. Na osnovu gornjih rezultata neposredno se može dobiti i Laplace-ov operator skalarne funkcije u generalisanim koordinatama. Pošto je prema (2.69)

$$\Delta\Phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi,$$

obrazac (3.30) nam daje

$$\Delta\Phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{h_1h_2h_3}{h_i}(\operatorname{grad}\Phi)_i\right],$$

pa na osnovu (3.25) dobijamo

$$\Delta\Phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_i^2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\right) \quad (3.36)$$

Prostorni izvodi u cilindričnom i sfernom sistemu. Primenimo sad ove rezultate na cilindrični i sferni sistem, označavajući indeksom odgovarajuću generalisanu koordinatu. Za cilindrični sistem, s obzirom na vrednosti Lamé-ovih koeficijenata (3.14) imamo

$$(\operatorname{grad}\Phi)_\rho = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho},\quad (\operatorname{grad}\Phi)_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi},\quad (\operatorname{grad}\Phi)_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z}; \quad (3.37)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}; \tag{3.38}$$

$$\left.\begin{aligned}(\operatorname{rot}\mathbf{A})_\rho&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z},\\ (\operatorname{rot}\mathbf{A})_\varphi&=\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho},\\ (\operatorname{rot}\mathbf{A})_z&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi};\end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

$$\Delta\Phi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}. \tag{3.40}$$

Za sferni sistem, za koji su Lamé-ovi koeficijenti određeni obrascima (3.19), na sličan način dobijamo

$$(\operatorname{grad}\Phi)_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r},\quad(\operatorname{grad}\Phi)_\vartheta=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta},\quad(\operatorname{grad}\Phi)_\varphi=\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}; \tag{3.41}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta\cdot A_\vartheta)}{\partial\vartheta}+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}; \tag{3.42}$$

$$\left.\begin{aligned}(\operatorname{rot}\mathbf{A})_r&=\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta\,A_\varphi)}{\partial\vartheta}-\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi},\\ (\operatorname{rot}\mathbf{A})_\vartheta&=\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r},\\ (\operatorname{rot}\mathbf{A})_\varphi&=\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\vartheta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta};\end{aligned}\right\} \tag{3.43}$$

$$\Delta\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}. \tag{3.44}$$

ZADACI

3.1. Izraziti jedinične vektore $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ cilindričnih koordinata ρ, φ, z pomoću jediničnih vektora $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ pravouglih koordinata i pokazati da važe relacije:

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\rho}{\partial\varphi}=\mathbf{e}_\varphi,\quad\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\varphi}=-\mathbf{e}_\rho,\quad\frac{\partial\mathbf{e}_z}{\partial\varphi}=0.$$

3.2. Vektorska funkcija data je u cilindričnim koordinatama izrazom:

$$\mathbf{B}=B(\rho)\,\mathbf{e}_\varphi.$$

Izračunati $\operatorname{rot}[(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}]$.

3.3. Za vektorsku funkciju zadanu u cilindričnim koordinatama relacijom:

$$\mathbf{V}(\rho,\varphi)=V_\rho(\rho,\varphi)\,\mathbf{e}_\rho+V_\varphi(\rho,\varphi)\,\mathbf{e}_\varphi$$

pokazati da $\operatorname{rot}\mathbf{V}$ ima samo z-komponentu.

3.4. Izraziti jedinične vektore $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\varphi$ sfernih koordinata r, ϑ, φ pomoću jediničnih vektora pravouglih koordinata i pokazati da je:

$$\frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial\vartheta}=\mathbf{e}_\vartheta,\quad\frac{\partial\mathbf{e}_\vartheta}{\partial\vartheta}=-\mathbf{e}_r,\quad\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\vartheta}=0,$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial\varphi}=\mathbf{e}_\varphi\sin\vartheta,\quad\frac{\partial\mathbf{e}_\vartheta}{\partial\varphi}=\mathbf{e}_\varphi\cos\vartheta,\quad\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\varphi}=-\mathbf{e}_r\sin\vartheta-\mathbf{e}_\vartheta\cos\vartheta.$$

3.5. Naći izraze za $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial}{\partial x_3}$ u sfernim koordinatama i na osnovu dobijenih rezultata pokazati da je:

$$x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

3.6. U sfernim koordinatama je zadana skalarna funkcija $\Phi(r)$ koja zavisi samo od r. Pokazati da se $\Delta\Phi$ može napisati u tri ekvivalentna oblika:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right);\quad\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\Phi);\quad\frac{d^2\Phi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr}.$$

3.7. Rešiti jednačine:

(a) $\Delta\Phi=0$, (b) $\Delta\Phi=\pm k^2\Phi$,

gde je k realna konstanta, a funkcija Φ zavisi samo od r u sfernim koordinatama.

3.8. Pokazati da važi jednačina:

$$\Delta[\Delta(r^2\Phi)]=0,$$

ukoliko $\Phi=\Phi(r,\vartheta,\varphi)$ zadovoljava jednačinu $\Delta\Phi=0$.

3.9. Da li su relacijama:

(a) $x_1=\dfrac{a\,\operatorname{sh}u}{\operatorname{ch}u+\cos v}$, $x_2=\dfrac{a\sin v}{\operatorname{ch}u+\cos v}$;

(b) $x_1=a\operatorname{ch}u\cos v$, $x_2=a\operatorname{sh}u\sin v$;

definisane generalisane koordinate u, v? Ako jesu, ispitati u oba slučaja koordinatne linije, naći metričku formu i izraziti jedinične vektore $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$ pomoću jediničnih vektora $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ Descartes-ovih koordinata u ravni.

3.10. U tzv. bipolarnim cilindričnim koordinatama, koje se dobijaju ako se obrascima iz dela (a) prethodnog zadatka doda $x_3=z$, napisati $\operatorname{grad}\Phi$, $\operatorname{div}\mathbf{A}$, $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ i $\Delta\Phi$.

3.11. U tzv. eliptičkim cilindričnim koordinatama, koje se dobijaju ako se obrascima iz dela (b) zadatka 3.9. doda $x_3 = z$, dat je vektorski potencijal **W** nekog solenoidalnog polja **S** izrazom:

$$\mathbf{W} = (\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 v)^{-1} \mathbf{e}_v.$$

Naći **S** i rot rot **S**.

3.12. Da li su generalisane koordinate u, v, φ definisane relacijama (tzv. paraboličke koordinate):

$$x_1 = uv\cos\varphi, \quad x_2 = uv\sin\varphi, \quad x_3 = \frac{1}{2}(u^2 - v^2),$$

ortogonalne? Ispitati njihove koordinatne površine, naći metričku formu i izraziti jedinične vektore $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{e}_\varphi$ pomoću jediničnih vektora Descartes-ovog koordinatnog sistema.

3.13. Napisati opšti izraz za $\Delta\Phi$ u paraboličkim koordinatama, i rešiti jednačinu $\Delta\Phi = 0$ ako je $\Phi = \Phi(v)$.

3.14. Pokazati da se parcijalna diferencijalna jednačina:

$$|\nabla W|^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} + \beta x_3 = 0,$$

u kojoj je W nepoznata skalarna funkcija, a α i β su dve konstante, nakon prelaska u paraboličke koordinate može rešiti metodom razdvajanja promenljivih, tj. stavljajući:

$$W(u, v, \varphi) = U(u) + V(v) + \Phi(\varphi).$$

3.15. Koristeći vektorski identitet (2.76) napisati projekcije vektorske Laplace-ove jednačine:

$$\Delta \mathbf{A} = 0$$

na ose koordinatnog trijedra (a) sfernih, (b) cilindričnih, (c) bipolarnih cilindričnih, (d) eliptičkih cilindričnih i (e) paraboličkih koordinata.

DRUGI DEO

TENZORI U TRODIMENZIONOM EUKLIDOVOM PROSTORU

4. TENZORI KAO OPERATORI

4. 1. OSNOVNI POJMOVI

Pojam tenzora. U mnogim oblastima fizike, naročito u mehanici neprekidnih sredina, elektrodinamici i optici kristala, često je potrebno svakom pravcu (svakom vektoru) u jednoj određenoj tački prostora pridružiti neki vektor koji u opštem slučaju nije kolinearan s tim pravcem. Kao primer možemo navesti Ohm-ov zakon, koji u uobičajenom obliku glasi:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

gde je $\mathbf{j}$ gustina struje, $\mathbf{E}$ električno polje a σ je električna provodnost date materijalne sredine. Ako je ta sredina izotropna, vektori $\mathbf{j}$ i $\mathbf{E}$ su kolinearni (struja uvek teče u pravcu primenjenog električnog polja), tako da iz gornje relacije sledi:

$$j_1 = \sigma E_1, \; j_2 = \sigma E_2, \; j_3 = \sigma E_3.$$

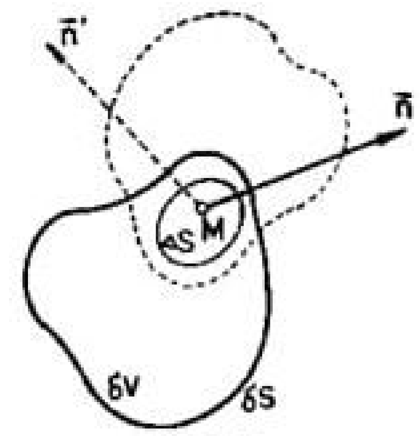
Međutim, ako se radi o anizotropnoj sredini, kao što je to slučaj kod mnogih kristala ili kod plazme u spoljašnjem magnetnom polju, komponenta j_i gustine struje u pravcu x_i-ose može zavisiti ne samo od komponenata E_i električnog polja u pravcu te ose, već i od njegovih komponenta u pravcu ostale dve ose, tako da će Ohm-ov zakon dobiti oblik:

$$j_1 = \sigma_{11} E_1 + \sigma_{12} E_2 + \sigma_{13} E_3,$$
$$j_2 = \sigma_{21} E_1 + \sigma_{22} E_2 + \sigma_{23} E_3,$$
$$j_3 = \sigma_{31} E_1 + \sigma_{32} E_2 + \sigma_{33} E_3.$$

Ove relacije se konciznije mogu pisati na sledeći način:

$$j_i = \sigma_{ik} E_k,$$

ako se iskoristi sumaciona konvencija uvedena u Glavi 1. Kada su dva vektora $\mathbf{j}$ i $\mathbf{E}$ povezana relacijom oblika (4.1), kažemo da je *vektor* $\mathbf{j}$ *linearna vektorska funkcija vektora* $\mathbf{E}$.



Slika 4.1.

Kao drugi primer iz fizike, možemo razmotriti naponsko stanje elastične sredine. Neka je (slika 4.1.) δV zapremina jednog delića ove sredine, a δS površ koja taj delić omeđuje. Uočimo na toj površi tačku M i jedan element površine ΔS oko nje. Neka je $\mathbf{n}$ jedinični vektor normale na δS u tački M, a $\Delta \mathbf{F}$ neka je rezultanta

svih površinskih sila (sila interakcije uočenog delića sa susednim delićima) koje deluju na uočeni delić na delu ΔS njegove granične površi. Obrazujemo li količnik $\frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}$, dobićemo srednju gustinu površinskih sila na delu ΔS. U graničnom prelazu kad $\Delta S \to 0$ sažimajući se u tačku M, dobijamo *napon* u tački M:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}.$$

Ova granična vrednost zavisiće ne samo od položaja tačke M, već i od orijentacije normale **n**. Zaista, ako bismo uočili neki drugi delić takav da tačka M leži i na njegovoj graničnoj površi (na slici 4.1. prikazan tačkastom linijom), ali da je jedinični vektor normale na njoj **n**′, onda bi srednja sila njegove interakcije sa susednim delićima u gore opisanom graničnom prelazu težila, u opštem slučaju, nekoj drugoj graničnoj vrednosti **P**′. Dakle, u fiksiranoj tački M elastične sredine svakom pravcu (definisanom jediničnim vektorom **n**), pridružuje se određen vektor **P**. Eksperimentalno iskustvo pokazuje da kod većine elastičnih sredina zavisnost između **P** i **n** ima oblik linearne vektorske funkcije:

$$P_i = \nu_{ik}\, n_k, \tag{4.2}$$

slično zavisnosti **j** od **E** u prethodnom slučaju.

Kada se zavisnost između dva vektora može izraziti linearnom vektorskom funkcijom definisanom pomoću devet skalarnih koeficijenata (σ_{ik} odnosno ν_{ik} u navedenim primerima), kaže se da je tom linearnom vektorskom funkcijom definisan jedan *tenzor*. Tako, skup koeficijenata σ_{ik} predstavlja *tenzor provodnosti*, a ν_{ik} *tenzor napona*.

Matematička definicija tenzora. Stroga matematička definicija tenzora se može formulisati neposrednom generalizacijom osnovne osobine vektora izražene jednačinom (1.12), koju ćemo ovde radi daljih razmatranja prepisati u obliku:

$$A^{(\mu)} = \mathbf{A} \cdot \vec{\mu}_0 = A_i \cos(\vec{\mu}_0, \mathbf{e}_i). \tag{4.3}$$

Slično kao što se gornjom relacijom vektor definiše kao matematička veličina koja svakom pravcu (određenom jediničnim vektorom $\vec{\mu}_0$) pridružuje jedan *skalar* koji je linearana i homogena funkcija kosinusa pravca tog pravca, možemo definisati tenzor kao *matematičku veličinu koja svakom pravcu pridružuje jedan vektor koji je takođe linearna homogena funkcija kosinusa pravca tog pravca*. Dakle, relacijom:

$$\mathbf{T}^{(\mu)} = \mathcal{T} \cdot \vec{\mu}_0 = \mathbf{T}_i \cos(\vec{\mu}_0, \mathbf{e}_i) \tag{4.4}$$

analognom (4.3), definisan je *tenzor* $\mathcal{T}$. Za ovaj pojam se u literaturi koriste i nazivi *dijadik* ili *afinor*. U obema gornjim jednačinama je primenjena sumaciona konvencija (sumiranje po i). Skalari A_k u (4.3) odnosno vektori $\mathbf{T}_k$ u (4.4) su upravo oni koje vektor **A** odnosno tenzor $\mathcal{T}$ pridružuju pravcima koordinatnih osa, što je lako pokazati stavljanjem $\vec{\mu}_0 = \mathbf{e}_k$ u te dve jednačine. Slično kao što je jedan od načina zadavanja vektora **A** bio pomoću tri skalara (A_1, A_2, A_3), tenzor možemo zadati pomoću triju *koordinatnih vektora* i u tom smislu pisati:

$$\mathcal{T} = (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3). \tag{4.5}$$

Ako sa T_{ij} označimo j-tu komponentu i-tog koordinatnog vektora tenzora $\mathcal{T}$ ($T_{ij} = \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{e}_j$), možemo tenzor smatrati zadanim i sledećom kvadratnom šemom koeficijenata T_{ij}:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Uobičajeno je da se komponente vektora $\mathbf{T}_i$ pišu pri tom *u i-toj koloni*. U narednoj Glavi ćemo videti kakve prednosti pruža ovakva konvencija. Veličine T_{ij} zvaćemo *komponente* tenzora $\mathcal{T}$, kao što je uobičajeno u fizičkoj literaturi. U matematičkoj literaturi se najčešće koristi naziv *koordinate* tenzora.

Bilo bi, razume se, pogrešno reći da je tenzor uređena grupa od tri vektora oblika (4.5) ili uređena kvadratna šema od devet koeficijenata oblika (4.6), isto tako kao što nije ispravno reći da je vektor uređena grupa od tri skalara (1.1). Naime, to su samo *načini prikazivanja* ovih matematičkih veličina, dok je njihova prava priroda sadržana u definicionim relacijama (4.3) odnosno (4.4).

Priména tenzora na vektore. Pomnožimo jednačinu (4.4) nekim skalarom A i stavimo $A\vec{\mu}_0 = \mathbf{A}$. Tako da dolazimo do:

$$A\mathbf{T}^{(\mu)} = \mathcal{T} \cdot (A\vec{\mu}_0) = \mathcal{T} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{T}_i (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i),$$

što se uz izmenu oznake indeksa po kome se sumira i uz uvođenje oznake $A\mathbf{T}^{(\mu)} = \mathbf{B}$ može prepisati kao:

$$\mathbf{B} = \mathcal{T} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{T}_k (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{T}_k A_k. \tag{4.7}$$

Ako se ova jednačina projektuje na pravac x_i-ose (tj. i leva i desna strana pomnoži skalarno sa jediničnim vektorom $\mathbf{e}_i$), dobija se:

$$B_i = T_{ki} A_k. \tag{4.8}$$

Iz ove relacije se vidi da se *tenzor može shvatiti kao operator koji svakom vektoru* **A** *pridružuje neki drugi vektor* **B**, *pri čemu je vektor* **B** *linearna vektorska funkcija vektora* **A**, *tj. komponente vektora* **B** *su linearne homogene funkcije komponenata vektora* **A**. Odavde se jasno uočava veza između tenzora definisanog pomoću (4.4) i primera (4.1) i (4.2).

Transformacije (komponenata) tenzora pri rotaciji koordinatnih osa. Ako koordinatni sistem $OX_1X_2X_3$ rotacijom pređe u $OX_1'X_2'X_3'$, pri čemu su veze između starih i novih koordinata određene koeficijentima $\alpha_{jk} = \cos(\mathbf{e}_j', \mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_j' \cdot \mathbf{e}_k$ kojih zbog relacija (1.9) ima svega tri nezavisna, promeniće se i komponente T_{ij} tenzora $\mathcal{T}$. Zakon po kome se ova promena vrši proizilazi neposredno iz definicione relacije (4.4). Zaista, označimo li ovde indeks sumiranja u toj relaciji sa j i stavimo $\vec{\mu}_0 = \mathbf{e}_i'$, dobićemo vektor $\mathbf{T}_i'$ koji tenzor $\mathcal{T}$ pridružuje pravcu X_i'-ose:

$$\mathbf{T}_i' = \mathbf{T}_k \cos(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_k) = \alpha_{ik} \mathbf{T}_k. \tag{4.9}$$

Dobijena relacija se može interpretirati kao zakon transformacije vektora-komponenata tenzora $\mathcal{T}$. Predstavimo li u gornjoj jednačini vektor $\mathbf{T}_k$ kao $T_{kl}\mathbf{e}_l$ (sumiranje po l!) i projektujemo je na X_j'-osu (tj. pomnožimo je skalarno sa $\mathbf{e}_j'$), dobićemo:

$$T_{ij}' = \alpha_{ik} T_{kl}(\mathbf{e}_j' \cdot \mathbf{e}_l) = \alpha_{ik}\, \alpha_{jl}\, T_{kl}, \tag{4.10}$$

kao zakon transformacije komponenata tenzora $\mathcal{T}$ (sumiranje se vrši po dva indeksa koji se ponavljaju). Dobijene formule mogu poslužiti za alternativnu definiciju tenzora. *Tenzor u Descartes-ovom koordinatnom sistemu je skup od devet skalarnih veličina koje se pri rotaciji koordinatnog sistema transformišu prema* (4.10).

4.2. TENZORI I DIJADE

Dijadski proizvod dva vektora. Svakom uređenom paru vektora **A**, **B** može se pridružiti tzv. *dijadski proizvod*, koji ćemo označavati sa $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ i koji po definiciji ima sledeće osobine:

$$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \cdot \mathbf{C} \stackrel{d}{=} \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}),$$

$$\mathbf{C} \cdot \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \stackrel{d}{=} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\, \mathbf{B}. \tag{4.11}$$

Dijadski proizvod se kraće zove *dijada*, a prvi i drugi vektor dijade zovu se *antecedent* i *konsekvent* respektivno. Na osnovu definicione relacije (4.11) vidimo da pri množenju dijade nekim vektorom bilo s leve bilo s desne strane rezultat je vektor nastao množenjem skalarnog proizvoda tog vektora i bližeg vektora dijade sa preostalim vektorom dijade.

Ne ulazeći detaljnije u algebarska svojstva dijada, zapazimo da dijadski proizvod u opštem slučaju nije komutativan (komutativnost će postojati jedino ako su **A** i **B** kolinearni ili jedan od njih jednak nuli), ali da važi osobina asocijativnosti množenja skalarom:

$$\{\lambda \mathbf{A}, \mathbf{B}\} = \{\mathbf{A}, \lambda \mathbf{B}\} = \lambda \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}, \tag{4.12}$$

kao i osobina distributivnosti:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2, \mathbf{B}\} &= \{\mathbf{A}_1, \mathbf{B}\} + \{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}\}, \\ \{\mathbf{A}, \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\} &= \{\mathbf{A}, \mathbf{B}_1\} + \{\mathbf{A}, \mathbf{B}_2\} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Relacije (4.11) omogućuje da se dijada shvati kao operator koji skup svih vektora **C** preslikava u skup vektora kolinearnih vektora **A** (pri množenju s desne strane), odnosno vektoru **B** (pri množenju s leva). Štaviše, ako se ove relacije napišu eksplicitno,

$$\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = A_i \mathbf{e}_i (B_j C_j) = (A_i B_j C_j)\, \mathbf{e}_i,$$

sledi

$$D_i = (A_i B_j) C_j$$

(i analogno za $\mathbf{C} \cdot \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$), pa se neposredno vidi da su komponente vektora **D**, dobijenog pomenutim preslikavanjem pomoću dijade $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$, linearne homogene funkcije komponenata vektora **C** koji se preslikava. Drugim rečima, dijada ima tenzorski karakter. U tom se smislu dijada naziva i *linearni afinor*, operator

koji tačkama (vektorima) trodimenzionog prostora pridružuje tačke (vektore) jednodimenzionog prostora na fiksnom pravcu. Iz istog razloga se suma dve dijade, $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1\} + \{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2\}$, zove *planarni afinor*. Naime, ako ova suma deluje kao operator na proizvoljan vektor **C**, rezultat je:

$$(\{\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1\} + \{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2\}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{C}) + \mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{C}),$$

$$\mathbf{C} \cdot (\{\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1\} + \{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2\}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}_1)\, \mathbf{B}_1 + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}_2)\, \mathbf{B}_2,$$

tj. dobija se vektor koji leži u ravni određenoj vektorima $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$, odnosno $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$, bez obzira kakav je vektor **C** (osim ako su $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$, odnosno $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$, kolinearni, u kom slučaju gornja suma ponovo degeneriše u linearni afinor). Na osnovu analognog razmatranja možemo zaključiti takođe da će suma tri dijade, $\{\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1\} + \{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2\} + \{\mathbf{A}_3, \mathbf{B}_3\}$, biti *potpuni afinor*, tj. operator koji tačke trodimenzionog prostora preslikava u tačke isto tako trodimenzionog prostora (pod uslovom da $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ odnosno $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ nisu komplanarni).

Dijadska reprezentacija tenzora. Relacija (4.7) se na osnovu definicije dijade (4.11) može pisati kao:

$$\mathbf{B} = \mathcal{T} \cdot \mathbf{A} = \{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\} \cdot \mathbf{A},$$

odakle sledi da se tenzor $\mathcal{T}$ može prikazati kao suma tri dijade:

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\} \tag{4.14}$$

(po indeksu k se vrši sumiranje), u kojima su antecedenti koordinatni vektori tenzora, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ i $\mathbf{T}_3$, a konsekventi su korespondentni jedinični vektori koordinatnih osa. To je razlog zbog koga se tenzor zove i *dijadik*. Nije teško proveriti da važi relacija $\{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\} = \{\mathbf{T}_k', \mathbf{e}_k'\}$, tj. da tenzor $\mathcal{T}$ zadržava oblik (4.14) i nakon rotacije koordinatnih osa. Zaista,

$$\{\mathbf{T}_i', \mathbf{e}_i'\} = \{\alpha_{ik}\mathbf{T}_k, \alpha_{ij}\mathbf{e}_j\} = \alpha_{ik}\,\alpha_{ij}\{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_j\} = \delta_{kj}\{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_j\} = \{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\}, \tag{4.15}$$

što se i moglo očekivati. U gornjem dokazivanju iskorišćene su relacije (4.9) i (1.9), kao i osobine Kronecker-ovog simbola.

Ako u (4.14) stavimo $\mathbf{T}_k = T_{kl}\,\mathbf{e}_l$, pa iskoristimo osobine (4.12) i (4.13) dolazimo do jednačine:

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\} = T_{kl}\{\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_k\}, \tag{4.16}$$

kojom je tenzor $\mathcal{T}$ razložen po tzv. koordinatnim dijadama $\{\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_k\}$, što je analogno razlaganju (1.23) vektora po koordinatnim vektorima $\mathbf{e}_i$. Zapazimo da u toj sumi uz koordinatnu dijadu čiji je prvi indeks i a drugi k stoji T_{ki}.

Dijadska reprezentacija tenzora (4.14) omogućuje dokazivanje sledeće važne osobine asocijativnosti:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathcal{T}) \cdot \mathbf{B}. \tag{4.17}$$

Naime,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \cdot (\{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{T}_k(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{B})] = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_k)(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{B}) = \\ &= [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_k)\, \mathbf{e}_k] \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\}) \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \mathcal{T}) \cdot \mathbf{B}. \end{aligned}$$

U dokazivanju je, osim definicije dijadskog proizvoda (4.11), iskorišćena asocijativnost skalarnog proizvoda u odnosu na množenje skalarom, $\lambda(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) = (\lambda \mathbf{P}) \cdot \mathbf{Q}$.

Invarijante tenzora. Datom tenzoru $\mathcal{T}$ mogu se pridružiti izvesne veličine skalarne i vektorske veličine koje ostaju invarijantne pri rotaciji koordinatnog sistema, tj. pri transformacijama oblika (4.9) i (4.10), i koje se stoga zovu

invarijante tenzora $\mathcal{T}$. U ovom odeljku ćemo, polazeći od tenzora u obliku (4.14), navesti tri skalarne i jednu vektorsku invarijantu i pokazati da su to zaista invarijante,

Tako, *prva skalarna invarijanta* je suma skalarnih proizvoda vektora svake od triju dijada (4.14):

$$S_1 = \mathbf{T}_k \cdot \mathbf{e}_k = T_{kk} = T_{11} + T_{22} + T_{33} \tag{4.18}$$

i očevidno je jednaka sumi dijagonalnih elemenata šeme koeficijenata (4.6) i pridružene datom tenzoru. Često se ova invarijanta zove *trag tenzora* $\mathcal{T}$ i obeležava se sa $tr\mathcal{T}$. Dokaz da se radi zaista o invarijanti pri rotaciji koordinatnog sistema sledi iz (4.10) i (1.9):

$$S_1' = T_{ii}' = \alpha_{ij}\alpha_{ik} T_{jk} = \delta_{jk} T_{jk} = T_{kk} = S_1,$$

pri čemu je iskorišćena relacija (1.9) i osobina Kronecker-ovog simbola.

Pod *drugom skalarnom invarijantom* datog tenzora podrazumevaćemo sumu sledeća tri mešovita proizvoda:

$$S_2 = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3) + \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{T}_3 \times \mathbf{T}_1) + \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2). \tag{4.19}$$

Kako se lako vidi, ova skalarna veličina predstavlja sumu kofaktora dijagonalnih elemenata determinante koja odgovara šemi (4.6). Iskoristimo li simbol Levi-Civita definisan jednačinom (1.32), možemo konciznije pisati:

$$S_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T}_j \times \mathbf{T}_k). \tag{4.20}$$

Radi dokazivanja invarijantnosti ove veličine pri rotaciji koordinatnog sistema zapazimo najpre da se simbol Levi-Civita može prikazati u obliku $\varepsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i' \cdot (\mathbf{e}_j' \times \mathbf{e}_k')$, jer je zaista ovaj mešoviti proizvod jednak nuli kad god su bar dva vektora jednaka, a inače ima vrednost $+1$ ili -1 u zavisnosti od toga da li smo pri njegovom obrazovanju jedinične vektore $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ i $\mathbf{e}_3'$ uzeli u redosledu u kome oni čine desni ili levi trijedar. Pošto je $\mathbf{e}_i' = \alpha_{ij}\mathbf{e}_j$, gde su α_{ij} kosinusi pravca novih osa u odnosu na stare, dobijamo na osnovu (1.33) sledeći identitet:

$$\varepsilon_{ijk} = (\alpha_{ip}\mathbf{e}_p) \cdot [(\alpha_{jq}\mathbf{e}_q) \times (\alpha_{kr}\mathbf{e}_r)] = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\mathbf{e}_p \cdot (\mathbf{e}_q \times \mathbf{e}_r) = \varepsilon_{pqr}\alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}. \tag{4.21}$$

Pomnožimo li još ovu relaciju sa $\alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}$ i prosumiramo po indeksima koji se ponavljaju, dolazimo do:

$$\varepsilon_{ijk}\alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn} = \varepsilon_{pqr}\alpha_{ip}\alpha_{il}\alpha_{jq}\alpha_{jm}\alpha_{kr}\alpha_{kn} = \varepsilon_{pqr}\delta_{pl}\delta_{qm}\delta_{rn} = \varepsilon_{lmn}, \tag{4.22}$$

pri čemu su opet iskorišćene jednačine (1.9) i osobine Kronecker-ovog simbola. Na osnovu ovog rezultata iz (4.20) dobijamo:

$$\begin{aligned} S_2' &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i' \cdot (\mathbf{T}_j' \times \mathbf{T}_k') = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\alpha_{ip}\mathbf{e}_p) \cdot [(\alpha_{jq}\mathbf{T}_q) \times (\alpha_{kr}\mathbf{T}_r)] = \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\mathbf{e}_p \cdot (\mathbf{T}_q \times \mathbf{T}_r) = \frac{1}{2}\varepsilon_{pqr}\mathbf{e}_p \cdot (\mathbf{T}_q \times \mathbf{T}_r) = S_2, \end{aligned} \tag{4.23}$$

pri čemu su korišćene relacije (4.9). Invarijantnost izraza (4.20) je time dokazana.

Najzad, *treća skalarna invarijanta* je mešoviti proizvod koordinatnih vektora tenzora $\mathcal{T}$:

$$S_3 = \mathbf{T}_1 \cdot (\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3), \tag{4.24}$$

i, kako se lako vidi, jednaka je vrednosti determinante sastavljene prema šemi (4.6). Zbog toga se ova veličina često označava sa $\det\mathcal{T}$. Dokaz da je ta veličina zaista invarijanta proizilazi iz sledećeg razmatranja. Pošto je:

$$S_3' = \mathbf{T}_1' \cdot (\mathbf{T}_2' \times \mathbf{T}_3') = (\alpha_{1i}\mathbf{T}_i) \cdot [(\alpha_{2j}\mathbf{T}_j) \times (\alpha_{3k}\mathbf{T}_k)] = \alpha_{1i}\alpha_{2j}\alpha_{3k}\mathbf{T}_i \cdot (\mathbf{T}_j \times \mathbf{T}_k),$$

a očevidno možemo pisati $\mathbf{T}_i \cdot (\mathbf{T}_j \times \mathbf{T}_k) = \varepsilon_{ijk}\mathbf{T}_1(\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3)$, imaćemo.

$$S_3' = \varepsilon_{ijk}\alpha_{1i}\alpha_{2j}\alpha_{3k}\mathbf{T}_1 \cdot (\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3) = \mathbf{T}_1 \cdot (\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3) = S_3,$$

jer je, prema (4.21), $\varepsilon_{ijk}\alpha_{1i}\alpha_{2j}\alpha_{3k} = \varepsilon_{123} = +1$, čime je invarijantnost veličine S_3 dokazana.

Pod *vektorskom invarijantom tenzora* $\mathcal{T}$ podrazumevamo zbir vektorskih proizvoda vektora pojedinih dijada:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_k \times \mathbf{e}_k = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{e}_1 + \mathbf{T}_2 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{T}_3 \times \mathbf{e}_3. \tag{4.25}$$

Ovaj se vektor može i drukčije predstaviti, ako se napiše $\mathbf{T}_k = T_{kl}\mathbf{e}_l$ i uzme u obzir da je $\mathbf{e}_l \times \mathbf{e}_k = \varepsilon_{lki}\mathbf{e}_i$. Tako se dobija:

$$\mathbf{Q} = T_{kl}(\mathbf{e}_l \times \mathbf{e}_k) = (\varepsilon_{ilk}T_{kl})\mathbf{e}_i. \tag{4.26}$$

Da ovaj vektor ostaje invarijantan pri rotaciji koordinatnog sistema vidi se neposredno iz sledećih relacija:

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{T}_k' \times \mathbf{e}_k' = (\alpha_{km}\mathbf{T}_m) \times (\alpha_{kn}\mathbf{e}_n) = \alpha_{km}\alpha_{kn}\mathbf{T}_m \times \mathbf{e}_n = \delta_{mn}\mathbf{T}_m \times \mathbf{e}_n = \mathbf{T}_m \times \mathbf{e}_m = \mathbf{Q},$$

u kojima su korišćene samo transformacione formule (4.9) i veze između kosinusa pravca (1.9), kao i osobine Kronecker-ovog simbola.

4.3. TENZORSKA ALGEBRA

Konjugovani tenzor. Pre nego što pređemo na pitanje algebarskih operacija sa tenzorima, definišimo pojam *konjugovanog tenzora*. Od tenzora $\mathcal{T}$ datog jednačinom (4.14) se dobija konjugovani tenzor $\mathcal{T}^*$ ako se u dijadama faktori uzmu u obrnutom redosledu:

$$\mathcal{T}^* = \{\mathbf{e}_k, \mathbf{T}_k\}. \tag{4.27}$$

Napišemo li $\mathbf{T}_k = T_{km}\mathbf{e}_m$ i iskoristimo osobinu (4.12) asocijativnosti množenja dijade skalarom, naći ćemo:

$$\mathcal{T}^* = \{\mathbf{e}_k, T_{km}\mathbf{e}_m\} = \{T_{km}\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m\} = \{\mathbf{T}_m^*, \mathbf{e}_m\}, \tag{4.28}$$

gde su $\mathbf{T}_m^* = T_{km}\mathbf{e}_k$ koordinatni vektori konjugovanog tenzora. Vidi se da su komponente ovih vektora elementi odgovarajućih *vrsta* u šemi (4.6).

Na osnovu same definicije (4.27) konjugovanog tenzora neposredno se vidi da je:

$$(\mathcal{T}^*)^* = \mathcal{T} \tag{4.29}$$

tj. konjugovani tenzor konjugovanog tenzora jednak je prvobitnom. Takođe se može neposredno zaključiti da važi relacija:

$$\mathcal{T} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathcal{T}^*, \tag{4.30}$$

čije proveravanje se zasniva na osnovnoj osobini dijadskog proizvoda. Na osnovu ove relacije i (4.17) možemo onda pisati i:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{B}) = (\mathcal{T}^* \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}. \tag{4.31}$$

Iz poslednje jednačine zaključujemo da se tenzor može prebacivati iz jednog faktora skalarnog proizvoda u drugi, ukoliko se istovremeno zameni svojim konjugovanim tenzorom.

Jednakost dva tenzora. Dva tenzora, $\mathcal{T}=\{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\}$ i $\mathcal{U}=\{\mathbf{U}_k, \mathbf{e}_k\}$ smatraćemo jednakim ukoliko pri primeni na isti proizvoljan vektor daju jednake rezultate. Pošto je:

$$\mathcal{T}\cdot\mathbf{C}=\{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{T}_k(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{C}),$$

$$\mathcal{U}\cdot\mathbf{C}=\{\mathbf{U}_k, \mathbf{e}_k\}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{U}_k(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{C}),$$

uslov $\mathcal{T}\mathbf{C}\cdot=\mathcal{U}\cdot\mathbf{C}$ biće ispunjen za svako $\mathbf{C}$ samo ako su korespondentni koordinatni vektori oba tenzora jednaki. Dakle:

$$\mathcal{T}=\mathcal{U}\Leftrightarrow\mathbf{T}_k=\mathbf{U}_k. \tag{4.32}$$

Sabiranje tenzora. Pod zbirom dva tenzora $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ podrazumevaćemo tenzor $\mathcal{V}$, i pisaćemo $\mathcal{V}=\mathcal{T}+\mathcal{U}$, ako je relacija

$$\mathcal{V}\cdot\mathbf{C}=\mathcal{T}\cdot\mathbf{C}+\mathcal{U}\cdot\mathbf{C}$$

ispunjena za svaki vektor $\mathbf{C}$. Napišemo li tenzor $\mathcal{V}$ u obliku $\{\mathbf{V}_k, \mathbf{e}_k\}$ lako nalazimo:

$$\mathcal{V}=\mathcal{T}+\mathcal{U}\Leftrightarrow\mathbf{V}_k=\mathbf{T}_k+\mathbf{U}_k, \tag{4.33}$$

tj. zbir dva tenzora je tenzor čiji su koordinatni vektori jednaki zbirovima odgovarajućih koordinatnih vektora sabiraka. U odnosu na ovako definisanu operaciju sabiranja tenzori obrazuju *komutativnu grupu*. Zaista, postoji opšti *neutralni element* $\mathcal{O}=\{\mathbf{O}_k, \mathbf{e}_k\}$, takav da je $\mathcal{T}+\mathcal{V}=\mathcal{T}$ za svaki tenzor $\mathcal{T}$. Iz (4.33) se jasno vidi da neutralni element ove operacije ima sva tri koordinatna vektora nule, i stoga se često naziva *nula-tenzor*. Nadalje, svakom tenzoru $\mathcal{T}=\{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\}$ može se pridružiti inverzan tenzor u odnosu na sabiranje, $(-\mathcal{T})=\{-\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\}$, takav da je $\mathcal{T}+(-\mathcal{T})=\mathcal{O}$. Uz to, sabiranje (4.33) je asocijativno i komutativno, jer te osobine važe za sabiranje vektora pomoću koga je sabiranje tenzora definisano. Pobrojana svojstva — postojanje neutralnog i inverznog elementa, asocijativnost i komutativnost — čine da tenzori u odnosu na ovu operaciju obrazuju grupu, i to komutativnu (Abelovu).

Množenje tenzora. Proizvod dva tenzora definiše se relacijom:

$$(\mathcal{T}\cdot\mathcal{U})\cdot\mathbf{C}=\mathcal{T}\cdot(\mathcal{U}\cdot\mathbf{C}), \tag{4.34}$$

koja mora važiti za svaki vektor $\mathbf{C}$. Ako tenzore $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$ prikažemo u obliku (4.14), dolazimo do sledećeg eksplicitnog izraza za ovaj proizvod:

$$(\mathcal{T}\cdot\mathcal{U})\cdot\mathbf{C}=\mathcal{T}\cdot(\mathcal{U}\cdot\mathbf{C})=\{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\}\cdot[\{\mathbf{U}_l, \mathbf{e}_l\}\cdot\mathbf{C}]=\{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\}\cdot[\mathbf{U}_l(\mathbf{e}_l\cdot\mathbf{C})]=$$

$$=\mathbf{T}_k(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{U}_l)(\mathbf{e}_l\cdot\mathbf{C})=(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{U}_l)\{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_l\}\cdot\mathbf{C}.$$

Dakle

$$\mathcal{T}\cdot\mathcal{U}=\{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\}\cdot\{\mathbf{U}_l, \mathbf{e}_l\}=(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{U}_l)\{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_l\}, \tag{4.35}$$

tj. proizvod tenzora se dobija kada se svaka dijada prvog pomnoži sa svakom dijadom drugog i proizvodi saberu, pri čemu se dve dijade množe tako da se skalarni proizvod unutrašnjih vektora pomnoži sa dijadskim proizvodom spoljašnjih. Uzimajući u obzir da je $\mathbf{U}_l\cdot\mathbf{e}_k=U_{lk}$ i $U_{lk}\mathbf{e}_l=\mathbf{U}_k^*$, gde su $\mathbf{U}_k^*$ koordinatni vektori tenzora $\mathcal{U}^*$ konjugovanog tenzoru $\mathcal{U}$, možemo (4.35) prepisati i u obliku:

$$\mathcal{T}\cdot\mathcal{U}=\{\mathbf{T}_k, \mathbf{U}_k^*\}, \tag{4.36}$$

iz koga se vidi da se proizvod dva tenzora može prikazati u obliku sume tri dijade, čiji su antecedenti koordinatni vektori prvog tenzora, a konsekventi koordinatni vektori konjugovanog drugog.

Ovako definisana operacija množenja tenzora očevidno *nije komutativna*, $\mathcal{T}\cdot\mathcal{U}\neq\mathcal{U}\cdot\mathcal{T}$. Za izvesna razmatranja od interesa je uvesti tzv. *komutator* i *antikomutator*, $\mathcal{T}\cdot\mathcal{U}-\mathcal{U}\cdot\mathcal{T}$ odnosno $\mathcal{T}\cdot\mathcal{U}+\mathcal{U}\cdot\mathcal{T}$. Nije, međutim, teško proveriti da je množenje tenzora *asocijativno*:

$$(\mathcal{T}\cdot\mathcal{U})\cdot\mathcal{V}=\mathcal{T}\cdot(\mathcal{U}\cdot\mathcal{V}). \tag{4.37}$$

Isto se tako lako može pokazati da važi relacija:

$$(\mathcal{U}\cdot\mathcal{V})^*=\mathcal{V}^*\cdot\mathcal{U}^*, \tag{4.38}$$

tj. da je tenzor konjugovan proizvodu dva tenzora jednak proizvodu njihovih konjugovanih tenzora uzetih u obrnutom redosledu. Za dokazivanje ove poslednje relacije poći ćemo od (4.31), staviti $\mathcal{T}=\mathcal{U}\cdot\mathcal{V}$ i prebaciti u prvi faktor najpre jedan a zatim drugi tenzor:

$$\mathbf{A}\cdot[(\mathcal{U}\cdot\mathcal{V})\cdot\mathbf{B}]=\mathbf{A}\cdot[\mathcal{U}\cdot(\mathcal{V}\cdot\mathbf{B})]=(\mathcal{U}^*\cdot\mathbf{A})\cdot(\mathcal{V}\cdot\mathbf{B})=[\mathcal{V}^*\cdot(\mathcal{U}^*\cdot\mathbf{A})]\cdot\mathbf{B}=$$

$$=[(\mathcal{V}^*\cdot\mathcal{U}^*)\cdot\mathbf{A}]\cdot\mathbf{B}.$$

Upoređivanjem sa (4.31) odavde sledi (4.38).

Jedinični tenzor. Za operaciju množenja tenzora definisanu relacijama (4.35) i (4.36) postoji neutralni element, tenzor $\mathcal{E}$ koji zadovoljava uslov:

$$\mathcal{T}\cdot\mathcal{E}=\mathcal{E}\cdot\mathcal{T}=\mathcal{T}, \tag{4.39}$$

i koji se zove *jedinični tenzor*, zbog analogije gornjeg uslova i množenja običnih brojeva jedinicom. Koordinatni vektori jediničnog tenzora su jedinični vektori korespondentnih koordinatnih osa, tj. on se može prikazati u obliku:

$$\mathcal{E}=\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\}. \tag{4.40}$$

Zaista, prema (4.35) nalazimo:

$$\mathcal{T}\cdot\mathcal{E}=\{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\}\cdot\{\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_l\}=(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_l)\{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_l\}=\delta_{kl}\{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_l\}=\{\mathbf{T}_l, \mathbf{e}_l\}=\mathcal{T},$$

kao i

$$\mathcal{E}\cdot\mathcal{T}=\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\}\cdot\{\mathbf{T}_l, \mathbf{e}_l\}=(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{T}_l)\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l\}=\{(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{T}_l)\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l\}=\{\mathbf{T}_l, \mathbf{e}_l\}=\mathcal{T},$$

jer je $\mathbf{T}_l=T_{lk}\mathbf{e}_k=(\mathbf{T}_l\cdot\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k$. Iz samog oblika (4.40) se vidi da je $\mathcal{E}=\mathcal{E}^*$, tj. da se *jedinični tenzor poklapa sa svojim konjugovanim tenzorom*. Isto tako se iz (4.40) može videti da *jedinični tenzor svakom vektoru pridružuje taj isti vektor*, bilo da je primenjen s leva ili s desna:

$$\mathcal{E}\cdot\mathbf{A}=\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{e}_k(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{A})=\mathbf{e}_kA_k=\mathbf{A},$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathcal{E}=\mathbf{A}\cdot\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k=A_k\mathbf{e}_k=\mathbf{A}.$$

Osim oblika (4.40) jediničnom tenzoru se može dati i niz drugih oblika, podesnih u primenama. Uopšte *jedinični tenzor se može prikazati u obliku sume triju dijada u kojima antecedenti i konsekventi obrazuju dva uzajamno recipročna*

trijedra. Zaista, ako sa $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ označimo vektore nekog trijedra (ne nužno pravouglog), a sa $\mathbf{P}_1^{-1}, \mathbf{P}_2^{-1}, \mathbf{P}_3^{-1}$ vektore recipročnog trijedra $\left(\text{iz zadatka 1.25. se vidi da se za ove poslednje uopšte može pisati } \mathbf{P}_i^{-1} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\mathbf{T}_j \times \mathbf{T}_k}{\mathbf{T}_1 \cdot (\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3)}\right)$, i ako se podsetimo da se ma za kakav vektor $\mathbf{A}$ mogu napisati Gibbs-ove relacije (zadatak 1.25.):

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_i)\mathbf{P}_i^{-1}, \quad \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_i^{-1})\mathbf{P}_i,$$

lako možemo pokazati da tenzori $\{\mathbf{P}_k, \mathbf{P}_k^{-1}\}$ i $\{\mathbf{P}_k^{-1}, \mathbf{P}_k\}$ zadovoljavaju relaciju (4.39) tj. da su reprezentacije jediničnog tenzora. To sledi iz:

$$\{\mathbf{P}_k, \mathbf{P}_k^{-1}\} \cdot \mathcal{T} = \{\mathbf{P}_k, \mathbf{P}_k^{-1}\} \cdot \{\mathbf{T}_l, \mathbf{l}_l\} = (\mathbf{P}_k^{-1} \cdot \mathbf{T}_l)\{\mathbf{P}_k, \mathbf{l}_l\} =$$
$$= \{(\mathbf{P}_k^{-1} \cdot \mathbf{T}_l)\mathbf{P}_k, \mathbf{e}_l\} = \{\mathbf{T}_l, \mathbf{e}_l\} = \mathcal{T},$$

kao i iz:

$$\mathcal{T} \cdot \{\mathbf{P}_k, \mathbf{P}_k^{-1}\} = \{\mathbf{T}_l, \mathbf{e}_l\} \cdot \{\mathbf{P}_k, \mathbf{P}_k^{-1}\} = (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{P}_k)\{\mathbf{T}_l, \mathbf{P}_k^{-1}\} =$$
$$= \{\mathbf{T}_l, (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{P}_k)\mathbf{P}_k^{-1}\} = \{\mathbf{T}_l, \mathbf{e}_l\} = \mathcal{T}.$$

Za $\{\mathbf{P}_k^{-1}, \mathbf{P}_k\}$ dokaz je analog. Prema tome, jedinični tenzor zaista se može prikazati kao:

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{P}_k, \mathbf{P}_k^{-1}\} = \{\mathbf{P}_k^{-1}, \mathbf{P}_k\}. \tag{4.41}$$

Inverzni tenzor. Svakom tenzoru $\mathcal{T}$ može se pridružiti tzv. *inverzni tenzor* $\mathcal{T}^{-1}$, takav da je

$$\mathcal{T}^{-1} \cdot \mathcal{T} = \mathcal{E} \tag{4.42}$$

Ovaj tenzor se može prikazati u obliku sume triju dijada oblika:

$$\mathcal{T}^{-1} = \{\mathbf{e}_k, \mathbf{T}_k^{-1}\}, \tag{4.43}$$

gde su $\mathbf{T}_k^{-1}$ vektori trijedra recipročnog trijedru koordinatnih vektora tenzora $\mathcal{T}$ kao što se vidi iz:

$$\mathcal{T}^{-1} \cdot \mathcal{T} = \{\mathbf{e}_k, \mathbf{T}_k^{-1}\} \cdot \{\mathbf{T}_l, \mathbf{e}_l\} = (\mathbf{T}_k^{-1} \cdot \mathbf{T}_l)\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l\} = \delta_{kl}\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l\} = \{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\} = \mathcal{E},$$

$$\mathcal{T} \cdot \mathcal{T}^{-1} = \{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\} \cdot \{\mathbf{e}_l, \mathbf{T}_l^{-1}\} = (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l)\{\mathbf{T}_k, \mathbf{T}_l^{-1}\} = \delta_{kl}\{\mathbf{T}_k, \mathbf{T}_l^{-1}\} = \{\mathbf{T}_k, \mathbf{T}_k^{-1}\} = \mathcal{E}.$$

U dokazivanju je korišćeno pravilo množenja dijada (4.35), relacija (4.41), kao i rezultati zad. 1.25.

Inverzni tenzor će postojati, kao što se vidi iz (4.43), samo ako trijedar koordinatnih vektora tenzora $\mathcal{T}$ ima recipročni trijedar, tj. ako vektori $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$ nisu komplanarni. Drugim rečima, da bi postojao inverzni tenzor, mora biti $\mathbf{T}_1 \cdot (\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3) \neq 0$, tj. $\det \mathcal{T} \neq 0$. Ukoliko ovaj uslov nije ispunjen (treća skalarna invarijanta tenzora jednaka nuli) kažemo da je tenzor *singularan*.

Za nesingularan tenzor $\mathcal{T}$ može se lako dokazati relacija:

$$(\mathcal{T}^{-1})^{-1} = \mathcal{T}. \tag{4.44}$$

Inverzni tenzor inverznog tenzora jednak je polaznom tenzoru. Naime, ako (4.42) primenimo na tenzor $\mathcal{T}^{-1}$ dobićemo $(\mathcal{T}^{-1})^{-1} \cdot \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{E}$, pa ako levu i desnu

stranu ove jednakosti s desna pomnožimo tenzorom $\mathcal{T}$, iskoristimo asocijativnost tenzorskog množenja (4.37) i uslov $\mathcal{T} \cdot \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{E}$ dobijamo relaciju (4.44). Isto tako nije teško pokazati da za nesingularne tenzore $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ važi:

$$(\mathcal{U} \cdot \mathcal{V})^{-1} = \mathcal{V}^{-1} \cdot \mathcal{U}^{-1}, \tag{4.45}$$

tj. tenzor inverzan proizvodu dva tenzora jednak je proizvodu inverznih tenzora množilaca uzetih u obrnutom redosledu. Zaista, ako relaciju $\mathbf{D} = (\mathcal{U} \cdot \mathcal{V}) \cdot \mathbf{C}$ pomnožimo tenzorom $\mathcal{U}^{-1}$ i u izrazu sa desne strane uzmemo u obzir osobinu (4.2), nalazimo $\mathcal{U}^{-1} \cdot \mathbf{D} = \mathcal{V} \cdot \mathbf{C}$. Pomnožimo zatim ovaj rezultat sa $\mathcal{V}^{-1}$, te dobijamo $(\mathcal{V}^{-1} \cdot \mathcal{U}^{-1}) \cdot \mathbf{D} = \mathbf{C}$. S druge strane, polaznu relaciju $\mathbf{D} = (\mathcal{U} \cdot \mathcal{V}) \cdot \mathbf{C}$ množenjem sa $(\mathcal{U} \cdot \mathcal{V})^{-1}$ transformišemo u oblik $(\mathcal{U} \cdot \mathcal{V})^{-1} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{C}$. Upoređivanjem dvaju krajnjih rezultata dobijamo (4.45). Zapazimo da su osobine (4.44) i (4.45) analogne osobinama (4.29) i (4.38) kod konjugovanih tenzora.

Na osnovu gornjih činjenica možemo zaključiti da u odnosu na operaciju množenja (4.35) nesingularni tenzori čine grupu (ali ne komutativnu). Zaista, za tu operaciju je definisan neutralni element (jedinični tenzor), inverzni element (inverzni tenzor), a operacija je asocijativna kao što se vidi iz (4.37). U praktičnim izračunavanjima treba posebno voditi računa o sledećim okolnostima:

(a) iz $\mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2 = \mathcal{O}$ *ne sledi* $\mathcal{T}_1 = \mathcal{O}$ ili $\mathcal{T}_2 = \mathcal{O}$;

(b) iz $\mathcal{T} \cdot \mathcal{T} = \mathcal{T}$ *ne sledi* $\mathcal{T} = \mathcal{O}$ ili $\mathcal{T} = \mathcal{E}$ (tzv. *idempotentni tenzori*, na primer $\mathcal{T} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$).

4.4. SPECIJALNI TIPOVI TENZORA

Tenzori sa izvesnim specijalnim osobinama zaslužuju posebnu pažnju, jer se često sreću u primenama u fizici. U ovom odeljku ćemo navesti simetrične, antisimetrične i unitarne tenzore.

Simetrični tenzori. Tenzor $\mathcal{T}$ ćemo zvati simetričnim ukoliko se on podudara sa svojim konjugovanim tenzorom:

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T}. \tag{4.46}$$

Na osnovu jednačine (4.31) vidimo da za simetrične tenzore važi relacija:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{B}) = (\mathcal{T} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}, \tag{4.47}$$

a iz (4.29) i (4.38) zaključujemo do za svaki tenzor $\mathcal{U}$ važi:

$$\begin{aligned} (\mathcal{U} \cdot \mathcal{U}^*)^* &= (\mathcal{U}^*)^* \cdot \mathcal{U}^* = \mathcal{U} \cdot \mathcal{U}^*, \\ (\mathcal{U}^* \cdot \mathcal{U})^* &= \mathcal{U}^* \cdot (\mathcal{U}^*)^* = \mathcal{U}^* \cdot \mathcal{U}, \end{aligned} \tag{4.48}$$

tj. proizvod bilo kog tenzora sa svojim konjugovanim tenzorom je simetričan tenzora.

Jedinični tenzor $\mathcal{E}$ je, kao što se vidi iz (4.40), simetričan. Posebnu klasu simetričnih tenzora predstavljaju tzv. *izotropni tenzori*, koji nastaju množenjem jediničnog tenzora nekim skalarom. U šemi (4.6) izotropnog tenzora svi nedijagonalni elementi su jednaki nuli, dok su dijagonalni elementi različiti od nule i jednaki međusobno.

Simetrični tenzor čiji je trag jednak nuli zove se *devijator*. *Svaki simetrični tenzor se može predstaviti u obliku sume jednog izotropnog tenzora i jednog devijatora* (tzv. *Shouten-ovo razlaganje*). Naime, očevidno je:

$$\mathcal{T}=\left[\left(\frac{1}{3}\,tr\,\mathcal{T}\right)\mathcal{E}\right]+\left[\mathcal{T}-\left(\frac{1}{3}\,tr\,\mathcal{T}\right)\mathcal{E}\right]. \tag{4.49}$$

Prvi sabirak je izotropni tenzor, a drugi je devijator, što se može videti ako se napiše eksplicitno:

$$\mathcal{T}-\left(\frac{1}{3}\,tr\,\mathcal{T}\right)\mathcal{E}=\{\mathbf{T}_k,\mathbf{e}_k\}-\frac{1}{3}\,tr\,\mathcal{T}\{\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_k\}=\left\{\left(\mathbf{T}_k-\frac{1}{3}\,tr\,\mathcal{T}\,\mathbf{e}_k\right),\mathbf{e}_k\right\},$$

po se nađe njegov trag prema (4.18):

$$tr\left[\mathcal{T}-\left(\frac{1}{3}\,tr\,\mathcal{T}\right)\mathcal{E}\right]=\left(\mathbf{T}_k-\frac{1}{3}\,tr\,\mathcal{T}\,\mathbf{e}_k\right)\cdot\mathbf{e}_k=(\mathbf{T}_k\cdot\mathbf{e}_k)-\frac{1}{3}\,tr\,\mathcal{T}(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_k)=0,$$

pošto je $(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_k)=(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1)+(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2)+(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3)=3$.

Napomenimo još na kraju da je vektorska invarijanta (4.25) simetričnog tenzora uvek jednaka nuli. Naime, uslov simetričnosti (4.46) može se s obzirom na definiciju konjugovanog tenzora (4.27) napisati kao $\{\mathbf{T}_k,\mathbf{e}_k\}=\{\mathbf{e}_l,\mathbf{T}_l\}$, pa ako uzmemo $\mathbf{T}_k=T_{kl}\mathbf{e}_l$, $\mathbf{T}_l=T_{lk}\mathbf{e}_k$ dobijemo $T_{kl}\{\mathbf{e}_l,\mathbf{e}_k\}=T_{lk}\{\mathbf{e}_l,\mathbf{e}_k\}$. Jednakost koeficijenta uz iste koordinatne dijade uslov simetričnosti $T_{kl}=T_{lk}$, na osnovu koga jednačina (4.26) daje $\mathbf{Q}=0$.

Antisimetrični tenzori. Ovim terminom se označavaju tenzori čiji konjugovani tenzor je jednak inverznom tenzoru u odnosu na operaciju sabiranja:

$$\mathcal{T}^*=-\mathcal{T}\quad \text{tj.}\quad T_{kl}=-T_{lk}. \tag{4.50}$$

Drugi uslov se dobija kada se koordinatni vektori izraze pomoću svojih komponenata. Šema (4.6) antisimetričnog tenzora ima na glavnoj dijagonali nule, a nedijagonalni simetrično postavljeni elementi imaju istu apsolutnu vrednost i razlikuju se po znaku. Zbog ove osobine, prva i treća skalarna invarijanta antisimetričnog tenzora su jednake nuli.

Ako je $\mathcal{T}$ antisimetričan tenzor, za bilo koji vektor $\mathbf{C}$ važi identitet:

$$\mathcal{T}\cdot\mathbf{C}=-\frac{1}{2}\mathbf{Q}\times\mathbf{C}, \tag{4.51}$$

gde je $\mathbf{Q}$ vektorska invarijanta (4.25) tog tenzora. Kaže se da je vektor $-\frac{1}{2}\mathbf{Q}$ *dualan* antisimetričnom tenzoru $\mathcal{T}$. Gornja relacija se dokazuje na osnovu definicije konjugovanog tenzora (4.27) i uslova antisimetričnosti (4.50). Stoga za antisimetrični tenzor možemo pisati dva alternativna izraza, $\{\mathbf{T}_k,\mathbf{e}_k\}$ i $-\{\mathbf{e}_k,\mathbf{T}_k\}$, tako da imamo:

$$\mathcal{T}\cdot\mathbf{C}=\{\mathbf{T}_k,\mathbf{e}_k\}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{T}_k(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{C}),\quad \text{i}\quad \mathcal{T}\cdot\mathbf{C}=-\{\mathbf{e}_k,\mathbf{T}_k\}\cdot\mathbf{C}=-\mathbf{e}_k(\mathbf{T}_k\cdot\mathbf{C}).$$

Sabiranjem ovih izraza, koristeći formulu (1.40), dobijamo:

$$2\mathcal{T}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{T}_k(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{C})-\mathbf{e}_k(\mathbf{T}_k\cdot\mathbf{C})=(\mathbf{e}_k\times\mathbf{T}_k)\times\mathbf{C}=-\mathbf{Q}\times\mathbf{C}.$$

Poslednja jednakost proizilazi iz osobine vektorskog proizvoda i definicije (4.25), čime je formula (4.51) dokazana.

Bilo koji tenzor $\mathcal{U}$ se može prikazati u obliku zbira jednog simetričnog i jednog antisimetričnog tenzora. Naime, u identitetu:

$$\mathcal{U}=\frac{1}{2}(\mathcal{U}+\mathcal{U}^*)+\frac{1}{2}(\mathcal{U}-\mathcal{U}^*), \tag{4.52}$$

prvi sabirak je simetričan tenzor, a drugi je antisimetričan. To se vidi iz sledeće relacije:

$$(\mathcal{U}+\mathcal{U}^*)^*=\mathcal{U}^*+(\mathcal{U}^*)^*=\mathcal{U}^*+\mathcal{U}=\mathcal{U}+\mathcal{U}^*,$$

$$(\mathcal{U}-\mathcal{U}^*)^*=\mathcal{U}^*-(\mathcal{U}^*)^*=\mathcal{U}^*-\mathcal{U}=-(\mathcal{U}-\mathcal{U}^*),$$

koje se poklapaju sa (4.46) i (4.50) respektivno.

Unitarni tenzori. To su tenzori sa osobinom da im je konjugovani tenzor jednak inverznom u odnosu na operaciju množenja:

$$\mathcal{T}^*=\mathcal{T}^{-1}. \tag{4.53}$$

S obzirom na jednačine (4.27) i (4.43) zaključujemo da tenzor može biti unitaran, ako je ispunjen uslov $\mathbf{T}_k=\mathbf{T}_k^{-1}$, tj. ako su njegovi koordinatni vektori jednaki vektorima recipročnog trijedra. Na osnovu osobina recipročnih trijedara (v. zad. 1.25) nalazimo da je to moguće jedino ako koordinatni vektori obrazuju pravougli trijedar jediničnih vektora, $\mathbf{T}_k=\mathbf{e}_k'$. Relacija (4.14) onda daje:

$$\mathcal{T}=\{\mathbf{e}_k',\mathbf{e}_k\} \tag{4.54}$$

gde $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ i $\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'$ obrazuju dva pravougla trijedara jediničnih vektora. To između ostalog implicira da treća skalarna invarijanta unitarnog tenzora, $S_3=\mathbf{e}_1'(\mathbf{e}_2'\times\mathbf{e}_3')$, može imati samo vrednosti $+1$ i -1 zavisno od toga da li $\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'$ obrazuju desni ili levi trijedar.

Ukoliko je kod datog unitarnog tenzora $\det\mathcal{T}=+1$, možemo pravce definisane koordinatnim vektorima $\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'$ uzeti za ose jednog novog koordinatnog sistema i pokazati da svakom vektoru $\mathbf{C}$ ovaj tenzor pridružuje vektor $\mathbf{D}=\mathcal{T}\cdot\mathbf{C}$ koji se dobija od vektora $\mathbf{C}$ onom istom rotacijom koja stari koordinatni sistem $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ prenosi u novi $(\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3')$. Zaista, u tom slučaju je:

$$\mathbf{D}=\mathcal{T}\cdot\mathbf{C}=\{\mathbf{e}_k',\mathbf{e}_k\}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{e}_k'\cdot(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{C}),$$

odnosno,

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{e}_i'=(\mathbf{e}_i'\cdot\mathbf{e}_k')(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{C})=\delta_{ik}(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{C})=\mathbf{C}\cdot\mathbf{e}_i, \tag{4.55}$$

tj. projekcije vektora $\mathbf{D}$ na ose novog trijedra su istovetne sa projekcijama vektora $\mathbf{C}$ na ose starog, čime je gornja tvrdnja dokazana. Unitarne tenzore sa ovom osobinom zovemo, po Gibbs-u, *verzori*.

Ako je pak, $\det\mathcal{T}=-1$ ($\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'$ obrazuju levi trijedar), osobina (4.55) za vektor $\mathbf{D}=\mathcal{T}\cdot\mathbf{C}$ je, doduše, i dalje u važnosti, ali nema raniji smisao, jer ne postoji takva rotacija koja bi desni trijedar $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ prevela u levi $(\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3')$. U ovom slučaju se unitarni tenzor zove, po Gibbs-u, *perverzor*.

4.5. ELEMENTI TENZORSKE ANALIZE

Tenzorska polja. Po analogiji sa vektorskim poljem, kažemo da je zadano *tenzorsko polje* (ili tenzorska funkcija položaja) ako svakoj tački prostora možemo pridružiti određeni tenzor. Drugim rečima, koordinatni vektori tenzora treba da su funkcije koordinata x_1, x_2, x_3 tačke prostora:

$$\mathbf{T}_k=\mathbf{T}_k(x_1,x_2,x_3). \tag{4.56}$$

Na ovom mestu ćemo se zadržati samo na najvažnijim pojmovima vezanim za tenzorska polja, ostavljajući opštija pitanja za poglavlje o opštem tenzorskom računu.

Lokalni tenzor. Datom vektorskom polju $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$ možemo pridružiti jedno tenzorsko polje obrazovanjem dijadskog proizvoda Hamilton-ovog operatora ∇ i vektorske funkcije $\mathbf{A}$, tj. $\{\nabla, \mathbf{A}\}$. Taj dijadski proizvod, poznat pod nazivom *dijadskog izvoda vektora* $\mathbf{A}$ ili *lokalnog tenzora*, ima sledeći eksplicitni oblik:

$$\{\nabla, \mathbf{A}\} = \left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{e}_i,\ A_j \mathbf{e}_j\right\} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\} = \{\operatorname{grad} A_j, \mathbf{e}_j\}. \tag{4.57}$$

Njegova prva skalarna invarijanta jednaka je, kao što je lako proveriti, $\operatorname{div} \mathbf{A}$, a vektorska invarijanta je $\operatorname{rot} \mathbf{A}$. Diferencijal vektorske funkcije $d\mathbf{A}$ može se pomoću lokalnog tenzora napisati kao:

$$d\mathbf{A} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{A} = d\mathbf{r} \cdot \{\nabla, \mathbf{A}\}. \tag{4.58}$$

Divergencija tenzora. Ovu veličinu ćemo definisati u skladu sa opštom formulom za prostorne izvode (2.66). Uočimo u okolini neke zadane tačke M malu zatvorenu površinu ΔS koja opkoljava zapreminu ΔV, formirajmo količnik $\oint_{\Delta S} d\mathbf{S} \cdot \mathcal{T}$ i ΔV, pa pustimo da $\Delta V \to 0$ sažimajući se u tačku M. Ako ta granična vrednost postoji i ne zavisi od načina na koji ΔV teži nuli, ona se naziva *divergencija tenzora*:

$$\operatorname{div} \mathcal{T} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} d\mathbf{S} \cdot \mathcal{T}}{\Delta V}. \tag{4.59}$$

Napišimo tenzor u obliku (4.14) i primenimo pravila množenja dijada sa vektorima:

$$\operatorname{div} \mathcal{T} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} d\mathbf{S} \cdot \{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\mathbf{e}_k \cdot \oint_{\Delta S} \mathbf{T}_k \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} =$$

$$= \mathbf{e}_k \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{T}_k \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V},$$

tj

$$\operatorname{div} \mathcal{T} = \mathbf{e}_k (\operatorname{div} \mathbf{T}_k). \tag{4.60}$$

Pri pisanju ovih formula korišćena je sumaciona konvencija i definicija divergencije vektorske funkcije (2.68). Dakle, *divergencija tenzora je vektor čije su komponente divergencije koordinatnih vektora tog tenzora.* Iz toga zaključujemo da simbolički račun možemo primeniti i na tenzore:

$$\operatorname{div} \mathcal{T} = \nabla \cdot \{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\} = \nabla \cdot \{\mathbf{T}_k^*, \mathbf{e}_k\} + \nabla \cdot \{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k^*\} =$$

$$= \mathbf{e}_k (\operatorname{div} \mathbf{T}_k) + (\mathbf{T}_k \cdot \nabla)\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k (\operatorname{div} \mathbf{T}_k),$$

jer se rezultat poklapa sa (4.60).

Gauss-ova teorema za tenzore. Relaciju (4.60) pomnožimo sa dV i prointegrirajmo po nekoj zapremini V. Ukoliko su u toj zapremini sve komponente tenzora $\mathcal{T}$ diferencijabilne i njihovi prvi izvodi ograničeni dobijamo:

$$\int_V \operatorname{div} \mathcal{T}\, dV = \int_V \mathbf{e}_k (\operatorname{div} \mathbf{T}_k)\, dV = \mathbf{e}_k \int_V \operatorname{div} \mathbf{T}_k\, dV = \mathbf{e}_k \oint_S \mathbf{T}_k \cdot d\mathbf{S}.$$

Poslednja jednakost proizilazi iz Gauss-ove teoreme za vektore (2.54). U nešto izmenjenom obliku, gornji rezultat glasi:

$$\int_V \operatorname{div} \mathcal{T}\, dV = \oint_S d\mathbf{S} \cdot \{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\},$$

odakle se definitivno dobija Gauss-ova teorema za tenzore:

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathcal{T} = \int_V \operatorname{div} \mathcal{T}\, dV. \tag{4.61}$$

Ukoliko se ukaže potreba da se integral $\oint_S \mathcal{T} \cdot d\mathbf{S}$ pretvori u zapreminski, postupamo ovako:

$$\oint_S \mathcal{T} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathcal{T}^* = \int_V \operatorname{div} \mathcal{T}^*\, dV. \tag{4.62}$$

Pri prvoj transformaciji je korišćena relacija (4.30), a $\mathcal{T}^*$ je konjugovan tenzor.

ZADACI

4.1. Ispitati da li su niže navedeni tenzori singularni, i ako nisu naći njihove inverzne tenzore:

(a) $\mathcal{T} = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\} + \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\} + \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$,

(b) $\mathcal{T} = \{(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \mathbf{e}_1\} + \{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3), \mathbf{e}_2\} + \{(3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3), \mathbf{e}_3\}$,

(c) $\mathcal{T} = \{(3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3), \mathbf{e}_1\} + \{(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3), \mathbf{e}_2\} +$
$+ \{(9\mathbf{e}_1 + 14\mathbf{e}_2 + 16\mathbf{e}_3), \mathbf{e}_3\}$.

4.2. Kakav uslov treba da zadovoljava tenzor $\mathcal{T}$ da bi identiteti:

(a) $\mathbf{A} \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{A}) = 0$,

(b) $\mathbf{A} \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$,

(c) $(\mathcal{T} \cdot \mathbf{A}) \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

važili za ma kakve vektore $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$?

4.3. Može li se podesnim izborom vektora $\mathbf{T}$ postići da tenzor

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\} + \{\mathbf{T}, \mathbf{e}_2\}$$

bude idempotentan? Ako može, naći njegove invarijante i inverzni tenzor.

4.4. Kakav uslov mora zadovoljavati tenzor $\mathcal{T}$ da bi relacija:

$$(\mathcal{T}\cdot \mathbf{C})\cdot(\mathcal{T}^{*}\cdot \mathbf{C})=\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}$$

važila za ma kakav vektor **C**?

4.5. Pokazati da izraz

$$R=\frac{(\mathcal{T}\cdot\mathbf{A})\cdot[(\mathcal{T}\cdot\mathbf{B})\times(\mathcal{T}\cdot\mathbf{C})]}{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})}$$

predstavlja jednu karakteristiku samog tenzora $\mathcal{T}$ i ne zavisi od vektora **A**, **B** i **C**.

4.6. Relacijama:

$$\text{(a)}\ \mathcal{T}_1\cdot\mathbf{A}=\mathbf{a}\times\mathbf{A},\qquad \text{(b)}\ \mathcal{T}_2\cdot\mathbf{A}=\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{A})$$

gde su **a** i **b** zadani vektori, a **A** je proizvoljan vektor, definisana su dva tenzora. Naći njihove koordinatne vektore (tj. prikazati ih u obliku (4.14) sume triju dijada) i izračunati njihove skalarne i vektorsku invarijantu. Pokazati da je tenzor $\mathcal{T}_1$ antisimetričan.

4.7. Proizvoljan vektor **C** obrće se oko ose određene jediničnim vektorom **a** za ugao θ, prelazeći pri tom u **C**'. Dokazati da relacija $\mathbf{C}'=\mathcal{T}\cdot\mathbf{C}$ definiše jedan verzor. Naći direktno inverzni verzor $\mathcal{T}^{-1}$.

4.8. Koristeći zaključke prethodnog zadatka izračunati trag i vektorsku invarijantu verzora. Objasniti kako se iz zadanog oblika verzora može odrediti pravac ose rotacije i ugao rotacije. Odrediti jedinični vektor ose rotacije i ugao rotacije za verzor iz zad. 4.1. (a).

4.9. Dokazati da se sve tri skalarne invarijante tenzora $\mathcal{T}^{*}$ poklapaju sa odgovarajućim invarijantama tenzora $\mathcal{T}$. Važi li ovo tvrđenje i za njihove vektorske invarijante?

4.10. Ispitati da li je $(\mathcal{T}^{*})^{-1}=(\mathcal{T}^{-1})^{*}$, tj. da li su operacije konjugovanja i obrazovanja inverznog tenzora komutativne.

4.11. Pokazati da je treća skalarna invarijanta proizvoda dva tenzora jednaka proizvodu trećih skalarnih invarijanti pojedinačnih tenzora:

$$\det(\mathcal{U}\cdot\mathcal{V})=\det\mathcal{U}\cdot\det\mathcal{V}.$$

4.12. Dokazati da je trag ma kog tenzora jednak tragu njegovog simetričnog dela, a vektorska invarijanta mu je jednaka vektorskoj invarijanti antisimetričnog dela.

4.13. Dokazati da je kod unitarnih tenzora proizvod prve i treće skalarne invarijante jednak drugoj skalarnoj invarijanti.

4.14. Ako su q_1, q_2, q_3 neke generalisane koordinate, postoji identitet:

$$\left\{\nabla q_k,\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}\right\}=\mathfrak{E},$$

gde je $\mathfrak{E}$ jedinični tenzor. Dokazati.

4.15. Ako su S_1, S_2, S_3 skalarne invarijante tenzora $\mathcal{T}$, pokazati da se korespondentne invarijante inverznog tenzora $\mathcal{T}^{-1}$ mogu izraziti pomoću njih relacijama:

$$S_1^{-1}=\frac{S_2}{S_3},\quad S_2^{-1}=\frac{S_1}{S_3},\quad S_3^{-1}=\frac{1}{S_3}.$$

4.16. Lokalni tenzor vektorske funkcije $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$ je njen prostorni izvod u odnosu na operaciju dijadskog množenja. Dokazati.

5. TENZORI I MATRICE

5.1. OSNOVI MATRIČNE ALGEBRE

Matrice. Uređene kvadratne ili pravougaone tablice brojeva ili funkcija sa kojima se operiše na unapred definisani način, opisan u ovom odeljku, zovu se *matrice*. Brojevi ili funkcije koji matricu sačinjavaju zovu se njeni *elementi* i u opštim razmatranjima se obično numerišu sa dva indeksa, od kojih prvi označava broj vrste a drugi broj kolone u kojima se taj element matrice nalazi. Tako, na primer a_{23} označava element koji se nalazi u drugoj vrsti i trećoj koloni. Prema tome matricu A koja ima m vrsta i n kolona (radi kratkoće nazvaćemo je matricom *tipa* $m\times n$) eksplicitno pišemo u obliku:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Matricu kod koje je broj vrsta jednak broju kolona (tip $n\times n$) zvaćemo *kvadratna matrica n-tog reda*. One su od posebne važnosti kod primena u Teorijskoj fizici. Elemente $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ kvadratne matrice koji se nalaze na glavnoj dijagonali zovemo *dijagonalni elementi*. Kvadratnu matricu čiji su samo dijagonalni elementi različiti od nule zovemo *dijagonalna matrica*. Svakoj kvadratnoj matrici možemo pridružiti determinantu načinjenu od istih elemenata, dakle jedan skalar. Treba strogo razlikovati pojam kvadratne matrice i pojam determinante, pošto ova poslednja samo predstavlja određeni način prikazivanja jednog skalara. Ako determinanta pridružena datoj kvadratnoj matrici ima vrednost nula, kažemo da je matrica *singularna*. Osim kvadratnih matrica, određeni interes u Teorijskoj fizici predstavljaju *matrice-vrste* (tipa $1\times n$) i *matrice-kolone* (tipa $m\times 1$):

$$B=(b_1\ b_2\ \cdots\ b_n); \qquad C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Matrice možemo shvatiti kao određenu generalizaciju pojma skalara, odnosno skalarne funkcije, smatrajući ove poslednje matricama tipa 1×1.

U razmatranjima koja slede smatraćemo da su elementi matrice realni brojevi, što je za većinu primena u klasičnoj fizici dovoljno. Na kraju ovog odeljka navešćemo, radi potpunosti, i nekoliko generalizacija za slučaj kada su ovi elementi kompleksni brojevi.

Pravila na osnovu kojih se sa matricama operiše su fiksirana unapred konvencijom. Zahteva se da se matrice A, B i C sa elementima a_{ij}, b_{ij} i c_{ij} pokoravaju sledećim pravilima (a)—(d):

(a) Jednakost matrica. Dve matrice, A i B, mogu biti jednake samo ako su istog tipa, tj. ako imaju jednak broj vrsta i jednak broj kolona, i ako za sve vrednosti indeksa i i j važi $a_{ij}=b_{ij}$.

Dakle:

$$A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}. \tag{5.3}$$

(b) Sabiranje matrica. Dve matrice, A i B, mogu se sabirati samo ako su istog tipa. Njihov zbir je matrica istog tipa kao i matrice-sabirci i njeni elementi su jednaki sumi korespondentnih elemenata matrica-sabiraka:

$$C=A+B \Leftrightarrow c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}. \tag{5.4}$$

Prema tome, za sabiranje matrica važe zakoni komutativnosti i asocijativnosti:

$$A+B=B+A,$$

$$(A+B)+C=A+(B+C), \tag{5.5}$$

pošto takvi zakoni važe za sabiranje brojeva. U odnosu na ovako definisano sabiranje *sve matrice istog tipa obrazuju komutativnu grupu*. Da bismo se u ovo uverili, potrebno je da pokažemo da, pored osobina (5.5), kod ovako definisanog sabiranja postoji zajednički neutralni element takav da je $A+O=A$ za svaku matricu datog tipa, kao i da se svakoj matrici A može pridružiti inverzna matrica u odnosu na sabiranje $(-A)$, takva da je $A+(-A)=O$. Opšti neutralni element je očevidno *nulta* $m\times n$ *matrica*, tj. matrica čiji su svi elementi jednaki nuli. Matrica A sa elementima a_{ij} ima očevidno inverznu matricu čiji su elementi $-a_{ij}$.

(c) Množenje skalarom. Proizvod αA matrice i skalara je matrica istog tipa, sa elementima formiranim množenjem elemenata matrice A skalarom α:

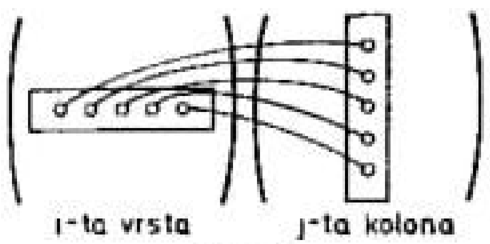
$$B=\alpha A \Leftrightarrow b_{ij}=\alpha a_{ij}. \tag{5.6}$$

Kod ove se operacije ispoljava suštinska razlika između matrice i determinante, jer se determinanta množi skalarom tako, što joj se tim skalarom pomnože elementi *samo jedne* vrste ili kolone.

(d) Množenje matrica. Proizvod dveju matrica, AB, definisan je *samo ako je broj kolona prve matrice jednak broju vrsta druge*. Ako je prva matrica tipa $m\times n$, a druga tipa $n\times p$ proizvod će biti matrica tipa $m\times p$ (tj. imaće broj vrsta kao prva matrica, a broj kolona kao druga) i njeni elementi se određuju po pravilu:

$$C=AB \Leftrightarrow c_{ij}=a_{ik}\,b_{kj}. \tag{5.7}$$

U poslednjem izrazu se podrazumeva sumiranje po ponovljenom indeksu k u smislu sumacione konvencije uvedene u Glavi 1. Dakle, *element i-te vrste i j-te kolone proizvoda dve matrice se dobija kada se elementi i-te vrste prve matrice izmnože sa odgovarajućim elementima j-te kolone druge, pa se proizvodi saberu.* Ovakav način množenja je šematski prikazan na slici 5.1.



Sl. 5.1.

Zabeležimo posebno nekoliko osobina matričnog množenja:

(1) Proizvod dve matrice može biti nulta matrica a da nijedna od njih nije nulta matrica, kao što se vidi iz sledećeg primera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Za dve pravougaone (nekvadratne) matrice *u opštem slučaju nisu istovremeno definisana* oba proizvoda, AB i BA.

(3) Proizvod matrice-vrste $1 \times n$ i kvadratne matrice $n \times n$ je matrica-vrsta polaznog tipa $1 \times n$; slično važi za proizvod kvadratne matrice $n \times n$ i matrice-kolone $n \times 1$.

(4) Za dve kvadratne matrice istog reda definisana su oba proizvoda, AB i BA, i oba su kvadratne matrice istog reda kao i polazne matrice. Međutim, kako se vidi iz (5.7), *u opštem slučaju ne važi zakon komutacije.*

Veliku važnost imaju tzv. ***komutator* i *antikomutator*** dveju kvadratnih matrica istog reda:

$$[A, B] = AB - BA, \{A, B\} = AB + BA. \tag{5.8}$$

Matrice će biti komutativne, ako im je komutator jednak nultoj matrici. Zapazimo da *dve dijagonalne matrice uvek komutiraju.*

(5) Na osnovu definicije (5.7) neposredno se vidi da je množenje matrica *asocijativno* (v. zad. 5.1).

U preostalom delu ovog odeljka ograničićemo se na kvadratne matrice n-tog reda koje su od posebnog interesa u Teorijskoj fizici. Definišimo nekoliko važnijih pojmova vezanih za ove matrice.

Jedinična matrica. To je kvadratna matrica n-tog reda čiji su elementi Kronecker-ovi simboli δ_{ij}, tj. koja ima dijagonalan oblik i sve elemente na glavnoj dijagonali jednake jedinici:

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}. \tag{5.9}$$

Ona ima važnu osobinu da ma za kakvu kvadratnu matricu n-tog reda važi:

$$IA = AI = A, \tag{5.10}$$

što je lako neposredno proveriti na osnovu pravila (5.7) za množenje matrica. **Dakle, u skupu** kvadratnih matrica n-tog reda jedinična matrica n-tog reda igra ulogu neutralnog elementa u odnosu na matrično množenje.

Treba zapaziti da relacija $AA = A$ može biti ispunjena i ako A nije nulta ili jedinična matrica, kao što se vidi iz sledećeg primera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

i matrice sa takvom osobinom zvaćemo *idempotentnim*. Jedinična i nulta matrica jesu idempotentne, ali nisu jedine, za razliku od običnih brojeva.

Inverzna matrica. Zadanoj nesingularnoj kvadratnoj matrici A n-tog reda može se pridružiti takođe nesingularna kvadratna matrica istog reda A^{-1}, takva da je njihov proizvod jednak jediničnoj matrici n-tog reda. Ta matrica se zove *inverzna matrica* matrice A. Dakle, po gornjoj definiciji:

$$A^{-1}A = I. \tag{5.11}$$

Označimo elemente matrica A i A^{-1} sa a_{ij} i a_{ij}^{-1} respektivno, pa tu definiciju prepišimo u obliku:

$$a_{ik}^{-1} a_{kj} = \delta_{ij}, \tag{5.12}$$

koji rezultira iz pravila matričnog množenja (5.7). Označimo dalje sa C_{ij} kofaktor elementa a_{ij} u determinanti pridruženoj matrici A i podsetimo se da, prema poznatim osobinama determinanti, imamo:

$$C_{ij} a_{ik} = \Delta \delta_{jk}, \ C_{ij} a_{kj} = \Delta \delta_{ik}, \tag{5.13}$$

gde je sa Δ označena vrednost te determinante. Naime, jedino kad elemente jedne vrste ili kolone u determinanti pomnožimo sa njima pripadajućim kofaktorima i rezultate sumiramo dobićemo vrednost te determinante, dok kad ih množimo sa kofaktorima neke druge vrste ili kolone rezultat je nula. Pomnožimo dakle jednačine (5.12) (njih ima ukupno n^2, za svako $i = 1, 2, \dots n$ i svako $j = 1, 2, \dots, n$ po jedna) sa C_{lj} i prosumirajmo po j. Ako kod pisanja rezultata iskoristimo sumacionu konvenciju, rezultat će biti:

$$a_{ik}^{-1} a_{kj} C_{lj} = \delta_{ij} C_{lj},$$

odnosno, zbog (5.13):

$$a_{ik}^{-1} (\Delta \delta_{kl}) = \Delta a_{il}^{-1} = C_{li},$$

tako da, uz neznatnu izmenu oznaka indeksa, konačno dobijamo:

$$a_{ij}^{-1} = \frac{1}{\Delta} C_{ji}. \tag{5.14}$$

Dakle, *element i-te vrste i j-te kolone inverzne matrice se dobija kada se kofaktor elementa j-te vrste i i-te kolone u determinanti pridruženoj datoj kvadratnoj mat-*

rici podeli sa vrednošću te determinante. Na osnovu ovog rezultata se može pokazati da *svaka kvadratna matrica komutira sa svojom inverznom matricom.* Zaista,

$$(AA^{-1})_{ij} = a_{ik}a^{-1}_{kj} = a_{ik}\cdot\frac{1}{\Delta}C_{jk} = \frac{1}{\Delta}\cdot\Delta\delta_{ij} = \delta_{ij},$$

tj. i AA^{-1} je jednako jediničnoj matrici, odnosno $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Transponovana matrica. Svakoj matrici A (ne nužno kvadratnoj) može se pridružiti *transponovona matrica* $\tilde{A}$ koja se formira tako što se vrste matrice A uzmu za kolone matrice $\tilde{A}$, i kolone za vrste. Dakle, prema gornjoj definiciji:

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ji} \tag{5.15}$$

Zapazimo još da je u bilo kom slučaju proizvod $A\tilde{A}$ kvadratna matrica, čak i ako A nije kvadratna. Isto važi i za proizvod $\tilde{A}A$, mada data matrica u opštem slučaju ne komutira sa svojom transponovanom matricom, i matrice $A\tilde{A}$ su čak različitog reda što se vidi iz sledećeg primera:

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 14 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 34 \end{pmatrix}.$$

Jedino kod kvadratnih matrica transponovana matrica je takođe kvadratna i ovde je pojam transponovane matrice od posebnog interesa.

U primenama kod problema Teorijske fizike su tri klase kvadratnih matrica, kod kojih su A, $\tilde{A}$ i A^{-1} u određenoj vezi, Tako, ako je matrica A jednaka svojoj transponovanoj matrici,

$$A = \tilde{A}, \quad a_{ij} = \tilde{a}_{ij} = a_{ji} \tag{5.16}$$

kažemo da je ona *simetrična.* Kod takve matrice su elementi simetrično raspoređeni u odnosu na glavnu dijagonalu jednaki ($a_{ij} = a_{ji}$). Umesto sa n^2 brojeva, koliko je potrebno za određivanje kvadratne matrice n-tog reda u opštem slučaju, simetrična matrica je određena sa svega $\frac{1}{2}n(n+1)$ brojeva. Drugi tip matrica od interesa su one kod kojih je

$$A = -\tilde{A}, \quad a_{ij} = -\tilde{a}_{ij} = -a_{ji}, \tag{5.17}$$

i koje zovemo *antisimetričnim matricama.* Kod njih elementi simetrično raspoređeni u odnosu na glavnu dijagonalu imaju jednake apsolutne vrednosti i suprotnog su znaka. Stoga antisimetrična matrica ima sve elemente na glavnoj dijagonali jednake nuli, jer, na primer iz $a_{11} = -a_{11}$ sledi $a_{11} = 0$. Dakle, antisimetrična matrica je određena sa svega $\frac{1}{2}n(n-1)$ brojeva, umesto n^2 koliko je potrebno u opštem slučaju. Zapazimo da se ma kakva matrica A može prikazati u obliku zbira jedne simetrične i jedne antisimetrične matrice, jer u izrazu:

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \tag{5.18}$$

prvi sabirak $b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ ima osobinu $b_{ij} = b_{ji}$, a drugi sabirak $c_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$ ima osobinu $c_{ij} = -c_{ji}$, pa ih možemo uzeti za elemente jedne simetrične i jedne antisimetrične matrice respektivno. Najzad, treći tip matrica od interesa su one kod kojih je transponovana jednaka inverznoj:

$$\tilde{A} = A^{-1} \quad \text{ili} \quad A\tilde{A} = \tilde{A}A = I. \tag{5.19}$$

To su tzv. *ortogonalne matrice.* Među elementima a_{ij} ortogonalne matrice postoje određene veze, koje se dobijaju iz gornje definicije i jednačina (5.16) i (5.7). Ove veze su oblika:

$$\begin{aligned} a_{ik}\tilde{a}_{kj} &= a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}, \\ \tilde{a}_{ik}a_{kj} &= a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}, \end{aligned} \tag{5.20}$$

i analoge su uslovima (1.9) za kosinuse pravca pri prelazu iz jednog pravouglog sistema u drugi, što i predstavlja razlog da se ove matrice zovu ortogonalne.

Matrice sa kompleksnim elementima. U klasičnoj teorijskoj fizici se matrice čiji su elementi kompleksni brojevi sreću samo izuzetno. Nasuprat tome, u kvantnoj mehanici su one vrlo česte. Na ovom mestu ćemo izneti nekoliko važnijih napomena o ovakvim matricama.

Osnovne algebarske operacije se kod ovih matrica definišu na isti način kao i kod matrica sa realnim elementima, dakle relacijama (5.3), (5.4), (5.6) i (5.7), pri čemu skalar α kojim se matrica množi može takođe biti kompleksan broj.

Kod kvadratnih matrica sa kompleksnim elementima može se definisti i operacija *konjugovanja,* tj. zamene svih elemenata njihovim konjugovano-kompleksnim vrednostima. Matrica $\bar{A}$ dobijena ovom operacijom zove se *konjugovana.* Konjugovanjem i transponovanjem se dobija tzv. *adjungovana matrica* A^{+}, pri čemu se konjugovanje i transponovanje mogu vršiti u bilo kom redosledu:

$$A^{+} = (\bar{\tilde{A}}) = (\tilde{\bar{A}}), \quad a^{+}_{ij} = \bar{a}_{ji}. \tag{5.21}$$

Crta iznad broja označava njegovu konjugovano-kompleksnu vrednost. Definicije simetrične, antisimetrične i ortogonalne matrice i ovde ostaju neizmenjene, ali su ovi pojmovi od manjeg interesa. Veći značaj imaju sledeća tri tipa matrica.

Matrica A će biti *ermitska,* ako je jednaka svojoj adjungovanoj matrici:

$$\bar{\tilde{A}} = A, \quad a_{ij} = a^{+}_{ij} = \overline{a_{ji}}. \tag{5.22}$$

Za ovakve matrice se ponekad koristi i naziv *autoadjungovane.* Nasuprot tome, ako je matrica jednaka svojoj adjungovanoj matrici sa suprotnim znakom:

$$A = -A^{+}, \quad a_{ij} = -a^{+}_{ij} = -\overline{a_{ji}}, \tag{5.23}$$

zvaćemo je *antiermitska.* Ermitska i antiermitska matrica su očevidne generalizacije pojmova simetrične matrice, jer se u slučaju čisto realnih koeficijenata transponovana i adjungovana matrica poklapaju. Po analogiji sa relacijom (5.18), svaku matricu sa kompleksnim elementima možemo rastaviti na zbir jedne ermitske i jedne antiermitske matrice:

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + \overline{a_{ji}}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - \overline{a_{ji}}). \tag{5.24}$$

Nije teško pokazati da je prvi sabirak matrični element jedne ermitske matrice a drugi jedne antiermitske.

Najzad, matrice kod kojih je adjungovana jednaka inverznoj:

$$A^+ = A^{-1}, \quad \text{odnosno:} \quad A^+A = AA^+ = I, \tag{5.25}$$

zovu se *unitarne* i predstavljaju generalizaciju ortogunalnih matrica (5.19). Među koeficijentima unitarne matrice, zbog uslova (5.25), postoje sledeće veze

$$\begin{aligned} a^+_{ik}\, a_{kj} &= \bar{a}_{ki}\, a_{kj} = \delta_{ij}, \\ a_{ik}\, a^+_{kj} &= a_{ik}\, \bar{a}_{jk} = \delta_{ij}, \end{aligned} \tag{5.26}$$

analoge vezama (5.20) kod ortogunalnih matrica.

5.2. PRIDRUŽIVANJE MATRICA VEKTORIMA I TENZORIMA

Predstavljanje vektora matricama. Datom vektoru **A** određenom pomoću tri skalarna koeficijenta $A_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i$, može se, sasvim očevidno, pridružiti jedna matrica-vrsta ili njoj transponovana matrica-kolona, obe sa realnim koeficijentima, tj. pisati:

$$\mathbf{A} = (A_1\ A_2\ A_3), \quad \text{ili} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \tag{5.27}$$

pri čemu će elementi ovih matrica zavisiti od koordinatnog sistema izabranog za predstavljanje vektora, a znaci jednakosti se moraju shvatiiti samo u smislu relacije ekvivalencije. Vektor, naime, *nije* matrica-vrsta ili matrica-kolona, već se samo radi o obostrano jednoznačnom pridruživanju jednog matematičkog objekta (vektora) drugom (matrici), jer to pridruživanje pruža određene prednosti. U ovakvoj reprezentaciji su, kako se jasno vidi, pravila jednakosti, sabiranja i množenja skalarom kod matrica u saglasnosti sa odgovarajućim pravilima kod vektora. Međutim, da bi se zakon (1.27) formiranja skalarnog proizvoda, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i$, doveo u saglasnost sa pravilom matričnog množenja (5.7), treba prvi vektor predstaviti kao matricu-vrstu, a drugi kao matricu kolonu, pošto će rezultat množenja matrice tipa 1×3 i matrice tipa 3×1 biti matrica tipa 1×1, tj. skalar. Za dve matrice-vrste ili dve matrice-kolone matrično množenje uopšte nije definisano. Dakle:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_1\ A_2\ A_3) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = A_i B_i. \tag{5.28}$$

Vektorski proizvod $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ se predstavljanjem vektora samo pomoću matrica-vrsta ili matrica-kolona ne može ni na koji način dovesti u vezu sa pravilom matričnog množenja, već se jedan od vektora mora prikazati pomoću složenije matrice. Ovo ukazuje da je priroda vektorskog proizvoda kompleksnija, o čemu će još biti reči na kraju ovog odeljka.

Predstavljanje tenzora matricama. Svakom tenzoru $\mathcal{T}$ može se obostrano jednoznačno pridružiti jedna kvadratna matrica trećeg reda sa realnim koeficijentima. Ova matrica ima elemente kao šema brojeva (4.6) i ovde ćemo je prepisati radi daljih razmatranja:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}_3 \end{pmatrix}. \tag{5.29}$$

Navedeni su i alternativni izrazi za koeficijente ove matrice, pošto u skladu sa oznakama prethodne Glave imamo $T_{ij} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{T}_i$. Kao i kod relacija (5.27), matrični elementi će zavisiti od izbora koordinatnog sistema, a znak jednakosti između tenzora i matrice shvatamo samo u smislu relacija ekvivalencije. Kao što se iz gornje jednačine vidi element i-te vrste j-te kolone matrice pridružene tenzoru $\mathcal{T}$ jednak je skalarnom proizvodu $(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}_j)$, a pošto se koordinatni vektori dobijaju na osnovu formule $\mathbf{T}_j = \mathcal{T} \cdot \mathbf{e}_j$, definitivno nalazimo:

$$(\mathcal{T})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathcal{T} \cdot \mathbf{e}_j. \tag{5.30}$$

Ovde je sa $(\mathcal{T})_{ij}$ simbolički označen element i-te vrste i j-te kolone matrice pridružene datom tenzoru na osnovu konvencije (5.29). Uočimo da je zbog osobine asocijativnosti (4.17) svejedno kojim se redosledom operacije u (5.30) izvode. Zapazimo takođe da je $(\mathcal{T})_{ij} = T_{ji}$, usled čega treba obratiti pažnju da kod računanja ne dođe do zabune prilikom pisanja indeksa.

Iz (5.30) neposredno izlazi da *nula-tenzoru odgovara nulta matrica trećeg reda*, kao i da *jediničnom tenzoru odgovara jedinična matrica trećeg reda*, nezavisno od koordinatnog sistema izabranog za računanje matričnih elemenata. Za jedinični tenzor recimo, gornja tvrdnja se dokazuje ovako:

$$(\mathcal{E})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathcal{E} \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\} \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot [\mathbf{e}_k (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j)] = \mathbf{e}_i \cdot [\mathbf{e}_k \delta_{kj}] = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}.$$

Sledeća tri stava su takođe očevidna: (a) *jednakim tenzorima odgovaraju jednake matrice*:

$$\mathcal{T} = \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{T})_{ij} = (\mathcal{U})_{ij}, \tag{5.31}$$

(b) *sumi tenzora odgovara suma njima pridruženih matrica:*

$$\mathcal{V} = \mathcal{T} + \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{V})_{ij} = (\mathcal{T})_{ij} + (\mathcal{U})_{ij}, \tag{5.32}$$

(c) *proizvodu tenzora i skalara odgovara proizvod matrice i skalara:*

$$\mathcal{U} = \alpha \mathcal{T} \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{U})_{ij} = \alpha (\mathcal{T})_{ij}, \tag{5.33}$$

i neposredne su posledice relacije (5.30).

Analizirajući dalje opisani način pridruživanja matrice tenzoru možemo dokazati da *proizvodu dva tenzora odgovara matrica jednaka proizvodu matrica pridruženih tenzorima-množiteljima u istom redosledu*. Zaista, ako sa $\mathcal{V}$ označimo proizvod $\mathcal{T} \cdot \mathcal{U}$ i iskoristimo definiciju (4.35) množenja tenzora, na osnovu (5.30) dobijamo:

$$\begin{aligned} (\mathcal{V})_{ij} = (\mathcal{T} \cdot \mathcal{U})_{ij} &= \mathbf{e}_i \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathcal{U}) \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot (\{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\} \cdot \{\mathbf{U}_l, \mathbf{e}_l\}) \cdot \mathbf{e}_j = \\ &= \mathbf{e}_i \cdot [(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{U}_l) \{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_l\}] \cdot \mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{U}_l)(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}_k)(\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_j) = \\ &= (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{U}_l)(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}_k)\delta_{lj} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}_k)(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{U}_j) = \\ &= (\mathbf{e}_i \cdot \mathcal{T} \cdot \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_k \cdot \mathcal{U} \cdot \mathbf{e}_j), \end{aligned}$$

pošto je $\mathbf{T}_k = \mathcal{T} \cdot \mathbf{e}_k$ i $\mathbf{U}_j = \mathcal{U} \cdot \mathbf{e}_j$. Prema tome:

$$\mathcal{V} = \mathcal{T} \cdot \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{V})_{ij} = (\mathcal{T})_{ik} \cdot (\mathcal{U})_{kj}, \tag{5.34}$$

u skladu sa pravilom matričnog množenja. Direktna posledica ovoga je da *inverznom tenzoru odgovara inverzna matrica*, jer:

$$\mathcal{T}^{-1} \cdot \mathcal{T} = \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{T}^{-1})_{ik} (\mathcal{T})_{kj} = (\mathcal{E})_{ij} = \delta_{ij}, \tag{5.35}$$

što se poklapa sa definicijom inverzne matrice (5.12).

Slično se može pokazati da *konjugovanom tenzoru odgovara transponovana matrica*, jer na osnovu definicije (4.27) konjugovanog tenzora za njegov matrični element nalazimo:

$$(\mathcal{T}^*)_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathcal{T}^* \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \{\mathbf{e}_k, \mathbf{T}_k\} \cdot \mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k)(\mathbf{T}_k \cdot \mathbf{e}_j) =$$
$$= (\mathbf{T}_k \cdot \mathbf{e}_j)\,\delta_{ik} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{T}_i = \mathbf{e}_j \cdot \mathcal{T} \cdot \mathbf{e}_i = (\mathcal{T})_{ji},$$

pa možemo pisati:

$$(\mathcal{T}^*)_{ij} = (\mathcal{T})_{ji}, \tag{5.36}$$

čime je navedena tvrdnja dokazana. Iz poslednja dva stava, (5.35) i (5.36), neposredno proizilazi da *simetričnom tenzoru odgovara simetrična matrica, antisimetričnom tenzoru antisimetrična matrica, a unitarnom tenzoru ortogonalna matrica.* Dakle, celokupna algebarska struktura skupa tenzora u trodimenzionalnom Euklidovom prostoru odražava se u algebarskoj strukturi skupa njima pridruženih kvadratnih matrica trećeg reda. Prostije rečeno, umesto da u nekom datom problemu operišemo direktno sa tenzorima na osnovu pravila *tenzorske algebre* definisanih u prethodnoj Glavi, možemo sve tenzore izraziti pomoću matrica i isti problem rešiti na osnovu pravila *matrične algebre*, iznetih u prvom odeljku ove Glave. Kaže se da su skupovi tenzora i matrica trećeg reda *izomorfni*.

I pravila množenja tenzora sa vektorima dozvoljavaju da se ove operacije svedu na množenje matrica. Zaista, ako relacije $\mathbf{B} = \mathcal{T} \cdot \mathbf{A}$ i $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathcal{T}$ projektujemo na koordinatne ose, dobićemo:

$$B_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{B} = \mathbf{e}_i \cdot \mathcal{T} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{e}_i \cdot \mathcal{T}(\mathbf{e}_j A_j) = (\mathbf{e}_i \cdot \mathcal{T} \cdot \mathbf{e}_j) A_j = (\mathcal{T})_{ij} A_j,$$
$$C_i = \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{A} \cdot \mathcal{T} \cdot \mathbf{e}_i = (A_j \mathbf{e}_j) \cdot \mathcal{T} \cdot \mathbf{e}_i = A_j (\mathbf{e}_j \cdot \mathcal{T} \cdot \mathbf{e}_i) = A_j (\mathcal{T})_{ji},$$

što se može dovesti u vezu sa pravilom matričnog množenja ako pri množenju tenzora vektorom s desna vektore napišemo u obliku matrica-kolona, a pri množenju sleva u obliku matrica-vrsta:

$$\mathbf{B} = \mathcal{T} \cdot \mathbf{A} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \tag{5.37}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathcal{T} \;\Rightarrow\; (C_1\, C_2\, C_3) = (A_1\, A_2\, A_3) \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix}.$$

Ispravnost ovakvog prikazivanja vektora je lako proveriti neposrednim množenjem, vodeći pri tom računa da je $T_{ij} = (\mathcal{T})_{ji}$, kao što je već ranije istaknuto.

Vektorski proizvod. Komponente vektorskog proizvoda dva vektora, $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ mogu se pomoću simbola Levi-Civita (1.32) napisati u obliku (1.33), koji ovde prepisujemo radi daljih razmatranja:

$$C_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k. \tag{5.38}$$

Ovaj zakon obrazovanja komponenata vektora **C** od komponenata vektora **A** i **B** ne možemo dovesti u vezu sa pravilom matričnog množenja ukoliko se ograničimo samo na predstavljanje vektora matricama-vrstama i matricama-kolonama (5.27), već moramo jedan od vektora množilaca zameniti podesno odabranim *tenzorom*, tj. pisati:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathcal{A} \cdot \mathbf{B}, \text{ ili } \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathcal{B}. \tag{5.39}$$

U prvoj relaciji je prvi množilac zamenjen tenzorom, što znači da za drugi treba pisati matricu-kolonu, dok je u drugoj relaciji drugi množilac zamenjen tenzorom, pa za preostali vektor treba uzeti matricu-vrstu, sve to u skladu sa (5.37). Tako uvedene tenzore $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ zvaćemo *dualnim* vektorima **A** i **B** u smislu relacije (5.39). Da bismo eksplicitno našli komponente ovih tenzora, prepisaćemo (5.39) kao

$$C_i = (\mathcal{A})_{ik} B_k, \text{ odnosno } C_i = A_k (\mathcal{B})_{ki},$$

pa poređenjem sa (5.38) zaključiti da mora biti:

$$(\mathcal{A})_{ik} = -\varepsilon_{ikj} A_j, \quad (\mathcal{B})_{ji} = -\varepsilon_{jik} B_k,$$

tj. u oba slučaja se dualni tenzor formira na isti način. Zapazimo da su ovi tenzori *antisimetrični* što sledi iz ponašanja simbola Levi-Civita pri izmeni mesta dva susedna indeksa. Kao i svi antisimetrični tenzori, oni imaju svoje *dualne vektore* jednake, prema (4.51), negativnoj polovini njihove vektorske invarijante, tako da se na osnovu formule (4.26) za nalaženje ove invarijante, lako utvrđuje da su ti dualni vektori upravo **A** odnosno **B**. To, uostalom, sledi i neposredno iz (5.39). Dakle, *tako definisana dualnost je uzajamna.* Iz svega rečenog izlazi da za uzajamno dualne vektore i antisimetrični tenzor imamo:

$$(\mathcal{A})_{ij} = -\varepsilon_{ijk} A_k, \quad A_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} (\mathcal{A})_{jk}. \tag{5.40}$$

Istaknimo da su ove relacije dobijene iz (4.26) i (4.51). One se mogu dobiti i jedna iz druge, ako se uzme u obzir osobina simbola Levi-Civita $\varepsilon_{imn}\varepsilon_{jmn} = 2\delta_{ij}$, koju nije teško proveriti.

Najzad, relacija (5.38) dopušta i sledeći zaključak: *Vektorski proizvod* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *je vektorska invarijanta tenzora* $\mathcal{C}$ *čije su komponente* $(\mathcal{C})_{ij} = A_i B_j$. Naime, prema (4.26), ova vektorska invarijanta je

$$\mathbf{Q}_{\mathcal{C}} = \varepsilon_{ijk} (\mathcal{C})_{jk} \mathbf{e}_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \mathbf{e}_i = \mathbf{A} \times \mathbf{B},$$

vodeći računa da je $T_{kj} = (\mathcal{T})_{jk}$ u toj formuli. Ovakva interpretacija vektorskog proizvoda se najčešće navodi u literaturi.

5.3. NORMALNI OBLIK TENZORA

Svojstveni pravci i svojstvene vrednosti tenzora. Iz relacija (4.7) i (4.8) se vidi da je tenzor operator koji svakom vektoru **A** pridružuje neki drugi vektor **B** po određenom zakonu ($\mathbf{B} = \mathcal{T} \cdot \mathbf{A}$). U opštem slučaju vektori **B** i **A** nisu kolinearni. Postavimo sada pitanje da li se za dati tenzor $\mathcal{T}$ može naći neki vektor **X** različit od nule i takav da je

$$\mathcal{T} \cdot \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}, \tag{5.41}$$

dakle da je vektor njemu pridružen pomoću tenzora $\mathcal{T}$ kolinearan sa njim. Ukoliko takav vektor **X** postoji, zvaćemo ga *svojstvenim vektorom* datog tenzora $\mathcal{T}$, a pripadajući skalar λ će biti korespondentna *svojstvena vrednost* tenzora $\mathcal{T}$.

Na primer, tenzor $\mathcal{U} = 2\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\} + \{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\} + \{-2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\}$, čija će matrica, u koordinatnom sistemu u kome su $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ jedinični vektori koordinatnih osa, biti oblika:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ima svojstvene vektore $\mathbf{X}_1 = \mathbf{e}_1$ i $\mathbf{X}_2 = 2\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$, pošto je, kako se lako može proveriti:

$$\mathcal{U}\cdot\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{X}_1;$$

$$\mathcal{U}\cdot\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = -\mathbf{X}_2,$$

i odgovarajuće svojstvene vrednosti su $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -1$.

Ako je $\mathbf{X}$ svojstveni vektor tenzora $\mathcal{T}$, biće to i proizvoljan njemu kolinearan vektor $\alpha\mathbf{X}$ gde je α ma kakav skalar. Naime:

$$\mathcal{T}\cdot(\alpha\mathbf{X}) = \alpha(\mathcal{T}\cdot\mathbf{X}) = \alpha(\lambda\mathbf{X}) = \lambda(\alpha\mathbf{X}),$$

tako da je ispravnije govoriti o *svojstvenom pravcu* datog tenzora. Svakom vektoru koji leži na svojstvenom pravcu tenzor pridružuje vektor koji takođe leži na svojstvenom pravcu i čiji je intenzitet uvećan za faktor λ. U literaturi se često koriste i termini *glavni* ili *karakteristični pravci* i *glavne* ili *karakteristične vrednosti* tenzora.

Problem nalaženja svojstvenih vrednosti datog tenzora $\mathcal{T}$ zove se *svojstveni problem*. Pre nego što pređemo na razmatranje ovog problema, načinimo sledeće dve primedbe.

(a) *Tenzor može imati i nulu kao svojstvenu vrednost*, tj. vektorima koji leže na nekom pravcu pridruživati nula-vektor. Takav je, na primer, slučaj kod tenzora

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

za pravac definisan vektorom $\mathbf{X} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, što je lako proveriti pomoću (5.37). Takav slučaj uvek imamo kod antisimetričnih tenzora, gde je pravac definisan vektorskom invarijantom $\mathbf{Q}$, prema (4.51), uvek svojstveni pravac sa svojstvenom vrednošću nula $\left(\mathcal{T}\cdot\mathbf{Q} = -\frac{1}{2}\mathbf{Q}\times\mathbf{Q} = 0\right)$.

(b) *Jednoj istoj svojstvenoj vrednosti datog tenzora može odgovarati više nego jedan svojstveni pravac*, kao što je, na primer, slučaj kod tenzora

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix},$$

koji ima, kako se može lako proveriti, dva nekolinearna svojstvena vektora, $\mathbf{X}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ i $\mathbf{X}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, oba sa istom svojstvenom vrednošću $\lambda = 3$. Takva svojstvena vrednost, kojoj odgovara više nego jedan svojstveni pravac, zove se *degenerisana*. Ako su $\mathbf{X}_1$ i $\mathbf{X}_2$ dva nekolinearna vektora koji odgovaraju istoj degenerisanoj svojstvenoj vrednosti, onda je i $\alpha_1\mathbf{X}_1 + \alpha_2\mathbf{X}_2$, gde su α_1 i α_2 ma kakvi skalari, takođe svojstveni vektor. Drugim rečima, bilo koji vektor koji leži u ravni određenoj dvama svojstvenim vektorima koji pripadaju istoj degenerisanoj svojstvenoj vrednosti je takođe svojstveni vektor. Najzad, ako su $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ i $\mathbf{X}_3$ tri nekomplanarna svojstvena vektora koji pripadaju istoj degenerisanoj svojstvenoj vrednosti, onda će bilo koji vektor biti svojstveni vektor takvog tenzora, jer se svaki vektor može napisati u obliku sume $\alpha_1\mathbf{X}_1 + \alpha_2\mathbf{X}_2 + \alpha_3\mathbf{X}_3$, ako su $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ i $\mathbf{X}_3$ nekomplanarni. Osobinu da je svaki vektor njegov svojstveni vektor ima samo izotropni tenzor $\mathcal{T} = \lambda\mathcal{E}$, što je očevidno.

5.4. Svojstveni problem. Hamiltonova jednačina. Jednačina svojstvenog problema (5.41) ekvivalentna je, prema (4.8) sledećim trima skalarnim jednačinama:

$$T_{kj}X_k = \lambda X_j, \quad \text{tj.} \quad (T_{kj} - \lambda\delta_{kj})X_k = 0. \tag{5.42}$$

U eksplicitnoj notaciji:

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda)X_1 + T_{21}X_2 + T_{31}X_3 &= 0, \\ T_{12}X_1 + (T_{22} - \lambda)X_2 + T_{32}X_3 &= 0, \\ T_{13}X_1 + T_{23}X_2 + (T_{33} - \lambda)X_3 &= 0. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Gornji sistem od tri algebarske linearne i homogene jednačine po nepoznatim komponentama svojstvenog vektora X_1, X_2, X_3 može imati netrivijalna rešenja jedino ako mu je determinanta jednaka nuli:

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} - \lambda & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5.44}$$

Nakon razvijanja ove determinante i sređivanja, dobija se sledeća kubna jednačina za određivanje svojstvenih vrednosti:

$$\lambda^3 - S_1\lambda^2 + S_2\lambda - S_3 = 0, \tag{5.45}$$

gde su S_1, S_2 i S_3 skalarne invarijante tenzora $\mathcal{T}$ definisane jednačinama (4.18), (4.19) i (4.24). Činjenicu da su koeficijenti gornje kubne jednačine invarijante treba posebno istaći, pošto to znači da *oblik ove jednačine neće zavisiti od izbora koordinatnog sistema u kome smo tenzoru $\mathcal{T}$ pridružili matricu* u skladu sa (5.29) i (5.30).

Jednačina (5.45) se zove *karakteristična* ili *Hamiltonova jednačina* za dati tenzor $\mathcal{T}$. Kao i svaka kubna jednačina sa realnim koeficijentima, ona može imati ili sva tri rešenja realna, ili jedno realno, a dva konjugovano-kompleksna. Dakle, ona će u svakom slučaju imati jedno realno rešenje, što znači da *ma kakav tenzor mora imati bar jedan svojstveni pravac*. Naime, ako to jedno realno rešenje označimo sa λ_1 i uvrstimo ga u bilo koje dve od tri jednačine (5.43), možemo naći odnose dveju komponenata pripadajućeg svojstvenog vektora $\mathbf{X}_1$ prema trećoj komponenti koja ostaje proizvoljna, tj. odrediti svojstveni pravac.

Za dalju analizu podesno je svojstveni problem rešavati u koordinatnom sistemu čija se jedna osa poklapa sa nađenim svojstvenim pravcem. Neka to bude X'_1-osa. Ostale dve ose možemo izabrati proizvoljno, uz jedini uslov da

budu ortogonalne međusobno i na X'_1-osu, kao i da te tri ose obrazuju desni triedar. U tom koordinatnom sistemu je koordinatni vektor pridružen X'_1-osi $\mathbf{T}'_1 = \mathcal{T} \cdot \mathbf{e}'_1 = \lambda_1 \mathbf{e}'_1$, pa komponente prve kolone matrice tog tenzora postaju $T'_{11} = \lambda_1$, $T'_{12} = T'_{13} = 0$. Jednačina (5.44) u tom koordinatnom sistemu ima oblik:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & T'_{21} & T'_{31} \\ 0 & T'_{22} - \lambda & T'_{32} \\ 0 & T'_{23} & T'_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{5.46}$$

i njenim razvijanjem se dobija:

$$(\lambda_1 - \lambda) [(T'_{22} - \lambda)(T'_{33} - \lambda) - T'_{23} T'_{32}] = 0. \tag{5.47}$$

Iz ovog oblika karakteristične jednačine se vidi da će priroda njena preostala dva rešenja zavisiti od diskriminante kvadratnog trinoma po λ koji stoji u srednjoj zagradi. Nakon neznatnog sređivanja, za ovu diskriminantu nalazimo:

$$D = (T'_{22} - T'_{33})^2 + 4\, T'_{23} T'_{32}. \tag{5.48}$$

Ako je $D > 0$, preostala dva rešenja su takođe realna, tj. tenzor ima tri realne svojstvne vrednosti. Ako je, pak, $D < 0$ preostala dva rešenja su konjugovano-kompleksna.

5.5. Svojstveni problem simetričnog tenzora. Dalju diskusiju ćemo ograničiti na slučaj kada je tenzor čije svojstvene vrednosti i svojstvene pravce tražimo *simetričan*, tj. kada u (5.46) treba staviti $T'_{21} = T'_{31} = 0$ i $T'_{23} = T'_{32}$, pošto je taj slučaj najinteresantniji za primene u fizici. U tom slučaju važe sledeća dva stava:

(a) *Kod simetričnih tenzora su sve tri svojstvene vrednosti realne.* Naime, u tom slučaju zbog simetrije matrice pridružene tenzoru imamo $T'_{23} = T'_{32}$, tako da diskriminanta (5.48) predstavlja sumu dva potpuna kvadrata i stoga ne može biti negativna.

(b) *Kod simetričnih tenzora su svojstveni pravci koji odgovaraju različitim svojstvenim vrednostima međusobno ortogonalni.* Da bismo ovo dokazali, označimo sa λ_1 i λ_2 dve svojstvene vrednosti tenzora $\mathcal{T}$ a sa $\mathbf{X}_1$ i $\mathbf{X}_2$ njima pripadajuće svojstvene vektore, imaćemo:

$$\mathcal{T} \cdot \mathbf{X}_1 = \lambda_1 \mathbf{X}_1, \quad \mathcal{T} \cdot \mathbf{X}_2 = \lambda_2 X_2,$$

pa ako pomnožimo prvu od ovih jednačina skalarno sa $\mathbf{X}_2$ a drugu sa $\mathbf{X}_1$ i oduzmemo ih dobićemo:

$$\mathbf{X}_2 \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{X}_1) - \mathbf{X}_1 \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{X}_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2).$$

Leva strana dobijene jednakosti je nula na osnovu relacije (4.47), tako da se ona svodi na

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2) = 0.$$

Ukoliko je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, odavde izlazi $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = 0$, što je trebalo pokazati.

Karakteristična jednačina simetričnog tenzora ima, dakle, ima uvek tri realna rešenja, u skladu sa stavom (a). Ako su ta tri rešenja međusobno različita, uvrštavajući u sistem (5.43) redom $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ možemo odrediti tri svojstvena pravca. Oni će, na osnovu stava (b), biti međusobno ortogonalni

pa ih možemo uzeti za ose jednog novog koordinatnog trijedra. Ako jedinične vektore svojstvenih pravaca (tj. jedinične vektore novih osa) označimo sa $\mathbf{e}'_\alpha$, imaćemo $\mathbf{T}'_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{e}'_\alpha$, pa prema (5.29) simetričnom tenzoru u tom koordinatnom sistemu možemo pridružiti dijagonalnu matricu:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \tag{5.49}$$

koja na glavnoj dijagonali ima svojstvene vrednosti. U skladu sa dijadskom reprezentacijom (4.14) možemo isti tenzor prikazati i kao:

$$\mathcal{T} = \lambda_1 \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_1\} + \lambda_2 \{\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_2\} + \lambda_3 \{\mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_3\} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \{\mathbf{e}'_\alpha, \mathbf{e}'_\alpha\} \tag{5.50}$$

(sumaciona konvencija ovde nije pogodna, jer se indeks po kome se sumira pojavljuje triput). Relacijom (5.50) dat je tzv. *normalni* (ili *glavni*) oblik simetričnog tenzora. Nalaženje svojstvenih pravaca simetričnog tenzora se, zbog oblika (5.49), veoma često naziva *dijagonalizacija* matrice tenzora.

Prodiskutujmo sad slučaj kad karakteristična jednačina ima višestruke korene. Ako postoji jedan *dvostruk* koren, diskriminanta (5.48) koja u ovom slučaju dobija, zbog simetričnosti tenzora, oblik:

$$D = (T'_{22} - T'_{33})^2 + 4\, T'^2_{23},$$

mora biti jednaka nuli, tj. mora biti $T'_{22} = T'_{33}$ i $T'_{23} = T'_{32} = 0$. Iz (5.47) se onda vidi da dvostruki koren upravo ima vrednost T'_{22} odnosno T'_{33}, što znači da matrica zadanog tenzora postaje dijagonalna u ma kom koordinatnom sistemu sa X'_1-osom kolinearnom sa svojstvenim pravcem koji odgovara jednostrukoj svojstvenoj vrednosti, bez obzira kako se odaberu ostale dve ose. Kod simetričnog tenzora, dakle, dvostruko rešenje karakteristične jednačine predstavlja *degenerisanu* svojstvenu vrednost i *bilo koja dva vektora u ravni normalnoj na treći svojstveni pravac mogu biti uzeti za svojstvene vektore.* Postoji, prema tome, beskonačno mnogo koordinatnih sistema u kojima će matrica tog tenzora biti dijagonalna:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

i svi se oni dobijaju jedan iz drugoga rotacijom oko pravca koji pripada trećoj, nedegenerisanoj svojstvenoj vrednosti.

Najzad, kada su sva tri korena karakteristične jednačine jednaka, njegova matrica je dijagonalna u bilo kom koordinatnom sistemu, jer, da bi postojao trostruki koren, relacija (5.47) mora se svoditi na $T'_{11} = T'_{22} = T'_{33}$. U tom slučaju ma koji pravac u prostoru predstavljaće glavni pravac tenzora.

Na osnovu iznetog, možemo doneti sledeći zaključak. *Za svaki simetrični tenzor $\mathcal{T}$ se može naći pravougli koordinatni sistem sa jediničnim vektorima koordinatnih osa $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$, takav da u tom sistemu tenzor bude predstavljen sumom triju dijada* (5.50), *odnosno dijagonalnom matricom sa svojstvenim vrednostima na glavnoj dijagonali.* Ako su sva tri rešenja karakteristične jednačine različita, izbor jediničnih vektora $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ je *jednoznačan* i oni se poklapaju sa svojstve-

nim pravcima tenzora $\mathcal{T}$. Ako, pak, **karakteristična** jednačina ima i višestruke (dvostruki ili trostruki) korene, ovaj izbor ***nije jednoznačan***. U slučaju dvostrukog korena, mogu se za koordinantne ose uzeti bilo koja dva uzajamno normalna pravca koja leže u ravni normalnoj na treći glavni pravac, pridružen preostalom (jednostrukom) rešenju. Kad se radi o trostrukom korenu, mogu se za pisanje tenzora u glavnom obliku uzeti bilo koja tri uzajamno ortogonalna pravca za koordinatne ose.

Kod primena u Teorijskoj fizici od velike važnosti je sledeći stav: *dva simetrična tenzora komutiraju samo ako im se svojstveni pravci poklapaju*. Zaista, ako oba tenzora imaju zajedničke svojstvene pravce onda se oba mogu, u istom koordinatnom sistemu, prikazati dijagonalnim matricama. To će biti moguće u onom koordinatnom sistemu čije se ose poklapaju sa zajedničkim svojstvenim pravcima. Međutim, dve dijagonalne matrice sigurno komutiraju. Dakle, ako imaju zajedničke svojstvene pravce, dva simetrična tenzora komutiraju (uslov iz gornjeg stava je *dovoljan*). S druge strane, ako posmatrana dva tenzora komutiraju, onda će u koordinatnom sistemu čije se ose poklapaju sa svojstvenim pravcima jednog od njih taj biti predstavljen dijagonalnom matricom, dok će drugi biti predstavljen nedijagonalnom simetričnom matricom. Međutim, nije teško neposrednim matričnim množenjem proveriti da ako dve matrice komutiraju, a jedna je dijagonalna, onda i druga nužno mora biti dijagonalna. Drugim rečima, izabrane koordinatne ose moraju biti svojstveni pravci i drugog tenzora (uslov iz gornjeg stava je *potreban*). S druge strane, proizvod dve dijagonalne matrice je takođe dijagonalna matrica, iz čega proizilazi da *proizvod dva simetrična tenzora koji komutiraju ima iste glavne pravce kao i tenzori-množitelji.*

Normalni oblik proizvoljnog tenzora. Za tenzor koji nije simetričan ne postoji mogućnost da se formulišu bilo kakvi opšti zaključci o broju realnih svojstvenih vrednosti ili o uzajamnom odnosu svojstvenih pravaca koji im odgovaraju. Višestrukim rešenjima karakteristične jednačine ne mora odgovarati, kao kod simetričnih tenzora, degeneracija svojstvenih pravaca. To se lepo vidi na primeru tenzora

$$\mathcal{U}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

navedenog na početku ovog odeljka. Njegova karakteristična jednačina ima rešenja $\lambda_1=-1$ i $\lambda_{2,3}=2$, tj. ima dvostruki koren. Međutim, ta svojstvena vrednost nije degenerisana, jer joj odgovara samo jedan svojstveni pravac. Zaista, ako pokušamo odrediti koeficijente α, β i γ iz uslova:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

dobićemo $\beta=0$, $\gamma=0$, α proizvoljno, tj. svojstveni vektori mogu ležati samo na X_1-osi. (Kada bi se analogi postupak primenio kod simetričnog tenzora čija je dvostruka svojstvena vrednost nađena, konstatovalo bi se da *dva* koeficijenta ostaju proizvoljna).

Ma kakav tenzor $\mathcal{T}$ može se svesti na glavni (normalni) oblik, analog (5.50). U tom cilju uočimo da će proizvod $\mathcal{T}^*\cdot\mathcal{T}$ biti simetričan tenzoru, bez obzira kakav je tenzor $\mathcal{T}$. To sledi iz jednačine (4.48). Kao i svaki drugi

simetrični tenzor, i $\mathcal{T}^*\cdot\mathcal{T}$ ima tri uzajamno normalna svojstvena pravca i može se, prema (5.50), prikazati kao:

$$\mathcal{T}^*\cdot\mathcal{T}=\mu_1\{\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_1'\}+\mu_2\{\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_2'\}+\mu_3\{\mathbf{e}_3',\mathbf{e}_3'\},\tag{5.51}$$

gde su $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ jedinični vektori njegovih svojstvenih pravaca, a μ_1, μ_2, μ_3 njegove svojstvene vrednosti. U koordinatnom sistemu određenom gornjim jediničnim vektorima, tenzor $\mathcal{T}$ se može predstaviti kao:

$$\mathcal{T}=\{\mathbf{T}_1',\mathbf{e}_1'\}+\{\mathbf{T}_2',\mathbf{e}_2'\}+\{\mathbf{T}_3',\mathbf{e}_3'\}=\{\mathbf{T}_k',\mathbf{e}_k'\},\tag{5.52}$$

u skladu sa (4.14). Po definiciji konjugovanog tenzora (4.27) onda je

$$\mathcal{T}^*=\{\mathbf{e}_1',\mathbf{T}_1'\}+\{\mathbf{e}_2',\mathbf{T}_2'\}+\{\mathbf{e}_3',\mathbf{T}_3'\}=\{\mathbf{e}_k',\mathbf{T}_k'\},$$

tako da direktnim množenjem ova dva tenzora nalazimo:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^*\cdot\mathcal{T}=&(\mathbf{T}_1'\cdot\mathbf{T}_1')\{\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_1'\}+(\mathbf{T}_1'\cdot\mathbf{T}_2')\{\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2'\}+(\mathbf{T}_1'\cdot\mathbf{T}_3')\{\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_3'\}+\\&+(\mathbf{T}_2'\cdot\mathbf{T}_1')\{\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_1'\}+(\mathbf{T}_2'\cdot\mathbf{T}_2')\{\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_2'\}+(\mathbf{T}_2'\cdot\mathbf{T}_3')\{\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'\}+\\&+(\mathbf{T}_3'\cdot\mathbf{T}_1')\{\mathbf{e}_3',\mathbf{e}_1'\}+(\mathbf{T}_3'\cdot\mathbf{T}_2')\{\mathbf{e}_3',\mathbf{e}_2'\}+(\mathbf{T}_3'\cdot\mathbf{T}_3')\{\mathbf{e}_3',\mathbf{e}_3'\}.\end{aligned}$$

Ovaj rezultat treba da bude identičan sa (5.51), pa upoređivanjem nalazimo da koordinatni vektori $\mathbf{T}_1'$, $\mathbf{T}_2'$, $\mathbf{T}_3'$ tenzora $\mathcal{T}$ moraju zadovoljavati uslove:

$$\mathbf{T}_1'\cdot\mathbf{T}_1'=\mu_1,\quad \mathbf{T}_2'\cdot\mathbf{T}_2'=\mu_2,\quad \mathbf{T}_3'\cdot\mathbf{T}_3'=\mu_3,$$

$$\mathbf{T}_1'\cdot\mathbf{T}_2'=\mathbf{T}_1'\cdot\mathbf{T}_3'=\mathbf{T}_2'\cdot\mathbf{T}_3'=0,$$

tj. moraju biti uzajamno ortogonalni. Označimo li njihove jedinične vektore sa $\mathbf{e}_1''$, $\mathbf{e}_2''$, $\mathbf{e}_3''$, možemo (5.52) prepisati u obliku:

$$\mathcal{T}=\sqrt{\mu_1}\{\mathbf{e}_1'',\mathbf{e}_1'\}+\sqrt{\mu_2}\{\mathbf{e}_2'',\mathbf{e}_2'\}+\sqrt{\mu_3}\{\mathbf{e}_3'',\mathbf{e}_3'\}.\tag{5.53}$$

Ta je ***normalni** (**ili glavni**) **oblik bilo kakvog tenzora***. Kao što se vidi, za proizvoljan tenzor $\mathcal{T}$ se mogu naći dva pravougla trijedra jediničnih vektora, $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ i $\mathbf{e}_1''$, $\mathbf{e}_2''$, $\mathbf{e}_3''$, pomoću kojih se tenzor može prikazati u obliku sume triju dijada (5.53).

Prvi od ovih trijedara čine svojstveni pravci simetričnog tenzora $\mathcal{T}^*\cdot\mathcal{T}$ i nalaze se rešavanjem njegovog svojstvenog problema, a drugi trijedar čine pravci koordinatnih vektora tenzora $\mathcal{T}$ u sistemu svojstvenih pravaca tenzora $\mathcal{T}^*\cdot\mathcal{T}$. Kod simetričnih tenzora se ova dva pravougla trijedra poklapaju.

5.4. AFINE TRANSFORMACIJE

U dosadašnjem izlaganju tenzore smo shvatili isključivo kao operatore koji datom vektoru **A** pridružuju drugi vektor $\mathbf{B}=\mathcal{U}\cdot\mathbf{A}$ *u istom koordinatnom sistemu*. Takav je, na primer, bio slučaj sa gustinom struje **j** i električnim poljem **E** u Ohm-ovom zakonu razmotrenom na početku Glave 4. Međutim, tenzor se može shvatiti i kao operator koji opisuje jednu *transformaciju prostora*, tj. svakom vektoru položaja **r** u koordinatnom sistemu *S* pridružuje vektor položaja $\mathbf{r}'=\mathcal{U}\cdot\mathbf{r}$ u drugom koordinatnom sistemu *S'*. Takve transformacije, pri kojima između novih i starih koordinata postoji zavisnost oblika opšte linear-

ne funkcije, nazivaju se *afine*. Stoga se tenzori, osobito u matematičkoj literaturi, nazivaju još i *afinori*. Na primer, afina transformacija koju opisuje neki verzor (odeljak 4.4) je rotacija koordinatnog sistema oko ose određene njegovom vektorskom invarijantom za ugao određen njegovim tragom (v. zad. 4.8).

Da bi afina transformacija opisana tenzorom $\mathcal{U}$ bila jednoznačna, ovaj tenzor ne sme biti singularan, tj. mora postojati inverzni tenzor $\mathcal{U}^{-1}$ koji opisuje inverznu transformaciju. Neka su $\mathbf{A}' = \mathcal{U}\cdot\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}' = \mathcal{U}\cdot\mathbf{B}$ vektori u koordinatnom sistemu S' u koje prelaze vektori $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ u koordinatnom sistemu S prilikom afine transformacije tenzorom $\mathcal{U}$. Neka, nadalje, između $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ postoji veza $\mathbf{B} = \mathcal{T}\cdot\mathbf{A}$. Onda i između $\mathbf{A}'$ i $\mathbf{B}'$ mora postojati veza istog tipa, $\mathbf{B}' = \mathcal{T}'\cdot\mathbf{A}'$, pri čemu tenzor $\mathcal{T}'$ zavisi od $\mathcal{T}$ i $\mathcal{U}$. Nađimo ovu vezu.

Zbog $\mathbf{A}' = \mathcal{U}\cdot\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}' = \mathcal{U}\cdot\mathbf{B}$, kao i zbog nesingularnosti tenzora $\mathcal{U}$, imamo $\mathbf{A} = \mathcal{U}^{-1}\cdot\mathbf{A}'$ i $\mathbf{B} = \mathcal{U}^{-1}\cdot\mathbf{B}'$. Prema tome, relacija $\mathbf{B} = \mathcal{T}\cdot\mathbf{A}$ se prepisuje kao

$$\mathcal{U}^{-1}\cdot\mathbf{B}' = \mathcal{T}\cdot(\mathcal{U}^{-1}\cdot\mathbf{A}') = (\mathcal{T}\cdot\mathcal{U}^{-1})\cdot\mathbf{A}',$$

pa ako primenimo tenzor $\mathcal{U}$ s leva nalazimo eksplicitno:

$$\mathbf{B}' = \mathcal{U}\cdot[(\mathcal{T}\cdot\mathcal{U}^{-1})\cdot\mathbf{A}'] = (\mathcal{U}\cdot\mathcal{T}\cdot\mathcal{U}^{-1})\cdot\mathbf{A}'.$$

Upoređivanjem sa $\mathbf{B}' = \mathcal{T}'\cdot\mathbf{A}'$ odavde izlazi krajnji rezultat:

$$\mathcal{T}' = \mathcal{U}\cdot\mathcal{T}\cdot\mathcal{U}^{-1}, \tag{5.54}$$

koji daje način za transformaciju tenzora pri afinoj transformaciji koordinata pomoću tenzora $\mathcal{U}$. Ranije nađena formula (4.10) za transformaciju komponenata tenzora pri rotaciji koordinatnog sistema je specijalan slučaj gornje opšte relacije. Naime, rotacija koordinatnog sistema je afina transformacija pomoću verzora sa matričnim elementima α_{ij}, koji na osnovu (4.53) zadovoljavaju uslov $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}^{-1}$. Prema tome, matrični elementi transformisanog tenzora će biti:

$$(\mathcal{T}')_{ij} = (\mathcal{U})_{ik}(\mathcal{T})_{kl}(\mathcal{U}^{-1})_{lj} = \alpha_{ik}(\mathcal{T})_{kl}\alpha_{lj}^{-1} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}(\mathcal{T})_{kl},$$

što se podudara sa (4.10).

ZADACI

5.1. Dokazati da je matrično množenje asocijativno.

5.2. Date su tri matrice:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Naći sve moguće proizvode $A_i A_j$ (uključujući i $i = j$) i pokazati da se rezultati mogu izraziti pomoću A_1, A_2, A_3 i jedinične matrice I.

5.3. Ako matrice A i B komutiraju i A je dijagonalna matrica sa međusobno različitim elementima na glavnoj dijagonali, onda i B mora biti dijagonalna matrica. Dokazati.

5.4. Ako proizvod dve nesingularne kvadratne matrice istog reda daje jediničnu matricu, one komutiraju. Dokazati.

5.5. Date su matrice:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(tzv. Pauli-jeve spinske matrice). Pokazati da za njih važe sledeći odnosi:

(a) $\sigma_i^2 = I$,

(b) $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}I$,

(c) $\sigma_i\sigma_j = i\sigma_k$, ako indeksi i, j, k obrazuju cikličnu permutaciju od 1, 2, 3.

5.6. Za nesingularnu matricu A neka važi relacija $A\tilde{A} = I$. Pokazati da:

(a) simetričnost ove matrice povlači za sobom i njenu ortogonalnost,

(b) ortogonalnost automatski povlači za sobom i simetričnost.

5.7. Pokazati da za bilo kakve dve matrice A i B važi $(\widetilde{AB}) = \tilde{B}\tilde{A}$ i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ [upor. sa (4.38) i (4.45)] i na osnovu toga proveriti da je proizvod dve ortogonalne matrice uvek ortogonalna matrica.

5.8. Neka je A bilo kakva (ne nužno kvadratna) matrica. Pokazati da su proizvodi $A\tilde{A}$ i $\tilde{A}A$ simetrične matrice. Ako sumu dijagonalnih elemenata kvadratne matrice nazovemo (po analogiji sa tenzorima) njenim *tragom*, pokazati da je $tr\,(A\tilde{A}) = tr\,(\tilde{A}A)$.

5.9. Pokazati da matrica

$$A = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

zadovoljava relaciju $A\tilde{A} = I$ za bilo kakve vrednosti uglova θ i φ, i da je $\tilde{A}A$ uvek idempotentna ali ne jedinična matrica.

5.10. Dokazati tzv. *Jacobi-jev identitet* za komutatore:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

5.11. Ako se bilo koja kvadratna matrica T rastavi na simetrični i antisimetrični deo ($T = S + A$), komutator matrica S i A je uvek simetrična, a antikomutator antisimetrična matrica. Dokazati.

5.12. Data je kvadratna matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rešiti njen svojstveni problem, tj. odrediti koeficijent λ i matricu X tako da bude $A\cdot X = \lambda X$. Pri tom uzeti da je matrica X (a) tipa 3×1 (matrica-kolona), (b) tipa 3×2, (c) tipa 3×4.

Napomena: Deo zadatka pod (a) je ekvivalentan svojstvenom problemu tenzora čija je matrica A.

5.13. Neka je $\mathbf{B}$ linearna vektorska funkcija vektora $\mathbf{A}$, definisana relacijama:

(a) $\mathbf{B} = \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{A})$,

(b) $\mathbf{B} = [(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{b})]\,\mathbf{a}$,

(c) $\mathbf{B} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{A}\times\mathbf{b})$.

Naći u sva tri slučaja oblik tenzora $\mathcal{T}$ $(\mathbf{B}=\mathcal{T}\cdot\mathbf{A})$ koji im odgovara, uzimajući da su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ poznati vektori. Kakav uslov moraju ovi vektori ispunjavati da bi tenzor $\mathcal{T}$ bio simetričan?

5.14. Kakve vektore pridružuje tenzor

$$\mathcal{T}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&0\\0&3&2\end{pmatrix}$$

vektorima $\mathbf{T}_1^{-1}$, $\mathbf{T}_2^{-1}$, $\mathbf{T}_3^{-1}$ recipročnog trijedra njegovih koordinatnih vektora?

5.15. Odrediti tenzor $\mathcal{X}$ na osnovu jednačine $\mathcal{T}\cdot\mathcal{X}=\mathcal{U}$, ako je:

(a) $\mathcal{T}=\begin{pmatrix}0&1&4\\1&2&0\\-1&3&-2\end{pmatrix}$, $\quad\mathcal{U}=\begin{pmatrix}4&3&1\\-1&2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$;

(b) $\mathcal{T}=\begin{pmatrix}3&8&-1\\6&5&4\\0&-11&6\end{pmatrix}$, $\quad\mathcal{U}=\begin{pmatrix}2&2&5\\-7&-2&17\\-11&-6&7\end{pmatrix}$;

(c) $\mathcal{T}=\begin{pmatrix}2&-2&5\\-7&2&-1\\-11&6&-11\end{pmatrix}$, $\quad\mathcal{U}=\begin{pmatrix}1&4&5\\0&-1&2\\0&3&-8\end{pmatrix}$.

5.16. Naći svojstvene vrednosti i svojstvene vektore za sledeće simetrične tenzore date u matričnom obliku:

(b) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\quad$ (b) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $\quad$ (d) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\quad$ (e) $\begin{pmatrix}1&\sqrt{8}&0\\\sqrt{8}&1&\sqrt{8}\\0&\sqrt{8}&1\end{pmatrix}$.

5.17. Naći svojstvene vrednosti i glavne pravce antikomutatora tenzora (b) i (d) iz prethodnog zadatka.

5.18. Linearna vektorska funkcija ima oblik

$$\mathbf{B}=\alpha\mathbf{A}+\mathbf{p}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{q})+\mathbf{q}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{p}),$$

gde je α dati skalar, a $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ dati vektori čiji su intenziteti jednaki. Naći svojstvene vrednosti i svojstvene pravce tenzora koji definiše ovu linearnu vektorsku funkciju.

5.19. Može li se odrediti skalar α tako da simetrični tenzor

$$\mathcal{T}=\begin{pmatrix}1&\alpha&2\\\alpha&3&0\\2&0&-1\end{pmatrix}$$

ima jednu svojstvenu vrednost jednaku njegovoj prvoj skalarnoj invarijanti? U potvrdnom slučaju naći preostale dve svojstvene vrednosti i sva tri svojstvena pravca tog tenzora.

5.20. Pokazati da za svaki simetrični tenzor važi jednačina:

$$\mathcal{T}^3=S_1\mathcal{T}^2-S_2\mathcal{T}+S_3\mathcal{E},$$

gde su S_1, S_2, S_3 skalarne invarijante tog tenzora a $\mathcal{E}$ je jedinični tenzor (tzv. *Cayley-Hamilton-ova teorema*).

5.21. Odrediti tenzor $\mathcal{X}$ iz jednačine

$$\mathcal{X}^2=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}$$

gde su α, β i γ nenegativni skalari.

5.22. Neposredno proveriti da vektorska invarijanta $\mathbf{Q}$ unitarnog tenzora predstavlja jedan njegov svojstveni vektor. Kolika je odgovarajuća svojstvena vrednost?

5.23. Svaki tenzor se može prikazati kao proizvod jednog simetričnog tenzora i jednog verzora ili, obrnuto, jednog verzora i jednog simetričnog tenzora. Dokazati. Kakav zaključak odavde sledi u pogledu moguće prirode bilo kakve afine transformacije?

5.24. Pokazati da prva i treća skalarna invarijanta tenzora ostaju invarijante i pri bilo kakvoj afinoj transformaciji. Da li ovo važi za drugu skalarnu invarijantu?

5.25. Da li simetričan tenzor ostaje simetričan pri ma kakvoj afinoj transformaciji? A antisimetričan tenzor?

5.26. Šta se dobija ako se obrazuje proizvod dva vektora tako da se prvi prikaže kao matrica-kolona, a drugi kao matrica-vrsta, pa se primeni matrično množenje? [Uporediti sa jednačinom (5.28), koja daje skalarni proizvod].

TREĆI DEO

OPŠTI TENZORSKI RAČUN I RIEMANNOVA GEOMETRIJA

6. TENZORSKA ALGEBRA

6.1. ZAKON TRANSFORMACIJE

Afini prostor. Da bi se fizički zakoni mogli furmulisati u obliku koji je invarijantan prema transformacijama koordinata, mora se uvesti matematički aparat koji operiše veličinama definisanim samim *zakonom transformacija*. Ovim putem istovremeno se vrši kako generalizacija do sada razmotrene teorije vektora i tenzora u trodimenzionom Euklidovom prostoru tako i generalizacija samog pojma prostora.

Takav matematički aparat pruža nam *tenzorski račun*, sa čijim elementima ćemo se ovde upoznati i koji ima poseban značaj u teoriji relativnosti. Pri tome se obično isključivo koristi *koordinatni metod*, tj. sve posmatrane veličine se prikazuju odgovarajućim skupovima brojeva ili funkcija u odnosu na izabrani sistem koordinata.

Po analogiji sa pojmom tačke u trodimenzionom Euklidovom prostoru, ma kakav *uređen skup brojeva*

$$x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \tag{6.1}$$

naziva se *tačka*, a same veličine x^i koordinate tačke, pri čemu smo po konvenciji upotrebili gornje indekse. Skup svih tako definisanih tačaka naziva se *afini n-dimenzioni prostor*, koji u opštem slučaju i ne mora biti metrički. Pri tome se pod metričkim prostorom podrazumeva prostor u kome je definisan pojam rastojanja, o čemu će biti više reči u sledećem odeljku.

Linije i površi. Ako želimo da uobičajene geometrijske pojmove iz trodimenzionog Euklidovog prostora generališemo na n-dimenzioni prostor, moramo poći od toga da ovi pojmovi tada gube svaku očiglednu predstavu i tek definicijom dobijaju svoj smisao. Pri tome je najpogodnije definisati ih *invarijantnim analitičkim izrazima* koji predstavljaju *generalizacije* odgovarajućih izraza iz trodimenzionog Euklidovog prostora, kao što smo već uradili sa pojmom tačke. Time postižemo da uobičajeni geometrijski pojmovi ostaju specijalni slučajevi tih opštijih pojmova, a geometrijski jezik se proširuje i na apstraktne pojmove ovih prostora.

Posmatrajmo slučaj kad su sve koordinate x^i izvesne funkcije od m parametara t_k

$$x^i = x^i(t_1, t_2, \ldots, t_m). \tag{6.2}$$

Svakom skupu vrednosti parametra t_k odgovara jedna tačka $(x^1, x^2, \ldots x^n)$, a skup tako definisanih tačaka za sve vrednosti ovih parametara naziva se

varijetet od m dimenzija. Za $m=1$ varijetet se naziva *linija*, za $m=2$ *površ*, a za $m=n-1$ *hiperpovš*. U poslednjem slučaju možemo iz n jednačina (6.2) eliminisati $n-1$ parametara t_k, čime dobijamo jednačinu hiperpovrši oblika

$$f(x^1, x^2, \ldots, x^n)=0. \qquad (6.3)$$

Transformacija koordinata. Neka su $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ i $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$ koordinate iste tačke u dva razna sistema i neka između njih postoje relacije

$$\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \qquad (6.4)$$

Pretpostavimo da su ove funkcije *svuda defirencijabilne* i da se *mogu rešiti po starim koordinatama*

$$x^i=x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n). \qquad (6.5)$$

Da bi ova inverzija bila moguća, njihov jakobijan ne sme biti identički jednak nuli

$$D\equiv\left|\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right|\neq 0. \qquad (6.6)$$

Takve relacije (6.4), koje moraju biti unapred date, definišu *transformacije koordinata* iz jednog sistema u drugi. Kao najvažnije, navedimo *linearne transformacije*

$$\bar{x}^i=\sum_{k=1}^{n} a_k^i x^k+b^i. \qquad (6.7)$$

Radi konciznijeg pisanja obično su uvodi tzv. *Einstein-ova konvencija o sumiranju: u svakom izrazu gde se isti indeks pojavljuje dva puta i to jednom kao gornji, a jednom kao donji, podrazumeva se sumiranje po tom indeksu.* Pri tome ćemo u izvodima oblika $\partial a^i/\partial x^k$ indeks k smatrati donjim. Ovo je generalizacija sumacione konvencije uvedene u Glavi I, gde se sumiralo *uvek* po ponovljenim indeksima. Tada se navedene linearne transformacije mogu napisati u obliku

$$\bar{x}^i=a_k^i x^k+b^i, \qquad (6.8)$$

odakle se i vidi zašto smo tako označili indekse koeficijenata a_k^i.

Veličine različite prirode se različito ponašaju prema nekoj transformaciji koordinata tipa (6.4), kao na pr. vektori i tenzori u klasičnoj teoriji prema rotaciji koordinatnih osa. U teorijskoj fizici je od posebnog interesa ispitati kako se pri nekim određenim transformacijama transformišu posmatrane veličine i na tome se može zasnivati *klasifikacija svih fizičkih veličina prema zakonu transformacije*. Međutim, treba napomenuti da ovakva klasifikacija bitno zavisi od *izabranog zakona transformacije koordinata* i o karakteru fizičkih osobina ne može se ni govoriti dok se ne precizira ovaj zakon transformacije, što predstavlja osnovnu razliku između opšteg tenzorskog računa i klasične teorije vektora i tenzora.

Primeri. U slučaju translacije sistema veze između koordinata u oba sistema biće

$$\bar{x}^i=x^i+c^i, \qquad (6.9)$$

gde su c^i koordinate novog koordinatnog početka. Kao drugi primer navedimo rotaciju sistema, kad se koordinate transformišu prema obrascu (1.5), koji prema Einstein-ovoj kovenciji možemo napisati u obliku

$$\bar{x}^i=\alpha_k^i x^k, \qquad (6.10)$$

gde su koeficijenti α_k^i kosinusi pravaca novih koordinatnih osa. Najzad, u slučaju izmene orijentacije osa imaćemo tzv. ogledanje koordinata (1.35)

$$\bar{x}^i=-x^i \qquad (6.11)$$

Međutim, dok se u odnosu na prve dve transformacije svi vektori u klasičnoj teoriji ponašaju na isti način, u odnosu na ovu poslednju ispoljava se jedna bitna razlika između pravih vektora i pseudovektora: prvi pri tome menjaju znak, dok ga drugi ne menjaju.

6.2. SKALARI I VEKTORI

Skalari ili invarijante. Neka je Φ ma kakva funkcija koordinata x^i, pa označimo sa $\bar{\Phi}$ funkciju koja se dobija iz nje transformacijom koordinata (6.4)

$$\bar{\Phi}=\Phi[x^1(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n), \ldots, x^n(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)],$$

gde su $x^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ inverzne transformacije koordinata (6.5). Ako je u svakoj tački prostora

$$\bar{\Phi}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)=\Phi(x^1, x^2, \ldots, x^n), \qquad (6.12)$$

tj. *ako vrednost ove funkcije pri transformaciji koordinata u svakoj tački ostaje nepromenjena*, ona se naziva *skalar* ili *invarijanta*. Ukoliko se i oblik funkcije ne menja, takva funkcija naziva se *apsolutna invarijanta*.

Kao primer navedimo kvadrat rastojanja ma koje tačke od koordinatnog početka

$$r^2=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2.$$

Ako se izvrši rotacija koordinatnih osa, ova veličina će u svakoj tački ostati nepromenjena

$$\bar{r}^2=(\bar{x}^1)^2+(\bar{x}^2)^2+(\bar{x}^3)^2=r^2, \qquad (6.13)$$

te r^2 zadovoljava gornji uslov (6.12) i predstavlja apsolutnu invarijantu. Međutim, na pr. zbir kvadrata $(x^1)^2+(x^2)^2$ neće ostati invarijantan, osim pri specijalnim rotacijama oko X_3-ose, te prema gornjoj definiciji to nije skalar.

Napomenimo još da ima veličina koje pri transformaciji koordinata samo menjaju znak

$$\bar{\Phi}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)=-\Phi(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad (6.14)$$

Takve veličine nazivaju se *pseudoskalari*, a kao primer navedimo zapreminu paralelepipeda konstruisanog nad pravim vektorima

$$V=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

i transformaciju ogledanja koordinata. Pri tome će svi vektori, pa prema tome i zapremina promeniti znak, u saglasnosti sa uslovom (6.14).

Kontravarijantni i kovarijantni vektori. Posmatrajmo sad skup od n veličina $A(i)$, gde indeks i uzima sve vrednosti od 1 do n. Ako se ove veličine *pri transformaciji koordinata* (6.4) *transformišu prema zakonu*

$$\bar{A}(i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} A(k), \tag{6.15}$$

takav skup $A(i)$ naziva se *kontravarijantan vektor* i označava se gornjim indeksima A^i. Dakle, kontravarijantan vektor je definisan zakonom transformacije

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} A^k, \tag{6.16}$$

pri čemu se prema Einstein-ovoj konvenciji podrazumeva sumiranje po indeksu k. Ovde su koeficijenti $\partial \bar{x}^i/\partial x^k$ određeni zakonom transformacija koordinata (6.4), koji mora biti unapred dat.

U slučaju *linearnih* transformacija (6.8) biće

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} = a^i_k,$$

pa gornji zakon dobija prostiji oblik

$$\bar{A}^i = a^i_k A^k \tag{6.17}$$

Poređenjem sa obrascem (1.14) vidimo da *u odnosu na rotaciju ose vektori u trodimenzionom Euklidovom prostoru predstavljaju specijalan slučaj kontravarijantnih vektora.* Međutim, pri transformaciji $\bar{x}^i = -x^i$ imaćemo $\partial \bar{x}^i/\partial x^k = -\delta^i_k$, pa prema (6.16) biće

$$\bar{A}^i = -\delta^i_k A^k = -A^i, \tag{6.18}$$

tako da u odnosu na ogledanje koordinata samo pravi vektori predstavljaju kontravarijantne vektore.

Ako, pak, imamo n veličina A_i koje se transformišu prema zakonu

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A_k, \tag{6.19}$$

ovaj skup A_i naziva se *kovarijantan vektor* i označava se donjim indeksima. Podvucimo ovde da izvestan skup od n veličina predstavlja vektor u smislu tenzorske algebre samo ako se ove veličine transformišu po jednom od gornjih zakona, u protivnom to nije vektor.

Primeri. Posmatrajmo najpre skup diferencijala koordinata dx^i. Pošto je prema obrascu za totalni diferencijal

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} dx^k, \tag{6.20}$$

poređenjem sa (6.16) vidimo da se ove veličine transformišu upravo po zakonu kontravarijantnih vektora, tj. *skup dx^i je kontravarijantan vektor.*

Kao drugi primer uzmimo skup parcijalnih izvoda skalara po koordinatama $\partial\Phi/\partial x^i$. Prema obrascu za posredno diferenciranje funkcija imamo

$$\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{x}^i} = \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{x}^i} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i},$$

tj.

$$\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{x}^i} = \frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial\Phi}{\partial x^k}, \tag{6.21}$$

odakle prema (6.19) možemo zaključiti da je *skup $\partial\Phi/\partial x^i$ kovarijantan vektor.*

Navedimo još izvod ma kog kontravarijantnog vektora po nekom skalaru t, tj. skup dA^i/dt. Ako obrazac (6.15) diferenciramo po t, dobićemo

$$\frac{d\bar{A}^i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\right)A^k + \frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^k}\frac{dA^k}{dt},$$

tj.

$$\frac{d\bar{A}^i}{dt} = \frac{\partial^2\bar{x}^i}{\partial x^k\partial x^l}\frac{dx^l}{dt}A^k + \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{dA^k}{dt}, \tag{6.22}$$

odakle sledi da *skup dA^i/dt u opštem slučaju nije vektor.* Međutim, ako su transformacije linearne, prvi član otpada, pa na osnovu (6.19) zaključujemo da *u odnosu na linearne transformacije skup dA^i/dt predstavlja kovarijantan vektor.*

6.3. TENZORSKE VELIČINE

Kontravarijantni, kovarijantni i mešoviti tenzori. Uočimo sad skup od n^2 veličina $A(i,j)$ gde indeksi i i j idu od 1 do n. Ako se ove veličine *pri transformaciji koordinata* (6.4) *transformišu prema zakonu*

$$\bar{A}(i,j) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}A(k,l), \tag{6.23}$$

takav skup $A(i,j)$ naziva se *kontravarijantni tenzor* i označava se gornjim indeksima A^{ij}. Dakle, kontravarijantan tenzor je definisan zakonom transformacije

$$\bar{A}^{ij} = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}A^{kl}, \tag{6.24}$$

pri čemu se prema Einstein-ovoj konvenciji podrazumeva sumiranje po indeksima k i l.

Za *linearne* transformacije (6.8) imaćemo

$$\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k} = a^i_k, \quad \frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l} = a^j_l,$$

pa se gornji zakon svodi na

$$\bar{A}^{ij} = a^i_k a^j_l A^{kl}. \tag{6.25}$$

Poređenjem sa obrascem (4.10) zaključujemo da *u odnosu na rotaciju osa tenzori u trodimenzionom Euklidovom prostoru predstavljaju specijalan slučaj kontravarijantnih tenzora.*

Ako, pak, zakon transformacije ima oblik

$$\bar{A}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^j}A_{kl}, \tag{6.26}$$

skup A_{ij} naziva se *kovarijantan tenzor*, a ako je

$$\overline{A}^i_j = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} A^k_l \, , \tag{6.27}$$

skup A^i_j predstavljaće *mešoviti tenzor* (i to jedanput kontravarijantan i jedanput kovarijantan). Pri tome se kovarijantan tenzor označava donjim indeksima, a mešoviti jednim gornjim i jednim donjim, kao što je naznačeno. Naglasimo da inače skup od n^2 veličina, ukoliko ne zadovoljava nijedan od navedenih zakona, ne predstavlja uopšte tenzor.

Za karakter posmatranih veličina od naročitog je značaja broj i raspored indeksa, pri čemu se broj indeksa naziva *red* ili *rang tenzora*. Sa tog stanovišta su skalari tenzori nultog reda, vektori prvog, a gore navedeni tenzori drugog reda. Primetimo još ovde da u ovim navedenim obrascima *indeksi uz crtu sdesne strane stoji na istim mestima (gore ili dole) kao i sa leve.*

Primeri. Posmatrajmo skup proizvoda dva kontravarijantna vektora $A^i B^j$. Oni su određeni zakonom transformacije (6.16)

$$\overline{A}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} A^k, \qquad \overline{B}^j = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} B^l,$$

a otuda sledi

$$\overline{A}^i \, \overline{B}^j = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} A^k B^l, \tag{6.28}$$

pa poređenjem sa (6.24) vidimo da je *skup $A^i B^j$ kontravarijantan tenzor.*

Proučimo sad Kronecker-ov simbol $\delta_{(i,j)}$, jednak jedinici za $i=j$, a nuli ako je $i \neq j$. Pošto je

$$\overline{\delta}_{(i,j)} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial \overline{x}^j} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^j},$$

a desna strana može se napisati u obliku

$$\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^j} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} \delta_{(k,l)},$$

gde se podrazumeva sumiranje po indeksima k i l, dobijamo

$$\overline{\delta}_{(i,j)} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} \delta_{(k,l)} \, . \tag{6.29}$$

Upoređivanjem sa (6.27) zaključujemo do *Kronecker-ov simbol $\delta_{(i,j)}$ predstavlja mešoviti tenzor drugog reda tipa δ^i_j* i to je generalizacija Kronecker-ovog simbola (1.8), uvedenog u Glavi I. Mogu se formalno uvesti i simboli δ^{ij} i δ_{ij} sa dva kontra odnosno kovarijantna indeksa, ali oni nemaju tenzorski karakter.

Ispitajmo još kako se transformišu komponente skupa parcijalnih izvoda $\partial A_i / \partial x^j$. Ovde prema zakonu (6.19) imamo

$$\overline{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} A_k,$$

pa diferenciranjem po $\overline{x}^j$ dobijamo

$$\frac{\partial \overline{A}_i}{\partial \overline{x}^j} = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^j} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \right) A_k + \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial A_k}{\partial \overline{x}^j},$$

tj.

$$\frac{\partial \overline{A}_i}{\partial \overline{x}^j} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^j} A_k + \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial A_k}{\partial x^l}, \tag{6.30}$$

odakle zaključujemo da *skup $\partial A_i / \partial x^j$ u opštem slučaju nije tenzor*. Međutim, ako su transformacije linearne, prvi član otpada, pa na osnovu (6.27) proizilazi da *u slučaju linearnih transformacija skup $\partial A_i / \partial x^j$ predstavlja kovarijantan tenzor.*

Tenzori višeg reda. Neposrednom generalizacijom navedenih zakona transformacija mogu se uvesti i *tenzori višeg reda*. Tako se tenzor $A^{i_1 \ldots i_m}_{j_1 \ldots j_n}$ sa naznačenim rasporedom indeksa definiše zakonom transformacije

$$\overline{A}^{i_1 \ldots i_m}_{j_1 \ldots j_n} = \frac{\partial \overline{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{i_m}}{\partial x^{k_m}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial \overline{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{l_n}}{\partial \overline{x}^{j_n}} A^{k_1 \ldots k_m}_{l_1 \ldots l_n}, \tag{6.31}$$

gde se prema Einstein-ovoj konvenciji podrazumeva sumiranje po svim ponovljenim indeksima. Za takav tenzor se kaže da je *m puta kontravarijantan i n puta kovarijantan*. Na primer, prema obrascima (6.16) i (6.24) imaćemo

$$\overline{A}_{ij} \overline{B}^k = \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^k} A^{lm} B_n, \tag{6.32}$$

te je skup $A^{ij} B_k$ tenzor trećeg reda dva puta kontra i jedanput kovarijantan.*

Simetrični i antisimetrični tenzori. Za neki tenzor se kaže da je *simetričan u odnosu na dva indeksa* ako njegove komponente ostanu nepromenjene posle izmene ovih indeksa, pod uslovom da su oba indeksa kontravarijantna ili kovarijantna. Na primer ako je $A^{ijk}_{lm} = A^{jik}_{lm}$, ovaj tenzor je simetričan u odnosu na indekse i i j. S druge strane, za neki tenzor kažemo da je *antisimetričan u odnosu na dva indeksa*, pod gore navedenim uslovom, ako njegove komponente promene znak posle izmene ovih indeksa, na pr. ako je $A^{ijk}_{lm} = -A^{jik}_{lm}$. Ako je tenzor simetričan ili antisimetričan u odnosu na *bilo koja* dva kontravarijantna i kovarijantna indeksa, naziva se *apsolutno simetričan* odnosno *antisimetričan*.

Pokažimo sad da *osobina simetrije ili antisimetrije nekog tenzora pri ma kakvoj transformaciji koordinata ostaje očuvana.* Uzmimo na pr. tenzor tipa A^{ij} i pretpostavimo da u prostoru sa koordinatama x^i važi

$$A^{ij} = A^{ji}.$$

* U opštem tenzorskom računu je moguć i drugi prilaz, ukoliko se radi o linearnim transformacijama koordinata, zasnovan na linearnoj algebri. U tom cilju se, pored linearnog vektorskog prostora koji predstavlja jedan od osnovnih pojmova linearne algebre i kome je posvećen četvrti deo ove knjige, uvodi i pojam konjugovanog (dualnog) prostora. Vektori iz prvog prostora odgovaraju kontravarijantnim, a vektori iz drugog prostora kovarijantnim vektorima u gore izloženom smislu. Detaljnije o ovom alternativnom prilazu može se naći, na primer, u knjizi И. М. ГЕЛЬФАНД, ЛЕКЦИИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ, изд. „Наука", Москва, 1966, Глава 4.

Posle transformacije koordinata imaćemo

$$\overline{A}^{ij}=\frac{\partial \overline{x}^{i}}{\partial x^{k}}\frac{\partial \overline{x}^{j}}{\partial x^{l}}A^{kl},$$

a ako ovde izmenimo mesta nemih indeksa k i l i uzmemo u obzir da je $A^{kl}=A^{lk}$, dobija se

$$\overline{A}^{ij}=\frac{\partial \overline{x}^{i}}{\partial x^{l}}\frac{\partial \overline{x}^{j}}{\partial x^{k}}A^{kl}=\overline{A}^{ji}. \tag{6.33}$$

Na sličan način se dokazuje ovo tvrđenje i za tenzore bilo kog tipa.

U opštem tenzorskom računu, kao i u klasičnoj teoriji tenzora, *svaki tenzor može se rastaviti na simetričan i antisimetričan tenzor istog tipa*. Na primer, za dvaput kontravarijantan i jedanput kovarijantan tenzor A_k^{ij} bismo imali

$$A_k=\frac{1}{2}(A_k^{ij}+A_k^{ji})+\frac{1}{2}(A_k^{ij}-A_k^{ji}). \tag{6.34}$$

Relativni tenzori. Ako se izvestan skup veličina pri transformaciji koordinata (6.4) transformišu prema zakonu

$$\overline{A}^{i_1\ldots i_m}_{j_1\ldots j_n}=\left|\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}\right|^w\frac{\partial \overline{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial \overline{x}^{i_m}}{\partial x^{k_m}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial \overline{x}^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_n}}{\partial \overline{x}^{j_n}}A^{k_1\ldots k_m}_{l_1\ldots l_n}. \tag{6.35}$$

gde je $|\partial x^j/\partial \overline{x}^i|$ jakobijan inverzne transformacije koordinata, skup $A^{i_1\ldots i_m}_{j_1\ldots j_n}$ naziva se *relativni tenzor* ili *pseudotenzor težine* w. U slučaju $w=0$ ova se definicija svodi na (6.31) i to su tzv. *apsolutni tenzori*, o kojima smo do sada govorili.

Posmatrajmo kao primer ε-simbol, definisan obrascem (1.32)

$$\varepsilon_{(i,j,k)}=\begin{cases}1 & \text{ako je permutacija } ijk \text{ parna}\\ -1 & \text{,, ,, ,, ,, neparna}\\ 0 & \text{,, su bar dva indeksa jednaka.}\end{cases} \tag{6.36}$$

Da bismo ispitali prirodu ovog simbola, zapazimo najpre da se pomoću njega ma koja determinanta trećeg reda može konciznije napisati u obliku

$$\begin{vmatrix}u^1 & u^2 & u^3\\ v^1 & v^2 & v^3\\ w^1 & w^2 & w^3\end{vmatrix}=\varepsilon_{(l,m,n)}u^l v^m w^n,$$

gde se podrazumeva sumiranje po indeksima l, m i n. Tačnost gornje relacije može se lako proveriti eksplicitnim pisanjem članova na desnoj strani. Ako ovaj rezultat primenimo na jakobijan transformacije, imaćemo

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^1}\\ \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^2}\\ \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^3}\end{vmatrix}=\varepsilon_{(l,m,n)}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^1}\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^2}\frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^3}. \tag{6.37}$$

Zamenjujući ovde $\overline{x}^1$, $\overline{x}^2$ i $\overline{x}^3$ sa $\overline{x}^i$, $\overline{x}^j$ i $\overline{x}^k$ i imajući u vidu osobine determinanta trećeg reda, levu stranu možemo napisati kao proizvod $\overline{\varepsilon}_{(i,j,k)}$ i prethodne determinante

$$\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(\overline{x}^i,\overline{x}^j,\overline{x}^k)}=\overline{\varepsilon}_{(i,j,k)}\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(\overline{x}^1,\overline{x}^2,\overline{x}^3)}=\varepsilon_{(l,m,n)}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^k},$$

gde simbol $\overline{\varepsilon}_{(i,j,k)}$ ima isti smisao kao u (6.36). Gornja jednakost proizilazi iz činjenice da će napisana determinanta biti jednaka nuli ako među indeksima i, j, k ima jednakih, a u ostalim slučajevima jednaka jakobijanu sa pozitivnim ili negativnim predznakom zavisno od toga da li indeksi i, j, i k čine parnu ili neparnu permutaciju od 1, 2, 3. Odavde neposredno sledi da je

$$\overline{\varepsilon}_{(i,j,k)}=\left|\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^q}\right|^{-1}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^k}\varepsilon_{(l,m,n)}, \tag{6.38}$$

odakle zaključujemo da je *simbol* $\varepsilon(i, j, k)$ *u trodimenzionom Euklidovom prostoru relativni triput kovarijantan tenzor* ε_{ijk} *težine* -1.

6.4. OPERACIJE SA TENZORIMA

Osnovne operacije. Na osnovu gornjih definicija možemo uvesti i algebarske operacije sa tenzorima. Za dva tenzora kažemo da su *jednaki* ako su istog tipa i ako su im svi odgovarajući elementi jednaki. *Zbir dvaju tenzora* definiše se kao skup zbirova odgovarajućih elemenata ovih tenzora, čime se dobija tenzor istog tipa. Na primer, zbir tenzora A^{ij} i B^{ij} je tenzor čiji su elementi $C^{ij}=A^{ij}+B^{ij}$.

Proizvod tenzora i skalara definiše se kao skup proizvoda ovog skalara i odgovarajućih komponenata posmatranog tenzora, to je takođe tenzor istog tipa. Na primer, proizvod skalara λ i tenzora A^{ij} je tenzor sa elementima $C^{ij}=\lambda A^{ij}$. Pomoću proizvoda sa -1 formuliše se i operacija oduzimanja tenzora.

Navedene osnovne operacije karakterišu se time što je njihov rezultat uvek tenzor istog tipa. One kao specijalan slučaj sadrže i odgovarajuće operacije u klasičnoj teoriji vektora i tenzora.

Spoljašnji i unutrašnji proizvod. Skup proizvoda elemenata dva ma kakva tenzora, na pr. skup $A^i B_{jk}$, predstavlja tenzor čiji je red jednak zbiru redova datih tenzora i naziva se *spoljašnji proizvod tenzora*. Međutim, obrnuto ne važi: naime, svaki tenzor ne može se prikazati kao spoljašnji proizvod dvaju tenzora nižeg ranga.

Ako se izjednače jedan gornji i jedan donji indeks tenzora i izvrši sumiranje po tom indeksu, dobija se tenzor čiji je red za dva niži od reda početnog. Ta operacija naziva se *kontrakcija tenzora*. Na primer, ako se u tenzoru A^{ijk}_{lm} stavi $m=k$, dobiće se tenzor koji se u smislu Einstein-ove konvencije može pisati $A^{ijk}_{lk}=B^{ij}_l$, to je tenzor trećeg reda. Ako se dalje stavi $l=j$, dobiće se $B^{ij}_j=C^i$, tj. tenzor prvog reda.

Sprovede li se spoljašnje množenje tenzora i potom kontrakcija, dobiće se novi tenzor koji se naziva *unutrašnji proizvod tenzora*. Na primer, za tenzore A^{ij}_k i B^l_{mn} spoljašnji proizvod biće skup $A^{ij}_k B^l_{mn}$. Stavljajući $l=k$, dobijamo unutrašnji proizvod $A^{ij}_k B^k_{mn}=C^{ij}_{mn}$ a stavljajući $l=k$ i $m=j$, dobija se drugi unutrašnji proizvod $A^{ij}_k B^k_{jn}=D^i_n$.

Proverimo neposredno na jednom primeru da skupovi veličina dobijenih kontrakcijom tenzora zadržavaju tenzorsku prirodu po preostalim indeksima. Formirajmo na pr. unutrašnji proizvod vektora A_i i tenzora B^{jk} za $j=i$

$$C^j = A_i B^{ij}. \tag{6.39}$$

U novim koordinatama imaćemo

$$\bar{C}^j = \bar{A}_i \bar{B}^{ij},$$

gde je prema obrascima (6.19) i (6.24)

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A_k, \quad \bar{B}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} B^{lm},$$

odakle se dobija

$$\bar{C}^j = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} A_k B^{lm} = \delta^k_l \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} A_k B^{lm} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} A_k B^{km},$$

tj.

$$\bar{C}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} C^m. \tag{6.40}$$

Ova relacija pokazuje nam da je skup (6.39) zaista kontravarijantan vektor, saglasno položaju preostalog indeksa j.

Vektori dualni tenzoru. Kao poseban slučaj unutrašnjeg proizvoda navedimo proizvod simbola ϵ_{ijk} i ma kakvog dvaput kontravarijantnog tenzora A^{jk}

$$C_i = \epsilon_{ijk} A^{jk}, \tag{6.41}$$

gde je izvršena kontrakcija po indeksima j i k. Ako se ograničimo na slučaj $n=3$ i imamo u vidu da je ϵ_{ijk} prema (6.38) relativni kovarijantni tenzor, ovako definisan skup veličina C_i predstavljaće relativni kovarijantan vektor i naziva se *vektor dualan tenzoru* A^{jk}. U eksplicitnom obliku, s obzirom na definiciju simbola ϵ_{ijk}, imaćemo

$$C_1 = A^{23}-A^{32}, \quad C_2 = A^{31}-A^{13}, \quad C_3 = A^{12}-A^{21}. \tag{6.42}$$

Na sličan način moglo bi se govoriti i o vektoru $C^i = \epsilon^{ijk} A_{jk}$, dualnom dvaput kovarijantnom tenzoru A_{jk}.
Uzmemo li za tenzor A^{jk} proizvod kontravarijantnih vektora A^j i B^k, vektor dualan ovom tenzoru biće

$$C_i = \epsilon_{ijk} A^j B^k, \tag{6.43}$$

što se poklapa sa vektorskim proizvodom (5.38). Gornji obrasci u ovom slučaju dobijaju oblik

$$C_1 = A^2 B^3 - A^3 B^2, \quad C_2 = A^3 B^1 - A^1 B^3, \quad C_3 = A^1 B^2 - A^2 B^1. \tag{6.44}$$

Odavde vidimo da je *vektorski proizvod u trodimenzionalnom Euklidovom prostoru relativni kovarijantan vektor $\epsilon_{ijk} A^j B^k$ težine -1, dualan tenzoru $A^j B^k$.*

Zakon količnika. Na osnovu navedenih operacija sa tenzorima može se formulisati jedan opšti kriterijum za utvrđivanje tenzorskog karaktera. Ako imamo neku nepoznatu veličinu X, koja zavisi od izvesnog broja indeksa, pa obrazujemo unutrašnji proizvod ove veličine sa nekim tenzorom A, rezultat ove

operacije neće uvek biti tenzor, jer ta veličina X ne mora imati tenzorsku prirodu. U slučaju da je rezultat neki već *poznati tenzor* B i to *za bilo koji tenzor* A, nepoznata veličina X mora takođe biti tenzor, što se može lako dokazati indirektnim putem. Naime, ako pretpostavimo da ispitivana veličina X nije tenzor, njen unutrašnji proizvod sa tenzorom A ne bi dao nikakav tenzor, što se kosi sa našom pretpostavkom da je rezultat izvestan tenzor B.

Na osnovu toga možemo dati sledeći kriterijum za određivanje tenzorskog karaktera: *ako je unutrašnji proizvod neke nepoznate veličine X sa proizvoljnim tenzorom A neki poznati tenzor B, tada je nepoznata veličina X takođe tenzor, a iz rasporeda indeksa možemo zaključiti o njegovom tipu.* Taj kriterijum poznat je pod imenom *zakon količnika*, jer pokazuje izvesnu formalnu analogiju sa određivanjem nepoznate veličine X iz algebarske jednačine $XA = B$. Na primer, ako je $X_{(i,j)}A^{ij}$ skalar, veličina X biće dvaput kovarijantan tenzor X_{ij}, a ako je $X_{(i,j,k)}A^k_j = B^i$, veličina X biće tenzor trećeg reda X^{ij}_k.

Proverimo to neposrednim računom na ovom drugom primeru. Ako je veličina $X_{(i,j,k)}$ takva da je

$$X_{(i,j,k)} A^k_j = B^i, \tag{6.45}$$

gde je A^k_j proizvoljan tenzor, u novim koordinatama biće

$$\bar{X}_{(l,p,q)} \bar{A}^q_p = \bar{B}^l.$$

Tada je prema zakonu transformacije tenzora

$$\bar{X}_{(l,p,q)} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^n}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} A^n_m = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} B^i = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} X_{(i,m,n)} A^n_m$$

odnosno

$$\left[\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^n}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}\bar{X}_{(l,p,q)} - \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} X_{(i,m,n)}\right] A^n_m = 0. \tag{6.46}$$

Pošto je A^n_m proizvoljan tenzor, izraz u zagradi mora biti jednak nuli

$$\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^n}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}\bar{X}_{(l,p,q)} - \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} X_{(i,m,n)} = 0,$$

a unutrašnjim množenjem sa $\partial x^n/\partial \bar{x}^k \cdot \partial \bar{x}^j/\partial x^m$ dobijamo

$$\delta^q_k \delta^j_p \bar{X}_{(l,p,q)} - \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} X_{(i,m,n)} = 0,$$

tj.

$$\bar{X}_{(l,j,k)} = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k} X_{(i,m,n)}. \tag{6.47}$$

Odavde vidimo da je $X_{(i,j,k)}$ zaista tenzor i to tipa X^{ij}_k.

ZADACI

6.1. Veličine $A(j, k, l, m)$, $B(j, k, m)$, $C(j, k, m, n)$ se transformišu po sledećim zakonima:

$$\overline{A}(p, q, r, s) = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^l}\frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^m} A(j,k,l,m),$$

$$\overline{B}(p, q, r) = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^q}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^m} C(j, k, m),$$

$$\overline{C}(p, q, r, s) = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^n} B(j, k, m, n).$$

Da li one imaju tenzorsku prirodu?

6.2. Ako je $\overline{A}^p_r = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^q}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^r} A^q_s$, dokazati da onda važi i:

$$A^q_s = \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^s}\overline{A}^p_r.$$

6.3. Zakone transformacije vektora i tenzora drugog reda prikazati pomoću matričnog množenja.

6.4. Veličina $A(p, q, r)$ zadovoljava relaciju

$$A(p, q, r) B^{qs}_r = C^s_p,$$

gde je B^{qs}_r proizvoljan tenzor, a C^s_p je tenzor. Dakazati da je i $A(p, q, r)$ tenzor.

6.5. Ako je Φ invarijanta, ispitati da li je $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j}$ tenzor.

6.6. Neka je A_i kovarijantan vektor. Da li veličine $\frac{\partial A_i}{\partial x^j}$ i $\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}$ imaju tenzorsku prirodu?

6.7. Da li je $\frac{\partial A^i}{\partial x^i}$ invarijanta (skalar), ako je A^i kontravarijantan vektor?

6.8. Naći klasu transformacija pri kojima će se izraz

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}\frac{\partial \Phi}{\partial x^j}$$

ponašati kao tenzor, ako je Φ skalar.

6.9. Kovarijantni vektor B_i ima u Descartes-ovim koordinatama komponente $x^1 x^2$, $2x^2 - (x^3)^2$ i $x^1 x^3$. Naći njegove kovarijantne komponente u (a) sfernim, (b) bipolarnim cilindričnim i (c) eliptičkim cilindričnim koordinatama.

6.10. Pokazati da je brzina $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ kontravarijantan vektor, dok ubrzanje $\frac{dv^i}{dt}$ nije vektor u smislu opšteg tenzorskog računa.

6.11. Ako važi relacija

$$A(p, q) B^{qs}_r = C^s_{pr},$$

u kojoj je B^{qs}_r proizvoljan relativni tenzor težine w_1 a C^s_{pr} je poznati relativni tenzor težine w_2, onda je i $A(p, q)$ relativni tenzor $w_2 - w_1$. Dokazati.

6.12. Rešiti zadatak 6.9. ako zadane komponente pripadaju relativnom kovarijantnom vektoru težine -2.

7. TENZORSKA ANALIZA

7.1. METRIČKI PROSTORI

Metrika i metrički prostori. Pretpostavimo sad da je posmatrani n-dimenzioni prostor takav da se u njemu može definisati tzv. *metrika prostora*. Pod metrikom ćemo, u ovom izlaganju, podrazumevati određeni, unapred zadani zakon po kome se tačkama $(x^1, \cdots x^n)$ i $(x^1+dx^1, \cdots, x^n+dx^n)$ pridružuje jedan skalar ds koji definiše rastojanje između njih. Za potrebe tenzorske analize se, po analogiji sa trodimenzionim Euklidovim prostorom, metrika definiše *kvadratnom metričkom formom oblika*

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j \tag{7.1}$$

za koju se zahteva da ostaje invarijantna pri transformaciji koordinata (5.4). Pri tome se prema Einstein-ovoj konvenciji ovde podrazumeva sumiranje po indeksima i i j, a koeficijenti g_{ij} mogu biti izvesne funkcije položaja. Ova osnovna kvadratna forma naziva se *metrička forma*, a tako definisani prostor *Riemann-ov prostor*. Napomenimo da ova definicija dozvoljava priličnu slobodu u izboru kvadratne forme (7.1), pri čemu ona mora samo ispunjavati uslov invarijantnosti, a ne mora nužno biti ni pozitivno definitna.

Pošto je ds^2 po definiciji skalar, a proizvod $dx^i\,dx^j$ dvaput kontravarijantan tenzor, prema zakonu količnika zaključujemo da *skup koeficijenata g_{ij} predstavlja dvaput kovarijantan tenzor*. Ovo se i neposredno vidi iz

$$\bar{g}_{ij}\,d\bar{x}^i\,d\bar{x}^j = g_{kl}\,dx^k\,dx^l = g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}d\bar{x}^i\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}dx^j,$$

odakle se dobija

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}g_{kl}. \tag{7.2}$$

Ako izmenimo indekse i i j i potom red sumiranja, neposredno vidimo da je $g_{ji}=g_{ij}$, tj. *tenzor g_{ij} je simetričan*. Ovaj tenzor potpuno je određen šemom svojih koeficijenata u bilo kom sistemu

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

i naziva se *metrički* ili *fundamentalni tenzor*.

Ako metrika prostora ima oblik zbira kvadrata diferencijala koordinata

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 \cdots + (dx^n)^2 \tag{7.4}$$

ili ako se nekom transformacijom koordinata može svesti na taj oblik, posmatrani prostor naziva se *Euklidov prostor*. U ovom slučaju svi koeficijenti g_{ij} za $i \neq j$ jednaki su nuli, a za $i=j$ jedinici, što možemo konciznije napisati pomoću Kronecker-ovog simbola

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \tag{7.5}$$

pri čemu ćemo u daljem izlaganju dokazati da dvaput kovarijantni i dvaput kontravarijantni simbol δ_{ij} i δ^{ij} u Euklidovom prostoru imaju tenzorski karakter.

Primeri. Posmatrajmo najpre skup svih tačaka na površini sfere poluprečnika R u trodimenzionom Euklidovom prostoru. Ovaj skup definiše jedan potprostor Euklidovog prostora, čije su tačke određene sfernim koordinatama $x^1=\vartheta$ i $x^2=\varphi$, a metrička forma (3.18) zbog uslova $r=R=\text{const}$ ovde se svodi na

$$ds^2 = R^2\,d\vartheta^2 + R^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2. \tag{7.6}$$

Ova kvadratna forma nikakvim transformacijama u realnoj oblasti ne može se svesti na oblik (7.4), te posmatrani skup tačaka predstavlja neeuklidski Riemann-ov prostor, a metrički tenzor ovde će biti

$$\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix}.$$

Kao drugi primer navedimo četvorodimenzioni prostor sa pravouglim koordinatama x^α ($\alpha=1, 2, 3, 4$) definisan metrikom

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2 \tag{7.7}$$

uz uslov da je ovaj izraz invarijantan. Takav prostor je takođe neeuklidski Riemann-ov prostor i od posebnog je interesa u specijalnoj teoriji relativnosti, a njegov metrički tenzor ima oblik

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Primetimo, međutim, da transformacijom

$$\bar{x}^p = x^p \ (p=1, 2, 3), \qquad \bar{x}^4 = ix^4,$$

gde je $i=\sqrt{-1}$, metrika ovog prostora postaje euklidska, ali same koordinate postaju kompleksne.

Konjugovani metrički tenzor. Da bismo dobili metrički tenzor koji bi bio dvaput kontravarijantan, uvedimo determinantu elemenata

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}, \tag{7.8}$$

pa označimo sa $G_{(i,j)}$ kofaktor ove determinante koji odgovara i-toj vrsti i j-toj koloni. Prirodu veličina g i $G_{(i,j)}$ videćemo iz daljeg izlaganja. Ako gornju determinantu razvijemo po elementima i-te vrste, imaćemo

$$g = g_{i1} G_{(i,1)} + \cdots + g_{in} G_{(i,n)},$$

a ako zatim u njoj umesto elemenata i-te vrste stavimo elemente j-te, njena vrednost postaće jednaka nuli na osnovu poznatih osobina determinanta

$$0 = g_{j1} G_{(i,1)} + \cdots + g_{jn} G_{(i,n)}.$$

Oba gornja rezultata možemo konciznije napisati

$$g_{kj} G_{(i,j)} = g\, \delta^i_k, \tag{7.9}$$

pri čemu ćemo podrazumevati sumiranje po ponovljenom indeksu j. Pretpostavimo sad da je $g \neq 0$ i podelimo gornju jednačinu sa g, čime dobijamo

$$\frac{G_{(i,j)}}{g} g_{kj} = \delta^i_k,$$

šta ćemo napisati u obliku

$$g^{ij} g_{kj} = \delta^i_k, \tag{7.10}$$

gde smo uveli oznaku

$$g^{ij} = \frac{G_{(i,j)}}{g}. \tag{7.11}$$

Ovaj obrazac definiše veličine g^{ij}, čiji karakter možemo odrediti na sledeći način. Ako u jednačini (7.10) stavimo $k = i$, na desnoj strani dobićemo skalar, a pošto je skup g_{ij} kovarijantan tenzor, na osnovu zakona količnika neposredno zaključujemo da *skup g^{ij} predstavlja dvaput kontravarijantan tenzor*. On se naziva *konjugovani metrički tenzor* i potpuno je određen metrikom prostora.

Da bismo ispitali karakter determinante g, pođimo od zakona transformacije (7.2)

$$\overline{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} g_{kl}$$

i formirajmo determinante čiji će elementi biti izrazi na obema stranama gornje jednačine. Prema pravilu za množenje determinanata imaćemo

$$\overline{g} = |\overline{g}_{ij}| = \left| \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \right| \left| \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} \right| |g_{kl}|,$$

tj.

$$\overline{g} = \left| \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \right|^2 g. \tag{7.12}$$

Odavde vidimo, poređenjem sa (6.35), da je *determinanta g relativni skalar težine 2.*

Skalarni proizvod. U Riemann-ovom metričkom prostoru, koji mi ovde razmatramo, može se pored metrike prostora uvesti i *operacija skalarnog množenja* na sledeći način. Za dva kontravarijantna vektora A^i i B^i ova se operacija definiše obrascem

$$(A, B) = g_{ij} A^i B^j, \tag{7.13}$$

gde se podrazumeva sumiranje po indeksima i i j. Rezultat tako definisane operacije naziva se *skalarni proizvod* vektora A^i i B^i i predstavlja jednu važnu karakteristiku prostora, jer ne zavisi samo od vektora čiji se skalarni proizvod formira, već i od metrike samog prostora.

Pomoću ovog pojma metrička forma (7.1) može se prikazati u obliku skalarnog proizvoda vektora dx^i sa samim sobom

$$ds^2 = (dx, dx), \tag{7.14}$$

čime je istaknuta *veza između metrike prostora i skalarnog proizvoda* u ma kakvom Riemann-ovom prostoru. Napomenimo još da u ma kakvom metričkom prostoru, gde se metrika definiše na opštiji, apstraktniji način od (7.1), nije uvek definisan i skalarni proizvod. Ukoliko je ovaj pojam uveden, to je tzv. *Hilbert-ov prostor*, o čemu će biti više reči u sledećem odeljku.

Ako pređemo na nove koordinate transformacijom (6.4), prema obrascima (7.2) i (6.16) imaćemo

$$\overline{g}_{ij} \overline{A}^i \overline{B}^j = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} g_{kl} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^m} A^m \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^n} B^n = \delta^k_m \delta^l_n g_{kl} A^m B^n,$$

tj.

$$\overline{g}_{ij} \overline{A}^i \overline{B}^j = g_{kl} A^k B^l. \tag{7.15}$$

Odavde vidimo da je skalarni proizvod zaista *skalar*, što znači da *pri ma kakvoj transformaciji koordinata ostaje invarijantan*, kao što i treba da bude prema samoj definiciji (7.13). Ova osobina omogućava uvođenje izvesnih geometrijskih pojmova u Riemann-ovom prostoru.

U slučaju Euklidovog prostora, gde su koeficijenti metričkog tenzora dati obrascem (7.5), skalarni proizvod se svodi na oblik

$$(A, B) = \delta_{ij} A^i B^j = A^1 B^1 + A^2 B^2 + \cdots + A^n B^n, \tag{7.16}$$

jer u ovoj dvostrukoj sumi preostaju samo članovi kod kojih je $j = i$. Ovaj izraz predstavlja neposrednu generalizaciju uobičajnog skalarnog proizvoda u trodimenzionom Euklidovom prostoru.

Dužina i ugao. Sem pojmova linija i površi, koji su uvedeni u prethodnoj glavi i sasvim su opšteg karaktera, nezavisni od metrike prostora, mogu se formulisati i drugi geometriski pojmovi. Tako se pomoću pojma skalarnog proizvoda (7.13), koji je invarijantan, mogu uvesti pojmovi dužine i ugla na sledeći način. Ako uočimo neki kontravarijantan vektor A^i, *intenzitet vektora A*, po analogiji sa ovom veličinom u klasičnoj teoriji vektora, definiše se kao pozitivan kvadratni koren iz skalarnog proizvoda ovog vektora sa samim sobom

$$A^2 = (A, A) = g_{ij} A^i A^j. \tag{7.17}$$

Za dva kontravarijantana vektora A^i i B^i *ugao između vektora* α definiše se obrascem koji predstavlja generalizaciju skalarnog proizvoda u trodimenzionom Euklidovom prostoru

$$\cos\alpha = \frac{(A, B)}{A \cdot B} = \frac{g_{ij} A^i B^j}{\sqrt{g_{ij} A^i A^j}\sqrt{g_{ij} B^i B^j}}. \tag{7.18}$$

Ako je skalarni proizvod dvaju vektora jednak nuli, biće $\cos\alpha = 0$ i tada kažemo da su ovi vektori *ortogonalni*.

Na primer, za prostor sa metrikom (7.7) kvadrat intenziteta se svodi na čisto kvadratne članove

$$A^2=(A^1)^2+(A^2)^2+(A^3)^2-(A^4)^2, \tag{7.19}$$

a kosinus ugla između vektora dat je izrazom

$$\cos\alpha=\frac{A^1B^1+A^2B^2+A^3B^3-A^4B^4}{A\cdot B}, \tag{7.20}$$

gde se veličine A i B nalaze prema prethodnoj formuli.

Element zapremine. Da bismo došli od invarijantne veličine koja predstavlja generalizaciju pojma elementa zapremine, pođimo od (7.12) i prepišimo tu relaciju u obliku

$$\sqrt{\bar{g}}=\left|\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\right|\sqrt{g}. \tag{7.21}$$

S druge strane, prema pravilu za smenu promenljivih iz matematičke analize biće

$$d\bar{x}^1\,d\bar{x}^2\ldots d\bar{x}^n=\left|\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k}\right|dx^1\,dx^2\ldots dx^n,$$

pa množenjem ovih izraza dobijamo

$$\sqrt{\bar{g}}\,d\bar{x}^1\,d\bar{x}^2\ldots d\bar{x}^n=\sqrt{g}\,dx^1\,dx^2\ldots dx^n. \tag{7.22}$$

Odavde možemo zaključiti da izraz

$$dV=\sqrt{g}\,dx^1\,dx^2\ldots dx^n \tag{7.23}$$

ostaje *invarijantan pri ma kakvim transformacijama koordinata* i naziva se *element zapremine* u Riemann-ovom prostoru. U slučaju Euklidovog prostora i pravouglih koordinata je $g=1$, te otpada faktor $\sqrt{g}$, čime dobijamo neposrednu generalizaciju uobičajenog izraza za element zapremine.

7.2. ASOCIRANI TENZORI

Podizanje i spuštanje indeksa. Za mnoge primene je od interesa pitanje da li se od kontravarijantnih vektora i tenzora mogu dobiti ekvivalentni kovarijantni i obrnuto. Da bismo to ispitali, zapazimo najpre da unutrašnji proizvod metričkog tenzora g_{ij} ili g^{ij} i ma kakvog tenzora predstavlja uvek neki tenzor sa istim brojem, ali drugim rasporedom indeksa. Tako formirani tenzori nazivaju se *asocirani tenzori* i pomoću njih možemo postići *podizanje i spuštanje indeksa*.

Uzmimo kao primer unutrašnji proizvod metričkog proizvoda g_{ij} i kontravarijantnog vektora A^j

$$A_{(i)}=g_{ij}A^j.$$

Ovaj proizvod mora biti tenzorske prirode, a prema rasporedu indeksa vidimo da je to *kovarijantan vektor*

$$g_{ij}A^j=A_i. \tag{7.24}$$

Time smo kontravarijantnom vektoru A^j pridružili izvestan kovarijantan vektor A_i, što je ovde ekvivalentno spuštanju indeksa. Na sličan način možemo doći do zaključka da je unutrašnji proizvod konjugovanog metričkog tenzora g^{ij} i kovarijantnog vektora A_j

$$g^{ij}A_j=A^i \tag{7.25}$$

neki *kontravarijantan vektor*, što predstavlja relaciju inverznu prethodnoj.

Ako potražimo kontravarijantan vektor asociran vektoru $A_j=g_{jk}A^k$, na osnovu (7.10) nalazimo

$$A'^i=g^{ij}(g_{jk}A^k)=\delta^i_k A^k=A^i,$$

odakle vidimo da je on identičan sa polaznim kontravarijantnim vektorom A^i. Stoga veličine A^i i A_i možemo smatrati komponentama *istog* vektora u posmatranom metričkom prostoru i u tom smislu možemo govoriti o *kontravarijantnim* odnosno *kontravarijantnim komponentama vektora A*. Prema tome, *pomoću metričkog tenzora se kovarijantne komponente nekog vektora mogu svesti na kovarijantne komponente tog istog vektora i obrnuto*. Na primer, u slučaju metričke forme (7.7) ove relacije će imati oblik

$$A^1=A_1,\quad A^2=A_2,\quad A^3=A_3,\quad A^4=-A_4. \tag{7.26}$$

Ako skalarni proizvod (7.13) napišemo kao

$$(A,B)=(g_{ij}A^i)B^j=A^i(g_{ij}B^j),$$

na osnovu (7.24) i (7.25) dobićemo

$$(A,B)=A_iB^i=A^iB_i, \tag{7.27}$$

gde se podrazumeva sumiranje po indeksu i. Ovim konciznijim obrascem izražen je skalarni proizvod pomoću kovarijantnih komponenata jednog vektora i kontravarijantnih komponenata drugog.

Na sličan način možemo formirati unutrašnje proizvode i složenijih veličina sa metričkim tenzorom. Tako na pr. proizvod $g_{ij}A^{ik}$, dobijen množenjem metričkog tenzora g_{ij} sa ma kakvim dvaput kontravarijantnim tenzorom A^{jk}, predstavlja mešoviti tenzor drugog reda, asociran tenzoru A^{jk}

$$g_{ij}A^{jk}=A_{i\cdot}^{\cdot k}. \tag{7.28}$$

Pri tome je uobičajeno da se *tačkom naznače položaji indeksa koji su spušteni ili dignuti*, kao što je naznačeno u gornjem primeru. Ako želimo da u polaznom tenzoru spustimo oba indeksa, moramo izvršiti dvostruko množenje sa metričkim tenzorom, nakon čega dobijamo

$$g_{ij}g_{kl}A^{jl}=A_{ik}. \tag{7.29}$$

Ovaj postupak može se proširiti i na još složenije izraze, pri čemu se metrički tenzori sa kojima se vrši množenje mogu tako izabrati da se izvesni indeksi po želji mogu dići ili spustiti. Kao primer navedimo proizvod

$$g_{ij}g^{kl}g_{mn}A^{jmp}_{kq}=A_{j\cdot n q}^{\cdot l\cdot p}. \tag{7.30}$$

Proverimo i direktnim računom da je na pr. izraz (7.28) zaista mešoviti tenzor. Prema obrascima (7.2) i (6.24) imamo

$$\bar{g}_{ij}=\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}g_{mn},\qquad \bar{A}^{jk}=\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}A^{pq},$$

pa množenjem dobijamo

$$\bar{A}_i^k=\bar{g}_{ij}\bar{A}^{jk}=\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}g_{mn}A^{pq}=$$

$$=\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\delta^n_p\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}g_{mn}A^{pq}=\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}g_{mn}A^{nq},$$

tj. biće

$$\bar{A}_i^k=\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}A_m^q, \tag{7.31}$$

čime je naše tvrđenje dokazano.

Slučaj Euklidovog prostora. Ako je posmatrani prostor *Euklidov*, elementi metričkog tenzora imaju oblik (7.5), te se relacija između kovarijantnih komponenata (7.24) svodi na

$$A_i=\delta_{ij}A^j.$$

Pošto u ovoj sumi po indeksu j preostaje samo član kod koga je $j=i$, ma za koje i dobićemo

$$A_i=A^i. \tag{7.32}$$

Na sličan način za tenzore drugog reda prema obrascu (7.29) biće

$$A_{ik}=\delta_{ij}\delta_{kl}A^{jl}=\delta_{ij}A^{jk},$$

tj.

$$A_{ik}=A^{ik}. \tag{7.33}$$

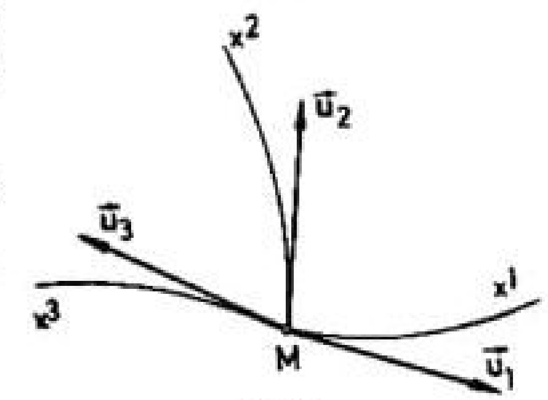
Do sličnog rezultata možemo doći i za tenzore višeg reda, te možemo zaključiti da se *u Euklidovom prostoru kontravarijantne komponente tenzora sa istim indeksom međusobno poklapaju*. Stoga u ovakvim prostorima ne moramo praviti razliku između ovih dveju vrsta komponenata i indekse možemo pisati po volji gore ili dole. Tako, recimo, za tenzor trećeg reda imamo

$$A^{ijk}=A_k^{ij}=A^i_{jk}=A_{ijk}.$$

Međutim, ovde treba podvući da dobijeni zaključci važe samo pod uslovom da je *metrička forma Euklidovog prostora svedena na oblik* (7.4). Tako na pr. u pravouglim Descartes-ovim koordinatama nema razlike između kontravarijantnih i kovarijantnih komponenata, dok u sfernim koordinatama ove komponente nisu više međusobno jednake.

Geometrijski smisao kontra i kovarijantnih komponenata. Posmatrajmo generalisani koordinatni sistem u trodimenzionom Euklidovom prostoru (sl. 7.1) i označimo generalisane koordinate tačke sa $x^i=q^i\,(i=1,2,3)$. Uočimo neki vektor **A** i razložimo ga na komponente vektore duž vektora $\mathbf{u}_i=\partial\mathbf{r}/\partial x^i$ $(i=1,2,3)$, koji prema (3.5) imaju pravac i smer koordinatnih osa

$$\mathbf{A}=C^{(i)}\mathbf{u}_i,\qquad \mathbf{u}_i=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}. \tag{7.34}$$



Sl 7.1.

Pređimo sad na drugi sistem sa generalisanim koordinatama $\bar{x}^j$. Tada će biti

$$d\mathbf{r}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}dx^i=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{x}^j}d\bar{x}^j,$$

a stavljajući

$$d\bar{x}^j=\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}dx^i,\qquad \mathbf{u}_j'=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{x}^j},$$

dobićemo

$$\mathbf{u}_i\,dx^i=\mathbf{u}_j'\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}dx^i.$$

Odavde sledi zakon transformacije vektora $\mathbf{u}_i$ pri prelazu u drugi koordinatni sistem

$$\mathbf{u}_i=\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\mathbf{u}_j'. \tag{7.35}$$

Na sličan način možemo izraziti vektor **A** i u novom sistemu

$$\mathbf{A}=\bar{C}^{(j)}\mathbf{u}_j'=C^{(i)}\mathbf{u}_i,$$

pa iskoristimo li relaciju (7.35), dobićemo

$$\bar{C}^{(j)}\mathbf{u}_j'=C^{(i)}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\mathbf{u}_j',$$

a otuda

$$\bar{C}^{(j)}=\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}C^{(i)}. \tag{7.36}$$

Ovaj rezultat nam pokazuje da se komponente $C^{(i)}$ transformišu po zakonu kontravarijantnih vektora (6.16). Na osnovu toga vidimo i njihov geometrijski smisao: *ako neki vektor* **A** *razložimo duž vektora* $\partial\mathbf{r}/\partial x^i$, *odgovarajuće komponente* $C^{(i)}$ *predstavljaće kontravarijantne komponente* A^i *tog vektora.*

Formirajmo zatim skalarni proizvod vektora **A** i vektora $\mathbf{u}_i=\partial\mathbf{r}/\partial x^i$ i označimo ga sa

$$C_{(i)}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_i,\qquad \mathbf{u}_i=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}. \tag{7.37}$$

Ovako definisani koeficijenti $C_{(i)}$ mogu se povezati sa metričkom formom

$$ds^2=d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}=\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}dx^i\right)\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j}dx^j\right)=(\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_j)\,dx^i\,dx^j,$$

odakle vidimo da su koeficijenti g_{ij} u ovom slučaju

$$g_{ij}=\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_j. \tag{7.38}$$

Na osnovu ovoga se izraz (7.37), ako se u njemu vektor **A** razloži na komponentne vektore prema (7.34), može napisati u obliku

$$C_{(i)}=\mathbf{u}_i\cdot(C^{(j)}\mathbf{u}_j)=C^{(j)}(\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_j)=g_{ij}C^{(j)}.$$

Pošto smo gore utvrdili da su koeficijenti $C^{(j)}$ kontravarijantne komponente A^j vektora **A**, na osnovu (7.24) dobijamo

$$C_{(i)}=g_{ij}A^j=A_i. \tag{7.39}$$

Odavde zaključujemo da je skup svih koeficijenata $C_{(i)}$ vektor asociran kontravarijantnom vektoru $A^j=C^{(j)}$. Prema tome njihov geometrijski smisao je sledeći: *ako neki vektor* **A** *skalarno pomnožimo sa* $\partial\mathbf{r}/\partial x^i$, *tako dobijeni koeficijenti* $C_{(i)}$ *predsavljaće kovarijantne komponente* A_i *tog vektora.* Ukoliko su vektori $\partial\mathbf{r}/\partial x^i$ jedinični, koeficijenti $C^{(i)}$ će biti *komponente* vektora **A** u klasičnom smislu, a koeficijenti $C_{(i)}$ njegove *projekcije* na odgovarajuće koordinatne ose.

Fizičke komponente. Sem kontravarijantnih i kovarijantnih komponenata mogu se uvesti i projekcije vektora na pravce koordinatnih linija i to na sledeći način. Označimo komponente jediničnih vektora koordinatnih osa u nekoj tački M sa $\alpha^i_{(r)}$ $(i,\ r=1,2,\dots,n)$, gde indeks u zagradi predstavlja redni broj jediničnog vektora. Posmatrajmo zatim neki kovarijantan vekor A_i u toj tački i formirajmo skalarni proizvod ovih vektora

$$A_{(r)}=(A,\ \alpha_{(r)})=A_i\,\alpha^i_{(r)}. \tag{7.40}$$

Tako definisane veličine nazivaju se *fizičke komponente vektora*, i one predstavljaju *projekcije vektora* A_i *na koordinatne ose*, koje se u opštem slučaju ne poklapaju ni sa kontravarijantnim ni sa kovarijantnim komponentama vektora. Prema (7.24) one se mogu napisati i u alternativnom obliku

$$A_{(r)}=g_{ij}A^j\alpha^i_{(r)}. \tag{7.41}$$

U slučaju ortogonalnih generalisanih koordinata u trodimenzionom Euklidovom prostoru metrička forma sadrži samo čisto kvadratne članove

$$ds^2=g_{11}(dx^1)^2+g_{22}(dx^2)^2+g_{33}(dx^3)^2. \tag{7.42}$$

Stoga će duž prve koordinatne ose $(dx^2=dx^3=0)$ važiti

$$ds^2=g_{11}(dx^1)^2,\quad \frac{dx^1}{ds}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}},$$

a dobijeni izraz predstavlja prvu komponentu jediničnog vektora $\alpha^i_{(1)}$. Pošto je ovaj pravac normalan na ostalim dvema koordinatnim osama, druge dve njegove komponente su jednake nuli

$$\alpha^1_{(1)}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}},\quad \alpha^2_{(1)}=0,\quad \alpha^3_{(1)}=0\,.$$

Na sličan način možemo naći i komponente ostalih jediničnih vektora $\alpha^i_{(r)}$, što se zajedno može napisati u obliku

$$\alpha^i_{(r)}=\frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\delta^i_r, \tag{7.43}$$

gde se *ne* podrazumeva sumiranje po indeksu r.

Na osnovu ovoga fizičke komponente vektora (7.40) dobijaju eksplicitan oblik

$$A_{(r)}=A_i\,\alpha^i_{(r)}=A_i\frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\delta^i_r=\frac{A_r}{\sqrt{g_{rr}}}$$

ili, ako se stavi $A_r=g_{ri}A^i$ i ima u vidu da je ovde $g_{ri}=0$ za $r\neq i$

$$A_{(r)}=\frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}g_{ri}A^i=\frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}g_{rr}A^r,$$

tj.

$$A_{(r)}=\frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}A_r=\sqrt{g_{rr}}\,A^r. \tag{7.44}$$

Ove relacije izražavaju fizičke komponente vektora pomoću njegovih kovarijantnih komponenata u posmatranom ortogonalnom koordinatnom sistemu.

Bitna karakteristika fizičkih komponenata sastoji se u tome što se, prema samoj definiciji (7.40), *njihove dimenzije uvek podudaraju sa dimenzijama intenziteta posmatranog vektora.* To je i razlog za upotrebu termina „fizičke komponente". Kontravarijantne i kovarijantne komponente, međutim, ne moraju imati ovu osobinu; štaviše, njihove dimenzije se i međusobno mogu razlikovati, što se vidi iz relacije (7.24). Naime, veličine g_{ij} ne moraju biti bezdimenzione, jer sve koordinate x^i ne moraju imati dimenzije dužine.

7.3. GEODEZIJSKE LINIJE

Christoffel-ovi simboli. Ispitajmo sad kako se transformišu parcijalni izvodi komponenata metričkog tenzora po koordinatama. Pođimo stoga od obrasca (7.2) u obliku

$$\bar g_{jk}=\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^j}\frac{\partial x^n}{\partial\bar x^k}g_{mn}$$

i diferencirajmo ga po $\bar x^i$

$$\frac{\partial\bar g_{jk}}{\partial\bar x^i}=\frac{\partial^2x^m}{\partial\bar x^j\partial\bar x^i}\frac{\partial x^n}{\partial\bar x^k}g_{mn}+\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^j}\frac{\partial^2x^n}{\partial\bar x^k\partial\bar x^i}g_{mn}+\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^j}\frac{\partial x^n}{\partial\bar x^k}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^i}\,. \tag{7.45}$$

Izvršimo li cikličnu permutaciju indeksa $i,\ j,\ k$ odnosno $l,\ m,\ n$, imaćemo

$$\frac{\partial\bar g_{ki}}{\partial\bar x^j}=\frac{\partial^2x^n}{\partial\bar x^k\partial\bar x^j}\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^i}g_{nl}+\frac{\partial x^n}{\partial\bar x^k}\frac{\partial^2x^l}{\partial\bar x^i\partial\bar x^j}g_{nl}+\frac{\partial x^n}{\partial\bar x^k}\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^i}\frac{\partial g_{nl}}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^j},$$

kao i

$$\frac{\partial\bar g_{ij}}{\partial\bar x^k}=\frac{\partial^2x^l}{\partial\bar x^i\partial\bar x^k}\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^j}g_{lm}+\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^i}\frac{\partial^2x^m}{\partial\bar x^j\partial\bar x^k}g_{lm}+\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^i}\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^j}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial\bar x^k},$$

pa oduzmimo poslednju jednačinu od zbira prvih dveju, imajući u vidu da je tenzor g_{ij} simetričan i da smemo izmeniti neme indekse

$$\frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial \bar{x}^i}+\frac{\partial \bar{g}_{ki}}{\partial \bar{x}^j}-\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial \bar{x}^k}=\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}\left(\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{nl}}{\partial x^m}-\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^n}\right)+2\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^i\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}g_{mn}. \tag{7.46}$$

Ova relacija na sugeriše da uvedemo veličinu

$$\Gamma_{ij,k}=[i\,j,k]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right), \tag{7.47}$$

koja se naziva *Christoffel-ov simbol prve vrste* i označava jednim od navedenih simbola. Iz same definicije se neposredno vidi da je ovaj simbol simetričan u odnosu na prva dva indeksa

$$\Gamma_{ji,k}=\Gamma_{ij,k}. \tag{7.48}$$

Tada nam (7.46) daje zakon transformacije simbola

$$\bar{\Gamma}_{ij,k}=\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}\Gamma_{lm,n}+\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^i\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}g_{mn}, \tag{7.49}$$

odakle zaključujemo da *Christoffel-ovi simboli prve vrste u opštem slučaju nisu tenzori*. Međutim, ako su transformacije linearne, drugi član otpada i u tom slučaju su ovi simboli kovarijantni tenzori trećeg reda.

Proizvod veličine $\Gamma_{ij,k}$ sa konjugovanim metričkim tenzorom g^{lk}

$$\Gamma^l_{ij}\equiv\left\{ {l \atop ij} \right\}=g^{lk}\,\Gamma_{ij,k}, \tag{7.50}$$

u kome se podrazumeva sumiranje po indeksu k, naziva se *Christoffel-ov simbol druge vrste*. Na osnovu (7.48) neposredno sledi da je ovaj simbol simetričan u odnosu na donje indekse

$$\Gamma^l_{ji}=\Gamma^l_{ij}, \tag{7.51}$$

a prema (7.49) i (7.50) vidimo da ni *Christoffel-ovi simboli druge vrste u opštem slučaju nisu tenzori*.

Navedene veličine zavise isključivo od metrike posmatranog prostora i predstavljaju njegove značajne karakteristike. U slučaju Euklidovog prostora i pravouglih Descartes-ovih koordinata sve komponente metričkog tenzora g_{ij} su konstantne, te su svi izvodi ovih veličina jednaki nuli. Pošto se u ovom slučaju metrička forma uvek može svesti na oblik (7.4), zaključujemo da *u Euklidovom prostoru postoji bar jedan sistem koordinata u kome su svi Christoffel-ovi simboli prve i druge vrste jednaki nuli*. To je karakteristična odlika Euklidovih prostora, kojom se oni bitno razlikuju od neeuklidskih Riemann-ovih prostora.

Geodezijske linije. Učimo dve tačke u Riemann-ovom prostoru i izvesnu krivu koja ih spaja. Neka su jednačine ove krive

$$x^i=x^i(t), \tag{7.52}$$

gde je t neki skalar, koji igra ulogu parametra. Rastojanje s između ovih tačaka duž gornje krive određeno je metričkom formom (7.1), koju napišimo u obliku

$$ds^2=g_{ij}\,dx^i\,dx^j=g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j\,dt^2,$$

pri čemu tačka označava izvod po parametru. Ako sa t_1 i t_2 označimo vrednosti parametra koje odgovaraju uočenim tačkama, za rastojanje između njih duž odabrane linije imaćemo

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j}\,dt. \tag{7.53}$$

Od svih mogućih krivih koje spajaju ove tačke potražimo sad onu *duž koje je rastojanje s minimalno*, tj. duž koje gornji integral ima minimalnu vrednost. Takve linije nazivaju se *geodezijske linije* i od posebnog su interesa u opštoj teoriji relativnosti.

Kao što je poznato iz matematičke analize, funkcije $x^i(t)$ za koje je integral

$$\mathcal{J}=\int_{t_1}^{t_2}F(x^k,\dot{x}^k,t)\,dt$$

stacionaran, tj. za koje je $\delta\mathcal{J}=0$, su rešenja Euler-Lagrange-ovih diferencijalnih jednačina

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k}-\frac{\partial F}{\partial x^k}=0. \tag{7.54}$$

U slučaju koji razmatramo (7.53) je

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k}=\frac{1}{2}(g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j)^{-\frac{1}{2}}\,2\,g_{ik}\,\dot{x}^i=\frac{1}{\dot{s}}\,g_{ik}\,\dot{x}^i,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^k}=\frac{1}{2}(g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\,\dot{x}^j=\frac{1}{2\dot{s}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\,\dot{x}^j,$$

pa jednačina (7.54) dobija oblik

$$\frac{d}{dt}\frac{g_{ik}\,\dot{x}^i}{\dot{s}}-\frac{1}{2\dot{s}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\,\dot{x}^j=0$$

ili, posle sređivanja

$$g_{ik}\,\ddot{x}^i+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\,\dot{x}^j-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\,\dot{x}^j-\frac{g_{ik}\,\dot{x}^i\,\ddot{s}}{\dot{s}}=0. \tag{7.55}$$

Ako drugi član rastavimo na dva dela i u drugom izmenimo red sumiranja, imaćemo

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i\,\dot{x}^j,$$

pa uvodeći oznaku (7.47), prethodnu jednačinu možemo napisati u obliku

$$g_{ik}\,\ddot{x}^i+\Gamma_{ij,k}\,\dot{x}^i\dot{x}^j=\frac{g_{ik}\,\dot{x}^i\,\ddot{s}}{\dot{s}}. \tag{7.56}$$

Uzmemo li dužinu luka s za parametar, biće $\dot{s} = 1$, $\ddot{s} = 0$, te otpada zadnji član. Ako potom pomnožimo obe strane sa g^{lk} i sumiramo po k, imaćemo

$$g^{lk} g_{ik} \frac{d^2 x^i}{ds^2} + g^{lk} \Gamma_{ij,k} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0.$$

Prvi član na osnovu (7.10) iznosi

$$g^{lk} g_{ik} \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \delta^l_i \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{d^2 x^l}{ds^2},$$

pa koristeći simbol (7.50), dobijamo

$$\frac{d^2 x^l}{ds^2} + \Gamma^l_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0. \tag{7.57}$$

To su *diferencijalne jednačine geodezijske linije*, tj. takve linije koja spaja najkraćim putem uočene dve tačke u posmatranom Riemann-ovom prostoru. U slučaju Euklidovog prostora sa metričkom formom (7.4) svi Christoffel-ovi simboli su jednaki nuli, pa se prethodna jednačina svodi na

$$\frac{d^2 x^l}{ds^2} = 0,$$

odakle se integracijom dobija

$$x^l = a^l s + b^l. \tag{7.58}$$

Ove jednačine predstavljaju pravu liniju, koja je zaista najkraća linija između dveju tačaka u ovom prostoru.

7.4. APSOLUTNO DIFERENCIRANJE

Kovarijantni izvodi. Iz ranijeg izlaganja smo videli, prema (6.21), da skup parcijalnih izvoda skalara $\partial\phi/\partial x^i$ uvek predstavlja kovarijantan vektor. Ovaj izvod često se označava zapetom

$$\Phi_{,i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}, \tag{7.59}$$

čime se želi naglasiti da se kovarijantni indeks pojavio kao posledica diferenciranja.

Međutim, skup $\partial A_i/\partial x^j$ u opštem slučaju ne predstavlja tenzor, kao što se vidi iz (6.22). Da bismo diferenciranjem kovarijantnog vektora A_i došli do izvesnog tenzora, formirajmo unutrašnji proizvod tog kovarijantnog vektora A_i i kontravarijantnog vektora dx^i/ds. Taj proizvod je izvestan skalar $A_i\, dx^i/ds$, a ako ga diferenciramo po luku s *geodeziske linije*, dobićemo opet neki *skalar* tj.

$$\frac{d}{ds}\left(A_i \frac{dx^i}{ds}\right) = \text{inv}. \tag{7.60}$$

Razvijemo li izraz na levoj strani, imaćemo

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^i}{ds} + A_i \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \text{inv}.,$$

a zamenom d^2x^l/ds^2 iz diferencijalne jednačine geodezijske linije (7.57)

$$A_i \frac{d^2 x^i}{ds^2} = A_l \frac{d^2 x^l}{ds^2} = -A_l \Gamma^l_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds},$$

dobićemo

$$\frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma^l_{ij} A_l\right) = \text{inv}. \tag{7.61}$$

Pošto je ovaj proizvod skalar, a $dx^i/ds \cdot dx^j/ds$ kontravarijantan tenzor, prema zakonu količnika izraz u zagradi mora biti *kovarijantan tenzor*, koji se obično označava sa

$$A_{i,j} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma^l_{i,j} A_l. \tag{7.62}$$

Ovaj izraz naziva se *kovarijantni izvod kovarijantnog vektora A_i po koordinati x^j*, pri čemu je opet kovarijantan indeks j, dobijen kao posledica diferenciranja, odvojen zapetom.

Da bismo došli do analogog izvoda kontravarijantnog vektora, stavimo u poslednjem obrascu $A_i = g_{ik} A^k$

$$A_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(g_{ik} A^k\right) - \Gamma^l_{ij} g_{lk} A^k = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} A^k + g_{ik} \frac{\partial A^k}{\partial x^j} - \Gamma^l_{ij} g_{lk} A^k,$$

čime dobijemo

$$A_{i,j} = g_{ik} \frac{\partial A^k}{\partial x^j} + A^k \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma^l_{ij}\, g_{lk}\right). \tag{7.63}$$

Izraz u zagradi može se razviti na osnovu (7.47) i (7.50)

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma^l_{ij} g_{lk} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - g^{lm} \Gamma_{ij,m} g_{lk} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \delta^m_k \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right) =$$

$$= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right),$$

što predstavlja Christoffel-ov simbol prve vrste

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma^l_{ij} g_{lk} = \Gamma_{jk,i}. \tag{7.64}$$

Tada izraz (7.63) dobija oblik

$$A_{i,j} = g_{ik} \frac{\partial A^k}{\partial x^j} + \Gamma_{jk,i} A^k,$$

a posle množenja sa g^{li} i sumiranja po i

$$g^{li} A_{i,j} = g^{li} g_{ik} \frac{\partial A^k}{\partial x^j} + g^{li} \Gamma_{jk,i} A^k = \delta^l_k \frac{\partial A^k}{\partial x^j} + \Gamma^l_{jk} A^k,$$

tj. biće

$$g^{li} A_{i,j} = \frac{\partial A^l}{\partial x^j} + \Gamma^l_{jk} A^k. \tag{7.65}$$

Pošto smo videli da je skup $A_{i,j}$ kovarijantan tenzor, izraz na levoj strani biće mešoviti tenzor tipa C^i_j, te i izraz na desnoj strani mora biti ***mešoviti tenzor***, koji se takođe označava zapetom

$$A^l_{,j}=\frac{\partial A^l}{\partial x^j}+\Gamma^l_{jk}A^k.$$

Ako, radi poređenja sa izrazom (7.62), indekse l i k zamenimo sa i i l, gornji obrazac možemo napisati u obliku

$$A^i_{,j}=\frac{\partial A^i}{\partial x^j}+\Gamma^i_{jl}A^l. \tag{7.66}$$

Ovaj izraz naziva se ***kovarijantni izvod kontravarijantnog vektora A^i po koordinati x^j***. Tako definisani pojmovi $A_{i,j}$ i $A^i_{,j}$ predstavljaju ***generalizacije parcijalnih izvoda vektora po koordinatama*** i na njih se svode u slučaju Euklidovog prostora.

Kovarijantna formulacija prostornih izvoda. Pomoću navedenih pojmova mogu se i prosotrni izvodi iz vektorske analize generalisati i formulisati u tenzorskom obliku. Ako je Φ skalar, ***gradijent skalara Φ*** definiše sa kao skup parcijalnih izvoda $\Phi_{,i}$

$$(\mathrm{grad}\,\Phi)_i=\Phi_{,i}=\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}, \tag{7.67}$$

slično kao i u klasičnoj teoriji. Pošto je ovaj skup prema (6.21) kovarijantan vektor, i ***gradijent skalara predstavlja kovarijantan vektor***, pri čemu treba podvući da ovaj zaključak važi samo pod uslovom da je Φ zaista skalar u smislu opšteg tenzorskog računa.

Divergencija kontravarijantnog vektor A^i definiše se kao rezultat kontrakcije kovarijantnog izvoda $A^i_{,j}$

$$\mathrm{div}\,A^i=A^i_{,i} \tag{7.68}$$

što se prema (7.65) može napisati eksplicitno u obliku

$$\mathrm{div}\,A^i=\frac{\partial A^i}{\partial x^i}+\Gamma^i_{il}A^l. \tag{7.69}$$

Prema samom načinu formiranja divergencije kontrakcijom iz kovarijantnog izvoda $A^i_{,j}$, za koji znamo da je mešoviti tenzor, zaključujemo da je ***divergencija vektora uvek skalar***.

Rotor kovarijantnog vektora A_i definiše se kao skup razlika kovarijantnih izvoda $A_{i,j}$ i $A_{j,i}$

$$(\mathrm{rot}\,A_i)_j=A_{i,j}-A_{j,i}, \tag{7.70}$$

što se prema (7.62) i osobini Christoffel-ovih simbola (7.51) svodi na

$$(\mathrm{rot}\,A_i)_j=\frac{\partial A_i}{\partial x^j}-\frac{\partial A_j}{\partial x^i}. \tag{7.71}$$

Na osnovu same definicije rotora vidimo da on ima istu prirodu kao i kovarijantni izvod $A_{i,j}$, tj. ***rotor vektora predstavlja kovarijantan tenzor***, čime se ovaj pojam bitno razlikuje u klasičnoj teoriji vektora.

Najzad, može se uvesti i ***laplasijan skalara Φ*** kao divergencija gradijenta

$$\Delta\Phi=\mathrm{div}\,(g^{ij}\Phi_{,j})=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}+\Gamma^i_{il}g^{lj}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right), \tag{7.72}$$

pri čemu se gradijent morao najpre napisati u obliku kontravarijantnog vektora $g^{ij}\Phi_{,j}$.

U slučaju Euklidovog prostora i provouglih Descartes-ovih koordinata Christoffel-ovi simboli su jednaki nuli, te se svi navedeni izraze svode na poznate izraze u vektorskoj analizi.

Apsolutni (Bianchi-ev) izvod. Uočimo li u posmatranom Riemann-ovom prostoru ma kakavu krivu $x^i=x^i(t)$, unutrašnji proizvod kovarijantnog izvoda $A_{i,j}$ i izvoda koordinata po skalarnom parametru dx^j/dt naziva se ***apsolutni*** ili ***Bianchi-ev izvod kovarijantnog vektora A_i po parametru t*** i obično se označava sa

$$\frac{\delta A_i}{\delta t}=A_{i,j}\frac{dx^j}{dt}. \tag{7.73}$$

Pošto je $A_{i,j}$ kovarijantan tenzor, a dx^j/dt kontravarijantan vektor, gornji izraz kao njihov unutrašnji proizvod predstavlja *kovarijantan vektor* i prema (7.62) njegov analitički oblik je

$$\frac{\delta A_i}{\delta t}=\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j}-\Gamma^l_{ij}A_l\right)\frac{dx^j}{dt},$$

tj. biće

$$\frac{\delta A_i}{\delta t}=\frac{dA_i}{dt}-\Gamma^l_{ij}\frac{dx^j}{dt}A_l. \tag{7.74}$$

Na sličan način uvodi se i ***apsolutni izvod kontravarijantnog vektora A^i po parametru t*** kao unutrašnji proizvod kovarijantnog izvoda $A^i_{,j}$ i kontravarijantnog vektora dx^j/dt

$$\frac{\delta A^i}{\delta t}=A^i_{,j}\frac{dx^j}{dt}. \tag{7.75}$$

Imajući u vidu da je $A^i_{,j}$ mešoviti tenzor, ovaj proizvod je ***kontravarijantan vektor*** i u eksplicitnom obliku prema (7.66) glasi

$$\frac{\delta A^i}{\delta t}=\left(\frac{\partial A^i}{\partial x^j}+\Gamma^i_{jl}A^l\right)\frac{dx^j}{dt},$$

tj.

$$\frac{\delta A^i}{dt}=\frac{dA^i}{dt}+\Gamma^i_{jl}\frac{dx^j}{dt}A^l. \tag{7.76}$$

Ovako definisani pojmovi predstavljaju *generalizacije totalnog izvoda vektora po parametru*, na koji se svode u Euklidovom prostoru. Uvek kad posle diferenciranja vektora po parametru treba opet da dobijemo veličinu *iste* prirode, moramo ga diferencirati u gornjem smislu reči.

Za vektore A_i ili A^i kaže se da *se kreću paralelno* duž neke krive $x^i=x^i(t)$ ako je njihov apsolutni izvod $\delta A_i/\delta t$ odnosno $\delta A^i/\delta t$ duž te krive jednak nuli. Na sličan način mogu se generalisati i ostali kinematički pojmovi u Riemann-ovoj geometriji.

Napomenimo na kraju da se generalizacijom navedenih izraza mogu formulisati kako kovarijantni tako i apsolutni izvodi i tenzora drugog i višeg reda. Detaljnije o ovim pitanjima čitalac može naći u literaturi navedenoj na kraju ove knjige.

ZADACI

7.1. Naći metrički tenzor, konjugovani metrički tenzor i Christoffel-ove simbole prve i druge vrste za paraboličke koordinate iz zadatka 3.12.

7.2. Naći Christoffel-ove simbole prve i druge vrste za (a) Descartes-ove, (b) cilindrične i (c) sferne koordinate.

7.3. Naći zakone transformacije za Christoffel-ove simbole druge vrste.

7.4. Pokazati važenje sledećih jednakosti:

(a) $\dfrac{\partial g_{pq}}{\partial x^m} = \Gamma_{pm,q} + \Gamma_{qm,p}$;

(b) $\dfrac{\partial g^{pq}}{\partial x^m} = -(g^{pn}\Gamma^q_{mn} + g^{qn}\Gamma^p_{mn})$;

(c) $\Gamma^p_{pq} = \dfrac{\partial}{\partial x^q} \ln\sqrt{g}$.

7.5. Uopštiti obrasce (7.62) i (7.66) na slučaj tenzora proizvoljnog ranga.

7.6. Na osnovu rezultata prethodnog zadatka

(a) naći kovarijantni izvod tenzora $A^j_i\, B^{lm}_k$,

(b) pokazati da su kovarijantni izvodi tenzora g_{ij} i g^{ij} jednaki nuli.

7.7. Napisati Christoffel-ove simbole druge vrste i jednačine geodezijskih linija za metriku:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + [(x^2)^2 - (x^1)^2](dx^2)^2.$$

7.8. Odrediti divergenciju voktora A^i pomoću njegovih fizičkih komponenata u paraboličkim koordinatama (v. zadatke 3.12. i 7.1.).

7.9. Koristeći rezultate zadatka 7.5. naći Bianchi-jev izvod mešovitog tenzora A^{jk}_i.

7.10. Pokazati da se divergencija kontravarijantnog vektora A^i može napisati kao:

$$\operatorname{div} A^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g}\, A^i).$$

Izraziti i laplasijan u analogom obliku i napisati ga eksplicitno u (a) cilindričnim i (b) sfernim koordinatama. Da li se ovi rezultati poklapaju sa izrazima (3.40) i (3.44) klasične teorije?

7.11. Relacijom

$$A_{i,jk} - A_{i,kj} = R^l_{ijk}\, A_l,$$

u kojoj se proizvoljan kovarijantni vektor A_i dvaput diferencira kovarijantno, definisan je tenzor R^l_{ijk} (tzv. *Riemann-Christoffel-ov tenzor*). Naći njegov eksplicitni oblik.

7.12. Pomoću Riemann-Christoffel-ovog tenzora R^l_{ijk} iz prethodnog zadatka definiše se asocirani *kovarijantni tenzor krivine* spuštanjem kontravarijantnog indeksa,

$$R_{ijkl} = g_{sl}\, R^s_{ijk}.$$

Pokazati da za kovarijantni tenzor krivine važi:

(a) $R_{ijkl} = R_{klij}$,

(b) $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$,

(c) $R_{ijkl} + R_{kjil} + R_{klij} + R_{ilkj} = 0$

(u prvom indentitetu se radi o zameni prvog i drugog para indeksa, u drugom se prvi indeks drži fiksiran a ostala tri ciklički permutuju, a u trećem se radi o permutacijama pri kojima menjaju mesta prvi i treći indeks i drugi i četvrti).

7.13. Naći fizičke komponente vektora brzine $v^i = \dfrac{dx^i}{dt}$ i vektora ubrzanja $a^i = \dfrac{\delta v^i}{\delta t}$ u (a) cilindričnim i (b) sfernim koordinatama. Zašto je brzina definisana kao običan izvod po vremenu, a ubrzanje kao Bianchi-jev?

7.14. Ako je $T = \dfrac{1}{2} m (v)^2$ kinetička energija materijalne tačke mase m i intenziteta brzine v, pokazati da su izrazima

$$\frac{1}{m}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^k}\right]$$

definisane kovarijantne komponente ubrzanja.

7.15. Izraziti divergenciju vektora A^i pomoću njegovih fizičkih komponenata u (a) cilindričnim i (b) sfernim koordinatama.

ČETVRTI DEO

LINEARNI VEKTORSKI PROSTORI

8. STRUKTURE APSTRAKTNIH PROSTORA

8.1. UVODNE NAPOMENE

Sadržaj prethodnih glava se odnosio na matematičke objekte različite prirode (vektori, tenzori, matrice), ali su razmatrane algebarske operacije ipak imale dosta zajedničkog. Na ovom mestu ćemo rekapitulirati iznete činjenice i osvetliti ih sa jednog opštijeg stanovišta, sa ciljem da se sagledaju određene generalizacije korisne za primene u Teorijskoj fizici. U tom razmatranju ćemo upotrebljavati termin *prostor* da bismo označili ma kakav skup matematičkih objekata sa definisanom strukturom (na primer, prostor matrica tipa 3×3, prostor nula-nizova, prostor periodičnih funkcija sa periodom 2π, itd). U apstraktnim razmatranjima koja slede, prostor ćemo označavati sa X, a njegove elemente sa $x, y, z, \ldots (x, y, z \in X)$.

Za primene su od prvenstvenog interesa prostori sa algebarskom ili geometrijskom strukturom, ili sa obe. Pod *algebarskom strukturom* podrazumevamo skup algebarskih operacija definisanih za elemente datog prostora. *Geometrijska struktura* se uvodi definisanjem takvih pojmova kao što su dužina (ili intenzitet) zadanog elementa X, ugao i rastojanje između dva zadana elementa iz X, itd. Podsetimo se, na primer, da su u prostoru (tj. skupu) vektora u trodimenzionom Euklidovom prostoru (Glava 1) bile definisane operacije sabiranja, množenja vektora skalarom, skalarnog i vektorkog množenja dva vektora, što sve zajedno čini algebarsku strukturu ovog prostora. Međutim, u tom prostoru su uvedeni i pojmovi intenziteta i ugla, tj. on je snabdeven i određenom geometrijskom strukturom. Zapazimo odmah, da u ovom konkretnom primeru geometrijska struktura posmatranog prostora izvire iz njegove algebre, pošto su geometrijski pojmovi definisani preko skalarnog proizvoda. Prostor (tj. skup) tenzora u trodimenzionom Euklidovom prostoru (Glava 4) je bilo celishodno snabdeti određenom algebarskom strukturom definišući sabiranje i množenje dva tenzora, množenje tenzora skalarom i obrazovanje konjugovanog tenzora. Za razmatranja u Glavama 4. i 5. nije bilo potrebno prostoru tenzora dati i geometrijsku strukturu, tako da je, na primer, pitanje rastojanja između dva zadana tenzora ili ugla između njih zasad lišeno smisla. Slična situacija je i sa prostorom matrica (Glava 5.), gde takođe postoji samo algebarska struktura. Radi kratkoće, u daljem izlaganju ćemo vektore i tenzore u trodimenzionom Euklidovom prostoru zvati klasični vektori odnosno, klasični tenzori.

U ovoj Glavi će biti opisane najjednostavnije algebarske i geometrijske strukture interesantne za Teorijsku fiziku. Izlaganje počinje detaljnom analizom algebarske strukture *linearnog vektorskog prostora*. Posle ovoga je dat kraći osvrt na geometrijsku strukturu *metričkog prostora*. Nakon toga su izložena osnovna

svojstva *normiranih prostora*, koji predstavljaju najvažniji primer prostora sa geometrijskom strukturom koja izvire iz algebre. Relativno složena algebarska i geometrijska struktura *unitarnih* i *Hilbertovih prostora* će, zbog velike važnosti za primene u Teorijskoj fizici, biti opširnije izložena u narednoj Glavi.

8.2. LINEARNI VEKTORSKI PROSTORI

Definicija. *Linearni vektorski prostor* (ponekad se kaže samo *linearni prostor* ili samo *vektorski prostor*) je ma kakav skup elemenata iste matematičke prirode za koje su definisane samo dve algebarske operacije, *sabiranje elemenata i množenje elemenata skalarom*, za koje se postuliraju niže navedene osobine koje predstavljaju generalizaciju odgovarajućih osobina osnovnih operacija kod vektora. Ove dve operacije čine celokupnu algebarsku strukturu jednog linearnog vektorskog prostora, a geometrijska struktura se u linearnom vektorskom prostoru ne uvodi.

Sabiranje elemenata se definiše preciziranjem pravila na osnovu koga je svakom paru elemenata x, y iz prostora X moguće pridružiti jedan element takođe iz prostora X; ovaj poslednji se obično naziva *zbir* zadanih elemenata i mi ćemo ga označiti sa $x \oplus y$ (čitaćemo x plus y; specijalan znak $\oplus$ je uzet da bi se naglasilo da se ne radi o običnom sabiranju brojeva). Ovakve operacije kojima se paru elemenata iz datog prostora pridružuje element istog prostora zovu se uopšte *unutrašnje kompozicije*. Sabiranje elemenata kao unutrašnja kompozicija linearnog vektorskog prostora mora imati sledeće osobine:

(a′) Sabiranje mora biti *asocijativno*, tj. za svako $x, y, z \in X$ mora važiti

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z). \tag{8.1}$$

(b′) Sabiranje mora biti *komutativno*, tj. za svako $x, y \in X$ mora važiti:

$$x \oplus y = y \oplus x. \tag{8.2}$$

(c′) Mora postojati *neutralni element* $\mathbf{0}$, takav da je jednakost

$$x \oplus \mathbf{0} = x \tag{8.3}$$

ispunjena za svako $x \in X$. Neutralni element se naziva još i *nulti element* ili, kraće, *nula*.

(d′) Svaki element $x \in X$ mora imati *suprotni element* $(-x)$ takav da je uvek

$$x \oplus (-x) \equiv x \ominus x = \mathbf{0}; \tag{8.4}$$

navedena relacija istovremeno objašnjava smisao znaka $\ominus$. Suprotni element se ponekad naziva i *inverzni* (u odnosu na sabiranje) ili *simetrični*.

Konciznije rečeno, unutrašnja kompozicija linearnog vektorskog prostora mora imati sve osobine komutativne (Abelove) grupe, što predstavlja generalizaciju operacije sabiranja kod običnih brojeva, klasičnih vektora, klasičnih tenzora i matrica. Za označavanje ove operacije se zbog toga u literaturi dosta često koristi običan znak + umesto specijalnog $\oplus$.

Množenje elemenata skalarom je uopšte operacija kojom se ma kom skalaru α (realnom ili kompleksnom) i ma kom elementu $x \in X$ koordinira jedan element iz X koji se označava sa αx. Operacije kojima se paru elemenata iz dva različita prostora po određenom pravilu pridružuje neki element iz jednog od ta dva prostora zovu se *spoljašnje kompozicije*. Množenje elemenata skalarom kao spoljašnja kompozicija linearnog vektorskog prostora mora imati sledeće osobine:

(a″) Mora biti *asocijativno u odnosu na množenje skalara*, tj. ma za koje $x \in X$ i ma koje α i β mora važiti

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta) x. \tag{8.5}$$

(b″) Mora biti *distributivno u odnosu na sabiranje elemenata linearnog vektorskog prostora*, tj. uvek mora biti:

$$\alpha(x \oplus y) = \alpha x \oplus \alpha y. \tag{8.6}$$

(c″) Mora biti *distributivno u odnosu na množenje sumom skalara*, tj. ma za koje α i β i za svako $x \in X$ mora biti ispunjena jednakost:

$$(\alpha + \beta) x = \alpha x \oplus \beta x. \tag{8.7}$$

(d″) Mora važiti relacija

$$1 x = x, \tag{8.8}$$

gde je 1 jedinica iz skupa skalara.

Operacije množenja skalarom kod klasičnih vektora, kod klasičnih tenzora i kod matrica očevidno imaju sve navedene osobine spoljašnje kompozicije linearnog vektorskog prostora.

Iz relacija (8.1)–(8.8) proističe niz posledica važnih za razmatranje odnosa u linearnom vektorskom prostoru. Najvažnije od ovih posledica nabrojane su u zadatku 8.1. na kraju ove Glave. Proveravanje njihove ispravnosti je srazmerno jednostavno i čitaocu se preporučuje da se već na ovom mestu upozna sa njima.

Može se desiti da neki podskup $Y \subset X$ datog linearnog vektorskog prostora predstavlja jedan linearan vektorski prostor *sam za sebe*, tj. da iz činjenice da $y_1, y_2 \in Y$ sledi da je takođe i $\alpha_1 y_1 \oplus \alpha_2 y_2 \in Y$ pri ma kakvim skalarima α_1 i α_2. U takvom slučaju ćemo Y zvati *linearnim potprostorom* prostora X.

Primeri linearnih vektorskih prostora. Navedimo nekoliko primera linearnih vektorskih prostora i njihovih linearnih potprostora.

(1) *Klasični vektori.* U prostoru klasičnih vektora $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ definisane su operacije sabiranja i množenja skalarom, opisane u Glavi 1. Ove operacije očevidno zadovoljavaju sve uslove (8.1)–(8.8), tako da klasični vektori čine jedan linearan vektorski prostor. Štaviše, prostor običnih vektora je, u izvesnom smislu, poslužio kao uzor za definisanje apstraktnog linearnog vektorskog prostora i *često se elementi ma kog linearnog vektorskog prostora takođe nazivaju i vektori*. Istaknimo ponovo da prostor klasičnih vektora ima zapravo bogatiju strukturu nego što se to zahteva od linearnog vektorskog prostora, pošto su u prostoru vektora definisane još operacije skalarnog i vektorskog množenja. Prva od tih operacija očevidno nije ni spoljašnja ni unutrašnja kompozicija (paru *vektora* se tom operacijom pridružuje *skalar*), dok druga predstavlja unutrašnju kompoziciju (paru *vektora* se, po određenom pravilu, pridružuje *vektor*) ali bez osobina grupe. Zaista, za vektorski proizvod ne važi zakon asocijativnosti (8.1), jer se iz relacije (1.40) neposredno vidi da je $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$. Vektorski proizvod nije ni komutativan kao što zahteva jednačina (8.2), jer je, prema (1.30), $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$. Ne postoji ni neutralni element; to bi bio vektor $\mathbf{n}$ za koji bi pri proizvoljnom $\mathbf{A}$ važila relacija $\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{A}$. Vektor $\mathbf{A} \times \mathbf{n}$ je uvek normalan na $\mathbf{A}$ i ne može biti jednak ovom vektoru, izuzev trivijalnog slučaja $\mathbf{A} = 0$.

(2) *Klasični tenzori.* Sabiranje klasičnih tenzora $\mathcal{T}=\{\mathbf{T}_k, \boldsymbol{\varepsilon}_k\}$ i njihovo množenje skalarom, definisani jednačinama (4.33) i (4.12), zadovoljavaju sve uslove koji se zahtevaju od linearnog vektorskog prostora. I prostor klasičnih tenzora ima zapravo bogatiju algebarsku strukturu. Naime, osim operacija potrebnih za linearni vektorski prostor, definisane su još i operacija tenzorskg množenja (4.35) odnosno (4.36) i operacija obrazovanja konjugovanog tenzora (4.27). Prva od ovih operacija je tako uvedena da nesingularni tenzori u odnosu na nju takođe čine grupu, ali ne komutativnu. Druga od pomenutih operacija uopšte nije kompozicija.

(3) *Matrice datog tipa $m\times n$.* Jednačine (5.4) i (5.6) kojima se kod matrica datog tipa $m\times n$ definišu operacije sabiranja i množenja skalarom jasno pokazuju da je i to jedan linearan vektorski prostor. Napomenimo uzgred da pokazuju da je *matrično množenje* (5.7) *nije, u opštem slučaju, unutrašnja kompozicija.* Naime, ova operacija je definisana za per matrica od kojih je prva tipa $m\times n$ a druga tipa $n\times p$, dok je proizvod tipa $m\times p$, što znači da se paru elemenata iz dvaju različitih prostora pridružuje element trećeg. *Jedino kod kvadratnih matrica* će matrično množenje biti unutrašnja kompozicija i, ako se ograničimo na nesingularne kvadratne matrice, imaće osobine grupe (ali ne komutativne).

(4) *Prostor E_k.* To je prostor čiji su elementi uređni agregati od k (realnih ili kompleksnih) brojeva,

$$E_k \ni x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k).$$

Elemente ovog prostora možemo geometrijski shvatiti kao tačke jednog (u opštem slučaju kompleksnog) k-dimenzionalnog prostora, ili kao vektore povučene iz tačke $(0, 0, 0, \ldots, 0)$ („koordinatni početak") u tačku $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$. Za izvesne primene je celishodno uvesti ograničenje da su brojevi ξ_i („koordinate tačaka" ili „komponente vektora") realni, i u tom slučaju se govori o *prostoru R_k*. Prostor E_k možemo učiniti linearnim vektorskim prostorom, ako sabiranje i množenje skelara definišemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} x\oplus y&=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \ldots, \xi_k+\eta_k),\\ \alpha x&=(\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots, \alpha\xi_k).\end{aligned} \tag{8.9}$$

Ove relacije su neposredne generalizacije analogih operacija vektorske algebre kod klasičnih vektora.

(5) *Skup s svih beskonačnih nizova,* $s\ni x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ biće takođe linearni vektorski prostor, ukoliko se zbir dva beskonačna niza definiše kao beskonačan niz čiji su članovi jednaki zbiru korespondentnih članova nizova-sabiraka, a proizvod skalara i beskonačnog niza definiše kao beskonačan niz čiji se članovi dobijaju množenjem članova polaznog niza tim skalarom. Drugim rečima, treba staviti:

$$\begin{aligned} x\oplus y&=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \ldots, \xi_n+\eta_n, \ldots),\\ \alpha x&=(\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots, \alpha\xi_n, \ldots).\end{aligned} \tag{8.10}$$

Ove definicije su dalje generalizacije relacija (8.9) iz E_k.

U ovom prostoru se može izdvojiti nekoliko linearnih potprostora od interesa za primene. Takav je, recimo, *skup svih ograničenih nizova*, tj. nizova čiji su svi članovi po apsolutnoj vrednosti manji od nekog broja karakterističnog za dati niz. Uobičajeno je da se ovaj skup označava sa m.
Dakle,

$$m\ni x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots);\ |\xi_\nu|\leq M_x.$$

Nije teško pokazati da je ovo zaista linearni potprostor prostora s, tj. da ako su $x, y\in m$ da je onda i $\alpha_1 x\oplus\alpha_2 y=(\alpha_1\xi_1+\alpha_2\eta_1, \ldots, \alpha_1\xi_n+\alpha_2\eta_n, \ldots)$ takođe element tog skupa. To se vidi iz sledećeg niza očevidnih nejednakosti

$$\begin{aligned} |\alpha_1\xi_\nu+\alpha_2\eta_\nu| &\leq |\alpha_1\xi_\nu|+|\alpha_2\eta_\nu|=|\alpha_1|\,|\xi_\nu|+|\alpha_2|\,|\eta_\nu|\leq\\ &\leq|\alpha_1|M_x+|\alpha_2|M_y.\end{aligned}$$

Slično se može pokazati da će *skup svih konvergentnih nizova c* takođe biti jedan linearni potprostor s. Naime, zbir dva konvergentna niza u smislu relacije (8.10) je uvek konvergentan niz, a isto važi i za proizvod nekog konvergentnog niza i skalara. *Skup svih nula-nizova c_0* (tj. nizova čija je granična vrednost jednaka nuli) je takođe očevidan primer linearnog potprostora u prostoru s.

Od posebne važnosti u primenama je *skup l_p beskonačnih nizova* $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ *sa osobinom da suma* $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_\nu|^p$ *konvergira*; ovde je p neki realan i pozitivan broj koji nije manji od jedinice ($p\geq 1$). Da je ovakvom osobinom izdvojeni skup beskonačnih nizova zaista linearni potprostor s, vidi se iz *Minkowski-jeve nejednačine za sume*. Kao što je poznato iz matematičke analize (v. i zadatak 8.2.), ova nejednačina ima oblik

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|u_\nu+v_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\leq\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|u_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|v_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{8.11}$$

i važi za svako $p\geq 1$. Dakle, ako su $x, y\in l_p$, onda za beskonačni niz

$$\alpha_1 x\oplus\alpha_2 y=(\alpha_1\xi_1+\alpha_2\eta_1, \alpha_1\xi_2+\alpha_2\eta_2, \ldots, \alpha_1\xi_n+\alpha_2\eta_n, \ldots)$$

na osnovu Minkowski-jeve nejednačine (8.11) imamo:

$$\begin{aligned}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_1\xi_\nu+\alpha_2\eta_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}&\leq\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_1\xi_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_2\eta_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}=\\ &=|\alpha_1|\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|\xi_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+|\alpha_2|\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|\eta_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Pošto napisana nejednakost važi za svako n, možemo pustiti da $n\to\infty$, pri čemu desna strana konvergira, jer su nizovi x i y po pretpostavci elementi l_p. No, to onda znači da konvergira i leva strana iste nejednakosti, tj. da je i $\alpha_1 x\oplus\alpha_2 y$ element istog prostora.

(6) Nabrajanje primera linearnih vektorskih prostora završićemo *prostorom $C[a, b]$ svih neprekidnih funkcija definisanih u datom zatvorenom intervalu* $[a, b]$. On postaje linearni vektorski prostor ako se unutrašnja i spoljašnja kompozicija definišu kao obično sabiranje funkcija i njihovo množenje brojevima (ovakva definicija algebarskih operacija ima smisla, jer su zbir dve neprekidne funkcije i proizvod neprekidne funkcije i konstante uvek neprekidne funkcije).

I ovde se može izdvojiti nekoliko linearnih potprostora važnih u primenama. Nije teško videti, na primer, da *skup svih polinoma najviše k-tog stepena* $P_k[a, b]$ ili *skup svih neprekidnih periodičnih funkcija sa periodom $b-a$*, $\tilde{C}[a, b]$ predstavljaju, svaki za sebe, jedan linearni vektorski prostor, tako da su oni linearni potprostori u prostoru $C[a, b]$.

Poseban interes predstavljaće linearni potprostor $C[a, b]$ koji obrazuju *sve neprekidne funkcije kod kojih integral* $\int_a^b |x(t)|^p \, dt$ *konvergira* $(p \geq 1)$. Navedeni integral shvatamo u uobičajenom (Riemann-ovom) smislu, a posmatrani skup neprekidnih funkcija označavamo sa $C_p[a, b]$. Da je ovaj skup linearan prostor za sebe sledi iz generalizacije Minkowski-jeve nejednačine (8.11) na integrale; dokazivanje je analogo onome kod prostora l_p.

Ovih nekoliko primera jasno pokazuje da je konkretna priroda elemenata linearnih vektorskih prostora veoma raznovrsna, i da sve ove prostore objedinjuje samo postojanje unutrašnjie i spoljašnje kompozicije sa osobinama (8.1)–(8.8).

8.3. LINEARNA NEZAVISNOST. IZOMORFIZAM LINEARNIH VEKTORSKIH PROSTORA

Pojam linearne nezavisnosti. Za *konačan broj* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ elemenata datog linearnog vektorskog prostora kažemo da su *linearno nezavisni* ako relacija

$$\alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \cdots \oplus \alpha_m x_m = \theta \tag{8.12}$$

može biti zadovoljena jedino kada su svi skalari α_i istovremeno jednaki nuli. Onda je, naime svaki sabirak gornje sume ponaosob jednak nultom elementu θ.

Ukoliko razmatramo *beskonačan skup* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ elemenata nekog linearnog vektorskog prostora, smatraćemo da su oni linearno nezavisni *ako je linearno nezavisan bilo koji skup od konačnog broja ovih elemenata.*

Nulti element se, očevidno, ne može pojaviti ni u kakvom skupu linearno nezavisnih elemenata.

Utvrđivanje linearne nezavisnosti odnosno zavisnosti datog skupa (konačnog ili beskonačnog) elemenata nekog linearnog vektorskog prostora vrši se prema kriterijumima koji se formulišu u skladu sa konkretnim osobinama posmatranog linearnog vektorskog prostora. U prostoru klasičnih vektora, na primer, linearna zavisnost dva vektora znači, prema (8.12), da su oni kolinearni i vektorski proizvod im jednak nuli. Obrnuto, ako vektorski proizvod dva zadana vektora nije jednak nuli, oni su linearno nezavisni. U istom prostoru će tri vektora biti linearno zavisni ako su komplanarni, tj. ako im je mešoviti proizvod jednak nuli. Ako, pak, mešoviti proizvod tri vektora nije jednak nuli, oni su linearno nezavisni. Više od tri vektora u prostoru klasičnih vektora su uvek linearno zavisni, jer se svaki vektor može napisati kao linearna kombinacija tri nekomplanarna vektora, kao što se vidi iz Gibbs-ovih relacija u zadatku 1.25. U prostoru $C[a, b]$ neprekidnih funkcija se linearna nezavisnost utvrđuje pomoću Wronski-jeve determinante, koja mora biti različita od nule. Tako se može proveriti da funkcije $1, t, t^2, t^3, \ldots$ obrazuju beskonačan niz linearno nezavisnih elemenata u prostoru $C[a, b]$.

Dimenzija linearnog vektorskog prostora. Linearni vektorski prostor ćemo zvati *k-dimenzionim*, ako u njemu postoji najviše k linearno nezavisnih elemenata, a svaki skup od $(k+1)$ elementa je sigurno linearno zavisan. Ukoliko postoji beskonačno mnogo linearno nezavisnih elemenata, posmatrani linearni vektorski prostor će biti *beskonačno dimenzioni.*

Ilustrujmo ovaj pojam sa nekoliko primera. Prostor klasičnih vektora je očevidno trodimenzioni, jer u njemu mogu postojati samo tri linearno nezavisna vektora. Neka su to neki vektori $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ i $\mathbf{A}_3$. Ma koji drugi vektor $\mathbf{B}$ se

može, prema pomenutoj Gibbs-ovoj relaciji iz zadatka 1.25, prikazati kao $\mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_i^{-1}) \mathbf{A}_i$ (sumiranje po indeksu koji se ponavlja), tj. među vektorima $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ i $\mathbf{B}$ postoji relacija $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_1^{-1}) \mathbf{A}_1 + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_2^{-1}) \mathbf{A}_2 + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_3^{-1}) \mathbf{A}_3 - \mathbf{B} = 0$ oblika (8.12) koja je zadovoljena kada svi skalarni koeficijenti nisu jednaki nuli. Slično se može videti da je prostor klasičnih tenzora devetodimenzioni. Devet tenzora oblika $\mathcal{T}_{ij} = \{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}$, koje smo u Glavi 4. zvali koordinatnim dijadama i čije matrice imaju sve elemente jednake nuli osim onog u i-toj vrsti i j-toj koloni koji je jednak jedinici, očevidno su linearno nezavisni (formalan dokaz je dat u zadatku 8.3.). Svaki drugi tenzor se, u skladu sa jednačinom (4.16), može prikazati u obliku $\mathcal{T} = T_{ji} \mathcal{T}_{ij}$ (sumiranje po indeksima koji se ponavljaju), što znači da će relacija $T_{ji} \mathcal{T}_{ij} - \mathcal{T} = O$ (ovde je O neutralni element za operaciju sabiranja tenzora, tj. *nula-tenzor*) važiti i kada svih deset koeficijenata u njoj nisu istovremeno jednaki nuli. Dakle, deset tenzora je uvek linearno zavisno.

S druge strane, prostor s svih beskonačnih nizova je beskonačno dimenzioni, jer su njegovi elementi $x_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$, $x_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$, $x_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots), \ldots$ očevidno linearno nezavisni. Ista situacija je i sa prostorom $C[a, b]$, jer već pomenute funkcije $1, t, t^2, t^3, \ldots$ obrazuju beskonačan skup linearno nezavisnih elemenata.

Lineal. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ linearno nezavisni elementi u datom linearnom vektorskom prostoru. Njihova *linearna kombinacija*

$$x = \alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \cdots \oplus \alpha_m x_m \tag{8.13}$$

će, za svaki izbor skalara $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, predstavljati neki element uočenog linearnog vektorskog prostora. Skup svih elemenata x oblika (8.13) obrazuje *lineal nad elementima* $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Ako je dat skup linearno nezavisnih elemenata koji sadrži beskonačno mnogo elemenata, pod linealom nad njim podrazumevaćemo skup svih linearnih kombinacija oblika (8.13) *sa konačnim brojem sabiraka.* Ovakva definicija se daje zbog toga što se linearne kombinacije sa beskonačnim brojem sabiraka (što bi odgovaralo redovima) uopšte ne mogu razmatrati u linearnom vektorskom prostoru. Naime, pitanje egzistencije sume sa beskonačnim brojem sabiraka je povezano sa pitanjem konvergencije, a ovo je sa svoje strane u vezi sa pojmom rastojanja, koji u linearnom vektorskom prostoru nije definisan.

Navedimo i ovde nekoliko primera. U prostoru klasičnih vektora, lineal nad linearno nezavisnim elementima $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ biće skup svih vektora oblika $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2$, dakle vektora koji leže u $x_1 O x_2$-ravni. U prostoru klasičnih tenzora, lineal nad linearno nezavisnim tenzorima $\mathcal{T}_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$ i $\mathcal{T}_3 = \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\}$ je skup tenzora oblika:

$$\mathcal{T} = \alpha_1 \mathcal{T}_1 + \alpha_2 \mathcal{T}_2 + \alpha_3 \mathcal{T}_3 =$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix},$$

tj. skup svih simetričnih tenzora čiji se glavni pravci poklapaju sa $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$, kao što se vidi i iz jednačine (5.50). Lineal nad beskonačno mnogo linearno nezavisnih neprekidnih funkcija $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = t^2, \ldots$ itd.

u prostoru $C[a, b]$ je skup svih polinoma *konačnog* stepena. Slično tome, u prostoru s svih beskonačnih nizova lineal nad beskonačnim nizom linearno nezavisnih elemenata

$$x_1=(1, 0, 0, 0, \ldots),\ x_2=(0, 1, 0, 0, \ldots),\ x_3=(0, 0, 1, 0, \ldots), \ldots$$

biće skup beskonačnih nizova koji imaju samo *konačan* broj članova različit od nule. Svi navedeni primeri su odabrani tako da lineal nad datim elementima predstavlja samo jedan linearan potprostor datog linearnog vektorskog prostora.

Algebarska baza. Ako se lineal nad datim skupom linearno nezavisnih elemenata poklapa sa celim uočenim linearnim vektorskim prostorom, kažemo da ti elementi obrazuju jednu *algebarsku* (ili *Hamelovu*) *bazu* tog prostora. *U k-dimenzionom linearnom vektorskom prostoru algebarska baza ima tačno k elemenata.* Zaista, po definiciji k-dimenzionog prostora, dodavanjem skupu od k linearno nezavisnih elemenata još jednog ma kog elementa dobija se linearno zavisan skup od $(k+1)$ elementa. Drugim rečima, dodati element se može izraziti kao linearna kombinacija prvobitnih k elemenata i pripada linealu nad njima. Algebarska baza nije jednoznačno određena i *svaki k-dimenzioni linearni vektorski prostor može imati beskonačno mnogo algebarskih baza.* Ove baze su međusobno ekvivalentne, tj. lineal nad bilo kojom od njih se poklapa sa celim posmatranim prostorom.

U prostoru klasičnih vektora, na primer, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ obrazuju jednu algebarsku bazu. Ma koja druga tri linearno nezavisna vektora će takođe obrazovati algebarsku bazu ovog prostora. Slično tome, u prostoru klasičnih tenzora devet koordinatnih dijada $\mathcal{T}_{ij}=\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}$ obrazuju jednu algebarsku bazu. U prostoru E_k je jedna algebarska baza data skupom elemenata oblika $e_1=(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2=(0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_k=(0, 0, 0, \ldots, 1)$, i ma koji drugi element se može, prema (8.9), napisati u obliku

$$x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)=\xi_1 e_1 \oplus \xi_2 e_2 \oplus \cdots \oplus \xi_k e_k,$$

iz koga se vidi da pripada linealu nad elementima baze.

Kod beskonačno dimenzionih linearnih vektorskih prostora stvar je složenija. *Može se desiti da algebarska baza i ne postoji*, tj. da ne postoji takav beskonačan skup linearno nezavisnih elemenata da se ma koji drugi element tog prostora može prikazati kao njihova linearna kombinacija sa konačnim brojem sabiraka. Na primer, skup svih polinoma konačnog stepena je beskonačno dimenzioni linearni vektorski prostor u kome funkcije $x_1(t)=1$, $x_2(t)=t$, $x_3(t)=t^2, \ldots$ predstavljaju jednu algebarsku bazu, jer, kao što je već rečeno, lineal nad ovim funkcijama sadrži sve pomenute polinome. Međutim, u celom prostoru neprekidnih funkcija $C[a, b]$, gornji beskonačan niz funkcija *nije baza*; svaka neprekidna funkcija $x(t)$ se može doduše prikazati u obliku beskonačnog McLaurin-ovog reda $x(t)\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu$, ali ovakve sume se ne mogu razmatrati u prostoru koji ima samo algebarsku strukturu linearnog vektorskog prostora.

Algebarski izomorfizam. Neka su L i L^* dva linearna vektorska prostora, među čijim elementima je definisana obostrano jednoznačna korespondencija $x \leftrightarrow x^*$. Tu korespondenciju zovemo *algebarski izomorfizam*, ukoliko iz $x \leftrightarrow x^*$ i $y \leftrightarrow y^*$ proizilazi i

$$x \oplus y \leftrightarrow x^* \oplus^* y^*, \qquad \alpha x \leftrightarrow \alpha x^*, \tag{8.14}$$

ma za kakva elemente $x, y \in L$ i ma za kakav skalar α. Ovde je sa $\oplus^*$ označena unutrašnja kompozicija u L^*.

Dva k-dimenziona linearna vektorska prostora se uvek mogu učiniti algebarski izomorfnim. Korespondencija $x \leftrightarrow x^*$ koja će taj izomorfizam definisati uspostavlja se na sledeći način. Najpre se u oba prostora odabere po jedna algebarska baza; njihove elemente ćemo označiti sa $x_1, x_2, \ldots, x_k$ i $\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots, \overset{*}{x}_k$ respektivno, i stavićemo $x_1 \leftrightarrow \overset{*}{x}_1$, $x_2 \leftrightarrow \overset{*}{x}_2, \ldots x_k \leftrightarrow \overset{*}{x}_k$. Zatim proizvoljnom elementu iz L, koji se može prikazati u obliku $x=\alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_k x_k$ pridružujemo, u skladu sa relacijama (8.14), element $x^*=\alpha_1 \overset{*}{x}_1 \oplus^* \alpha_2 \overset{*}{x}_2 \oplus^* \ldots \oplus^* \alpha_k \overset{*}{x}_k$ iz L^*. Time je algebarska struktura jednog prostora potpuno preslikana u algebarsku strukturu drugog. To znači da su uzajamno korespondentni elementi dvaju algebarski izomorfnih linearnih vektorskih prostora jednoznačno određeni specificiranjem skupa skalara $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k)$ koji predstavljaju koeficijente uz uzajamno korespondentne elemente *baza*. Simbolički to možemo pisati:

$$x=\alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_k x_k \leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k). \tag{8.15}$$

Na primer, skup od četiri skalara $(1, -1, 2, 2)$ može predstavljati elemente različite konkretne prirode u raznim četvorodimenzionim prostorima. Ako se radi o prostoru matrice tipa 4×1 i ako su u tom prostoru za algebarsku bazu uzete matrice $m_1=(1\ 0\ 0\ 0)$, $m_2=(0\ 1\ 0\ 0)$, $m_3=(0\ 0\ 1\ 0)$ i $m_4=(0\ 0\ 0\ 1)$, onda navedeni skup od četiri skalara predstavlja matricu $m=1\cdot m_1-1\cdot m_2+$ $+2\cdot m_3+2\cdot m_4=(1\ -1\ 2\ 2)$. S druge strane, u prostoru polinoma najviše trećeg stepena sa bazom $p_1(t)=1$, $p_2(t)=t$, $p_3(t)=t^2$, i $p_4(t)=t^3$ isti skup od četiri skalara predstavlja polinom $p(t)=1\cdot p_1(t)-1\cdot p_2(t)+2\cdot p_3(t)+2\cdot p_4(t)=$ $=1-t+2t^2+2t^3$. U prostoru E_4 sa bazom $e_1=(1, 0, 0, 0)$, $e_2=(0, 1, 0, 0)$, $e_3=(0, 0, 1, 0)$ i $e_4=(0, 0, 0, 1)$ posmatrana četiri skalara daju četvorodimenzioni vektor $x=e_1-e_2+2e_3+2e_4$.

Ponekad je celishodno algebarski izomorfne prostore tretirati kao različite *realizacije* istog prostora. U konkretnim računanjima se obično uzima da je to *prostor matrica-kolona* i relacija (8.15) se zamenjuje sa

$$x=\alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_k x_k \leftrightarrow m=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix}. \tag{8.16}$$

Taj princip smo već ranije koristili pri pisanju formule (5.27).

8.4. METRIČKI PROSTORI

Aksiomi rastojanja. Prostor X će biti *metrički prostor* ako se definiše šta će se podrazumevati pod rastojanjem između ma koja dva njegova elementa, tj. ako je precizirano pravilo na osnovu koga se svakom paru elemenata $x, y \in X$ može pridružiti jedan *realan skalar* koji ćemo obeležiti sa $\rho(x, y)$ i zvati *rastojanje*. Po analogiji sa istoimenom veličinom u običnom Euklidovom prostoru, pri definisanju rastojanja se mora voditi računa da budu zadovoljeni sledeći *aksiomi rastojanja*

$$(a)\ \rho(x, y)\geq 0;\ \rho(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y, \quad (\textit{nenegativnost}) \tag{8.17}$$

$$(b)\ \rho(x, y)=\rho(y, x), \quad (\textit{simetričnost}) \tag{8.18}$$

$$(b)\ \rho(x, y)\leq \rho(x, z)+\rho(y, z). \quad (\text{„}\textit{relacija trougla}\text{“}) \tag{8.19}$$

Definisanjem rastojanja u skladu sa gornja tri aksioma, kažemo da smo u datom prostoru X *uveli metriku*. U skupu istih matematičkih objekata mogu se, u principu, uvoditi različite metrike. Time se dobijaju različiti metrički prostori.

Da bi se u nekom prostoru mogla uvesti metrika, on ne mora biti linearan vektorski prostor. Štaviše, nije neophodno postojanje bilo kakve algebarske strukture u njemu, jer aksiomi rastojanja ne impliciraju nikakve algebarske operacije. Međutim, u Teorijskoj fizici su od interesa prvenstveno linearni vektorski prostori sa uvedenom metrikom.

Primeri metričkih prostora. Ilustrujmo sa nekoliko primera način uvođenja metrike kod već ranije razmotrenih linearnih vektorskih prostora.

(1) *Prostor* $E_k \ni x = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k)$ može se učiniti metričkim na više načina. Obično se rastojanje uvodi relacijom

$$\rho(x, y) = \left\{\sum_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu - \eta_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (p \geq 1). \tag{8.20}$$

Nije teško proveriti da su aksiomi rastojanja (8.17)–(8.19) uvek zadovoljeni. Nenegativnost i simetričnost su očevidne, dok važneje relacije trougla proizilazi iz Minkowski-jeve nejednačine za sume (8.11). Zaista:

$$\rho(x, y) = \left\{\sum_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu - \eta_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu - \zeta_\nu + \zeta_\nu - \eta_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left\{\sum_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu - \zeta_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{\nu=1}^{k} |\zeta_\nu - \eta_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Za svako konkretno p imaćemo, zapravo, drugi metrički prostor; uobičajeno je da ih razlikujemo oznakama $E_k^{(p)}$. Zapazimo, uzgred, da je $E_k^{(2)}$ obično *Euklidov prostor*. Za $p \to \infty$ dobija se relacija:

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leq \nu \leq k} |\zeta_\nu - \eta_\nu|, \tag{8.21}$$

koja, dakle, definiše metriku prostora $E_k^{(\infty)}$. Naime, za vrlo veliko p, suma u izrazu (8.20) se ponaša kao njen najveći sabirak, odakle sledi (8.21).

(2) *Prostor svih beskonačnih nizova* $s \ni x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu, \ldots)$ postaje metrički prostor ako se rastojanje definiše relacijom:

$$\rho(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{|\xi_\nu - \eta_\nu|}{1 + |\xi_\nu - \eta_\nu|}. \tag{8.22}$$

Ovako definisana metrika ima sigurno smisla, jer je uvek $\dfrac{|\xi_\nu - \eta_\nu|}{1 + |\xi_\nu - \eta_\nu|} \leq 1$, pa navedena suma sigurno konvergira ma za kakve elemente x i y iz s. Da izraz (8.22) zaista definiše rastojanje lako se može proveriti. Važenje aksioma nenegativnosti i simetričnosti je očevidno. Relacija trougla kod ove metrike proizilazi iz nejednačine

$$\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} < \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|}, \tag{8.23}$$

koja, sa svoje strane, sledi iz osobina funkcije $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$. Direktnim računom se može neposredno pokazati da za tu funkciju važi

$$f(t_1) + f(t_2) = f(t_1 + t_2) + \frac{t_1 t_2 (t_1 + t_2 + 2)}{(t_1 + 1)(t_2 + 1)(t_1 + t_2 + 1)}$$

pa, ako su t_1 i t_2 pozitivni, imamo $f(t_1) + f(t_2) > f(t_1 + t_2)$, što se poklapa sa (8.23). Stavimo li, dakle, u (8.23) redom $\alpha = \xi_\nu - \zeta_\nu$ i $\beta = \zeta_\nu - \eta_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, pa svaku nejednačinu pomnožimo sa $\dfrac{1}{2^\nu}$ i zatim ih sve saberemo, relacija trougla će biti dokazana.

(3) *Prostor nizova* $l_p \ni x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu, \ldots)$; $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p < +\infty$ može postati metrički ako se u njega prenese metrika (8.22). U tom slučaju on će biti prosto *metrički potprostor* prostora s. Za primene je, međutim, interesantnije uvesti specifičnu metriku:

$$\rho(x, y) = \left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu - \eta_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (p > 1), \tag{8.24}$$

koja je generalizacija metrike (8.20). Da se navedenom formulom zaista može uvesti metrika sledi iz Minkowski-jeve nejednačine (8.11), na osnovu koje se, za svako konačno k može pisati:

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu + (-\eta_\nu)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \left\{\sum_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{\nu=1}^{k} |\eta_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Sume sa desne strane su ograničene za svako k, jer redovi $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p$ i $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu|^p$ konvergiraju (x i y su elementi l_p), tako da možemo pustiti da $k \to \infty$, i konstatovati da suma sa leve strane konvergira. Dakle, jednačina (8.24) ima smisla za svako $x, y \in l_p$. Dokazivanje važenja aksioma rastojanja (8.17)–(8.19) je analogo kao kod $E_k^{(p)}$. Ako u (8.24) pustimo da $p \to \infty$, dobićemo metriku:

$$\rho(x, y) = \sup_{1 \leq \nu < +\infty} |\xi_\nu - \eta_\nu|. \tag{8.25}$$

Odgovarajući metrički prostor označavamo sa l_∞. Supremum (oznaka *sup*) je najmanji od svih brojeva koji nisu manji (dakle, veći ili jednaki) od brojeva zadanog skupa, u ovom slučaju od članova naznačenog niza pozitivnih brojeva. Ako dati niz brojeva ima maksimum (tj. ima najveći član, kao što je slučaj, na primer sa nizom $\xi_\nu = \nu^2 e^{-\nu}$ čiji najveći član odgovara $\nu = 2$) supremum se poklapa sa maksimumom. Kod nizova bez maksimuma $\left(\text{na primer, } \xi_\nu = 1 - \dfrac{1}{\nu^2}\right)$ supremum je ili granična vrednost niza ili njegova gornja tačka nagomilavanja. Dakle, metrika (8.25) je generalizacija metrike (8.21).

(4) *Prostor neprekidnih funkcija* $C[a, b] \ni x(t)$ postaje metrički prostor, ako se za rastojanje između njegovih elemenata uzme:

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|. \tag{8.26}$$

Ovakva metrika odgovara uobičajenim zahtevima kod aproksimiranja jedne funkcije drugom. Pri tome se, naime, dve funkcije obično smatraju bliskim, ako se u datom intervalu $[a, b]$ njihove ordinate ne razlikuju mnogo, tj. ako je rastojanje u smislu (8.26) malo. Proveravanje važenja aksioma rastojanja je trivijalno. U izvesnom smislu, ovde se radi o generalizaciji metrike (8.25), jer se funkcija u datom intervalu određuje skupom svih svojih vrednosti.

(5) *Prostor* $C_p[a, b]\ni x(t)$; $\int_a^b |x(t)|^p\,dt<+\infty$ je potprostor gornjeg prostora, pa se i u njemu može uvesti metrika (8.26). Za primene je, međutim, interesantnije uvesti rastojanje relacijom koja proizilazi iz (8.24):

$$\rho(x, y)=\Big[\int_a^b |x(t)-y(t)|^p\,dt\Big]^{\frac{1}{p}},\quad (p>1), \tag{8.27}$$

i koja ima smisla (tj. napisani integral ne divergira) za bilo koje funkcije iz $C_p[a, b]$. Formalan dokaz konvergencije integrala je analogan onome u prostoru l_p, i zasniva se na generalizaciji Minkowski-jeve nejednačine (8.11) na integrale. Metrike (8.27) su celishodne u onim problemima gde je prirodno dve funkcije smatrati bliskim kad je integral koji se pojavljuje u (8.27) mali, kao što je, na primer, slučaj u teoriji integralnih jednačina ili pri aproksimiranju zadane funkcije trigonometrijskih polinoma u smislu metode najmanjih kvadrata.

Nizovi u metričkom prostoru. Posmatrajmo beskonačan niz elemenata x_1, $x_2, \dots, x_n, \dots$ datog metričkog prostora X. Radi kratkoće ćemo ovaj niz označavati sa (x_n). Definišimo sad nekoliko pojmova analognih onima u teoriji običnih brojnih nizova.

Niz (x_n) će biti *ograničen* ako postoji realan i pozitivan broj M takav da je $\rho(x_m, x_n)<M$ za svako m i n. Na primer, u prostoru $C[0, 1]$ sa metrikom (8.26) biće nizovi neprekidnih funkcija

$$x_n(t)=\begin{cases} nt, & 0<t<\dfrac{1}{n},\\ 1, & \dfrac{1}{n}<t<1\end{cases}\qquad x_n(t)=\begin{cases} n, & 0<t<\dfrac{1}{n}\\ \dfrac{1}{t}, & \dfrac{1}{n}<t<1\end{cases} \tag{8.28}$$

prvi ograničen a drugi neograničen. Naime, maksimalna razlika ordinata dveju funkcija-članova niza u prvom slučaju je najviše jednaka jedinici, dok je u drugom slučaju jednaka razlici indeksa odabranih članova niza, $\rho(x_m, x_n)=|m-n|$, i može biti učinjena po volji velikom.

Niz (x_n) će biti *konvergentan*, ako postoji element $x\in X$ koji zadovoljava uslov da se ma za kakvo unapred odabrano $\varepsilon>0$ može naći prirodni broj $N(\varepsilon)$ takav da je $\rho(x_n, x)<\varepsilon$ za svako $n>N(\varepsilon)$, ili, prostije rečeno, ako postoji element $x\in X$ takav da niz brojeva $\rho(x_n, x)$ teži nuli kad $n\to\infty$. U tom slučaju element x zovemo *granična vrednost* niza (x_n) i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$. Na primer, niz beskonačnih nizova

$$\begin{aligned} x_1&=\Big(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \dots,\ \frac{1}{\nu},\ \dots\Big),\\ x_2&=\Big(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \dots,\ \frac{1}{2\nu},\ \dots\Big),\\ x_n&=\Big(\frac{1}{n},\ \frac{1}{2n},\ \frac{1}{3n},\ \dots,\ \frac{1}{\nu n},\ \dots\Big),\\ &\dots\qquad\dots \end{aligned} \tag{8.29}$$

konvergira ka elementu $x=(0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ u smislu metrike prostora l_2, određene relacijom (8.24). Zaista,

$$\rho(x_n, x)=\Big\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\Big|\frac{1}{\nu n}-0\Big|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}}=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}\to 0$$

(iz matematičke analize je poznato da je $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}=\frac{\pi^2}{6}$), pa je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$. Isti niz beskonačnih nizova (8.29) konvergira ka istoj graničnoj vrednosti i u smislu metrike (8.25) prostora l_∞, jer je očevidno:

$$\rho(x_n, x)=\sup_{1\le\nu<+\infty}\Big|\frac{1}{\nu n}-0\Big|=\sup_{1\le\nu<+\infty}\frac{1}{\nu n}=\frac{1}{n}\to 0.$$

Kao drugi primer navedimo da nizovi funkcija (8.28) nisu konvergentni, jer granične funkcije koje se dobijaju pri $n\to\infty$ nisu uopšte neprekidne, tj. ne pripadaju posmatranom prostoru.

Lako je videti da je *svaki konvergentan niz ograničen*. Da bismo ovo pokazali uočićemo jednu zatvorenu kuglu poluprečnika $a>0$ oko elementa x koji predstavlja graničnu vrednost niza (x_n) (zatvorena kugla je skup svih elemenata datog metričkog prostora čije rastojanje od datog elementa tog prostora je manje ili jednako datoj vrednosti a). Pošto je niz (x_n) po pretpostavci konvergentan, u ovoj se kugli nalazi beskonačno mnogo elemenata niza, a van te kugle samo konačan broj ovih. Među rastojanjima između granične vrednosti i elemenata van uočene zatvorene kugle sigurno postoji najveće (konačan skup pozitivnih brojeva mora imati maksimum). Ako, dakle, oko granične vrednosti opišemo novu kuglu poluprečnika većeg od najvećeg među pomenutim rastojanjima, u toj kugli će se nalaziti svi članovi posmatranog niza. Rastojanje između ma koja dva člana niza biće, onda, sigurno manje od dijametra ove kugle, što znači da je niz ograničen.

Niz (x_n) elemenata datog metričkog prostora se zove *Cauchy-jev* (ili *fundamentalan*), ako ma kakvom unapred odabranom $\varepsilon>0$ odgovara neki prirodni broj $N(\varepsilon)$ takav da je $\rho(x_m, x_n)<\varepsilon$ za svako $m, n>N(\varepsilon)$. Na primer, niz beskonačnih nizova (8.29) je Cauchy-jev, i to kako u smislu metrike prostora l_2, tako i prostora l_∞. Da bismo se u ovo uverili, posmatrajmo najpre $\rho(x_m, x_n)$ u smislu metrike prostora l_2:

$$\rho(x_m, x_n)=\Big\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\Big|\frac{1}{\nu m}-\frac{1}{\nu n}\Big|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}=\Big|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\Big|\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}<\Big(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\Big)\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}.$$

Napisana nejednakost proizilazi iz činjenice da je modul razlike dva broja sigurno manji od zbira njihovih modula. Ako, dakle, odaberemo $N=\frac{2}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}$, imaćemo za $m>N$ i $n>N$ dalje:

$$\rho(x_m, x_n)<\Big(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\Big)\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}<\Big(\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\Big)\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}=\varepsilon,$$

čime je dokazano da je niz Cauchy-jev. Proanalizirajmo sad ove iste nizove sa stanovišta metrike iz l_∞:

$$\rho(x_m, x_n)=\sup_{1\le\nu<+\infty}\Big|\frac{1}{\nu m}-\frac{1}{\nu n}\Big|=\Big|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\Big|<\frac{1}{m}+\frac{1}{n}.$$

Opet je, za $N=\frac{2}{\varepsilon}$, sigurno $\rho(x_m, x_n)<\varepsilon$, tj. niz je Cauchy-jev.

Uopšte, *svaki konvergentan niz je Cauchy-jev.* Naime, ako je (x_n) konvergentan niz čija je granična vrednost x, onda se na osnovu relacije trougla (8.19) može pisati

$$\rho(x_m, x_n)<\rho(x_m, x)+\rho(x, x_n),$$

a desna strana se zbog konvergencije može učiniti proizvoljno mala izborom dovoljno velikih indeksa m i n.

S druge strane, *svaki Cauchy-jev niz je ograničen.* Dokaz je sličan onome o ograničenosti konvergentnih nizova. Pošto je niz po pretpostavci Cauchy-jev, može se za $n=n_0$ i $m>n_0$ (gde je n_0 proizvoljan fiksiran indeks) naći takvo $\varepsilon(n_0)$ da bude uvek ispunjen uslov $\rho(x_{n_0}, x_m)<\varepsilon$. Drugim rečima, oko elementa x_{n_0} se može opisati kugla konačnog radijusa ε u kojoj će se nalaziti svi elementi posmatranog niza, osim njih konačno mnogo. Prema tome, moguće će biti oko istog elementa opisati drugu kuglu koja će obuhvatiti i taj konačan broj preostalih elemenata niza. Time je dokazano da je niz ograničen.

Kompletnost metričkih prostora. Kada se radi o realnim brojevima i nizovima na realnoj pravoj, ne samo da je svaki konvergentan niz istovremeno i Cauchy-jev, već je takođe i svaki Cauchy-jev niz konvergentan. Ovakva situacija se ne sreće u svim metričkim prostorima, kao što možemo videti iz sledećeg primera. Posmatrajmo neprekidne funkcije

$$x_n(t)=\begin{cases} -1, & -1<t<-\frac{1}{n}, \\ nt, & -\frac{1}{n}<t<\frac{1}{n}, \\ +1, & \frac{1}{n}<t<1, \end{cases} \tag{8.30}$$

kao elemente metričkog prostora $C_2[-1, 1]$. Uzmimo, radi određenosti, $n>m$ i izračunajmo rastojanje između $x_n(t)$ i $x_m(t)$ prema (8.27) za $p=2$. Nakon jednostavnog računa dobijamo:

$$\rho(x_n, x_m)=\left\{\int_{-1}^{+1}|x_n(t)-x_m(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left\{\frac{4(n-m)(2n+m)}{3mn^2}\right\}^{\frac{1}{2}}<\frac{2}{\sqrt{m}}.$$

Ako, dakle, uzmemo $n>m>\frac{4}{\varepsilon^2}$, imaćemo $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$, što znači da je niz funkcija (8.30) Cauchy-jev. Međutim, ovaj niz *nije konvergentan*, jer se za $n\to\infty$ dobija funkcija jednaka -1 za negativne vrednosti argumenta i jednaka $+1$ za pozitivne (tzv. *Heavyside-ova funkcija*). Ova funkcija nije neprekidna i ne pripada stoga prostoru $C_2[-1, 1]$, što znači da niz (8.30) nije konvergentan.

Metrički prostor koji ima osobinu da je u njemu svaki Cauchy-jev niz konvergentan zovemo kompletnim. Od prostora sa kojima smo se u ovom odeljku sretali, *samo prostori $C_p[a, b]$ nisu kompletni.* Kompletni su prostori $E_k^{(p)}$ i $E_k^{(\infty)}$ sa metrikama (8.20) i (8.21), prostor s svih beskonačnih nizova sa metrikom (8.22), prostori l_p sa metrikom (8.24) i l_∞ sa metrikom (8.25), prostor ograničenih nizova m sa metrikom (8.25), i prostor $C[a, b]$ sa metrikom (8.26). Formalne dokaze njihove kompletnosti ovde nećemo navoditi, a zainteresovanog čitaoca upućujemo na specijalnu matematičku literaturu posvećenu funkcionalnoj analizi.*

Kompaktnost metričkih prostora. Kod nizova na realnoj pravoj važi poznati *Bolzano-Weierstrass-ov stav*, koji tvrdi da svaki ograničeni niz mora imati bar jednu tačku nagomilavanja. To znači da se iz svakog ograničenog niza može izdvojiti jedan konvergentan podniz sa graničnom vrednošću jednakom jednoj od tačaka nagomilavanja koje ovaj niz mora imati. Ovakva situacija se ne sreće kod svih metričkih prostora, kao što se može videti iz sledećeg primera. Posmatrajmo u prostoru l_2 sa metrikom (8.24) niz elemenata:

$$\begin{aligned} x_1&=(1, 0, 0, \dots, 0, \dots), \\ x_2&=(0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n&=(0, 0, 0 \dots, 1, \dots), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned} \tag{8.31}$$

(n-ti član niza ima sve komponente jednake nuli, osim n-te koja je jednaka jedinici). Ovaj niz je ograničen jer je rastojanje između dva njegova člana uvek konstantno, $\rho(x_m, x_n)=\sqrt{2}$. Međutim, okolnost da je $\rho(x_m, x_n)=\sqrt{2}$ istovremeno znači da se uzimanjem velikih vrednosti za indekse m, n ne može postići da bude $\rho(x_m, x_n)<\varepsilon$, gde je ε po volji malo. Dakle, niz (8.31) nije Cauchy-jev, (kad bi bio Cauchy-jev, bio bi i konvergentan zbog kompletnosti prostora l_2) i nema tačaka nagomilavanja, iako je ograničen.

Prostorima koji imaju Bolzano-Weierstrass-ovu osobinu dajemo posebno ime. *Metrički prostor u kome svaki ograničeni niz ima bar jednu tačku nagomilavanja zovemo kompaktnim.* U kompaktnim metričkim prostorima se iz svakog ograničenog skupa sa beskonačno mnogo elemenata može izdvojiti konvergentan niz. Gornji primer pokazuje da l_2 (i uopšte l_p) nije kompaktan prostor. Može se pokazati da su $E_k^{(p)}$ i $E_k^{(\infty)}$ kompaktni prostori, slično kao i skup brojeva na realnoj pravoj.

Svaki kompaktan prostor je istovremeno i kompletan. Zaista, pretpostavimo da je X kompaktan prostor i neka je (x_n) jedan Cauchy-jev niz u njemu. To znači da je niz (x_n) ograničen (svaki Cauchy-jev niz je ograničen) i, pošto je X po pretpostavci kompaktan prostor, iz niza (x_n) se može izvući jedan konvergentan podniz koji ćemo označiti sa (x_{n_k}) (u taj konvergentan podniz ulaze članovi uočenog niza sa indeksima $n_1, n_2, \dots$). Prema tome, postoji element $x\in X$, takav da $x_{n_k}\to x$ kad $k\to\infty$. Međutim, na osnovu relacije trougla (8.19) onda imamo:

$$\rho(x_n, x)<\rho(x_n, x_{n_k})+\rho(x_{n_k}, x)<2\varepsilon, \tag{8.32}$$

ako samo n i n_k odaberemo dovoljno veliko. Onda je, naime, $\rho(x_n, x_{n_k})<\varepsilon$, jer je u pitanju Cauchy-jev niz, a takođe i $\rho(x_{n_k}, x)<\varepsilon$, pošto je podniz (x_{n_k}) konvergentan. Dobijena nejednakost (8.32) pokazuje da je i niz (x_n) konvergentan. Dakle, u kompaktnom prostoru je Cauchy-jev niz sigurno konvergentan, što je osobina kompletnih prostora.

*V. npr. knjigu citiranu u spisku literature pod rednim brojem 1, str. 52—54, ili knjigu pod rednim brojem 28, str. 62—64.

Separabilnost metričkih prostora. Da bismo došli do pojma separabilnosti, važnog u primenama u Teorijskoj fizici, uvedimo najpre pojam *ε-okoline* nekog elementa x iz metričkog prostora X. Pod ε-okolinom elementa x podrazumevamo skup svih elemenata $y \in X$ za koje važi uslov $\rho(x, y) < \varepsilon$. Drugi preliminarni pojam je pojam *svuda gustog skupa*. Skup $X' \subset X$ biće svuda gust u X ako se u svakoj ε-okolini bilo kog elementa iz X nalazi bar jedan elemnt iz X'.

Na primer, skup racionalnih brojeva je svuda gust u skupu realnih brojeva, kao što se pokazuje u matematičkoj analizi. Zaista, ma kako malo $\varepsilon > 0$ odabrali, uvek će za dati realan broj α biti moguće naći racionalan broj a takav da bude $|\alpha - a| < \varepsilon$.

Metrički prostor je separabilan ako u njemu postoji konačan ili beskonačan ali prebrojiv svuda gust skup. Pošto je skup racionalnih brojeva na realnoj pravoj prebrojiv, na osnovu navedenog primera vidimo da je *skup realnih brojeva separabilan*. I uopšte, *svaki kompaktan skup je istovremeno separabilan* (obrnuto ne važi). Za formalan dokaz poslednjeg tvrđenja čitalac treba da konsultuje matematičku literaturu*. Separabilni su takođe i mnogi drugi metrički prostori sa kojima smo se sretali u ovom odeljku. Za prostor $C[a, b]$ sa metrikom (8.26), na primer, separabilnost sledi iz Weierstrass-ove teoreme koja se dokazuje u matematičkoj analizi. Ta teorema tvrdi da se za svaku neprekidnu funkciju $x(t)$ može, pri proizvoljnom $\varepsilon > 0$, naći jedan polinom $p_\varepsilon(t)$ takav da je, za svako $a \leq t \leq b$,

$$|x(t) - p_\varepsilon(t)| < \varepsilon. \tag{8.33}$$

To znači da je skup polinoma svuda gust u $C[a, b]$. Iz toga, razume se, još ne sledi separabilnost prostora $C[a, b]$, jer skup svih polinoma nije prebrojiv. Međutim, skup polinoma sa *racionalnim* koeficijentima je svuda gust u skupu svih polinoma, a on je prebrojiv. Primenom relacija trougla onda možemo pokazati da je skup polinoma sa racionalnim koeficijentima svuda gust u $C[a, b]$. Za detalje čitalac se upućuje na literaturu iz matematičke analize.**

Prostori $E_k^{(p)}$ i $E_k^{(\infty)}$ sa metrikama (8.20) i (8.21) su separabilni. Prebrojiv svuda gust skup čine elementi sa racionalnim koordinatama. Separabilan je i prostor s sa metrikom (8.22), prostori l_p i l_∞ sa metrikama (8.24) i (8.25) respektivno. Za prostor l_2, na primer, separabilnost se dokazuje na sledeći način. Neka je $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ jedan element ovog prostora. Pošto red $\sum_{N=1}^{\infty} |\xi_\nu|^2$ konvergira, moguće je odrediti prirodni broj m tako da bude

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} |\xi_\nu|^2 < \frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Odaberimo zatim racionalni brojeve $a_\nu\ (\nu = 1, 2, \ldots, m)$ da za svako ν važi:

$$|\xi_\nu - a_\nu| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2m}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m.).$$

Ovo je uvek moguće jer je skup racionalnih brojeva svuda gust u skupu brojeva. Ako sa a označimo element $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, 0, 0, \ldots)$, nalazimo

$$\rho(x, a) = \left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu - \alpha_\nu|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\sum_{\nu=1}^{m} |\xi_\nu - \alpha_\nu|^2 + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} |\xi_\nu|^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon. \tag{8.34}$$

* Vidi na primer knjigu citiranu u spisku literature pod rednim brojem 1, strana 74.

** Vidi istu knjigu, strana 43—46.

Međutim, element a pripada skupu nizova sa racionalnim članovima kod kojih je samo konačno mnogo članova različito od nule. Taj skup je prebrojiv i, prema nejednačini (8.34), svuda gust u l_2. Dakle, l_2 je separabilan prostor.

Prostor m ograničenih nizova sa metrikom (8.25) nije separabilan. To se može videti ako se u tom prostoru uoči skup svih nizova čiji su članovi isključivo jedinice i nule. Taj skup nije prebrojiv, kao što se pokazuje u matematičkoj analizi uspostavljanjem biunivoke korespondencije sa skupom realnih brojeva iz intervala [0, 1], pošto se prethodno ti brojevi prikažu pomoću binarnih razlomaka (tj. u obliku $0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots$ gde su brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ samo jedinice ili nule i u kome svaka cifra označava odgovarajuću negativnu potenciju broja 2). Rastojanje između bilo koja dva člana tog skupa u smislu metrike (8.25) iznosi 1. Opišimo oko svakog elementa posmatranog skupa nizova kuglu radijusa $\frac{1}{3}$. Te kugle predstavljaju disjunktne skupove. Svaki svuda gust skup u prostoru m bi morao imati bar po jedan element u svakoj od ovih kugli, te ne bi mogao biti prebrojiv.

8.5. NORMIRANI PROSTORI

Aksiomi norme. Struktura linearnog vektorskog prostora se može obogatiti uvođenjem *norme* elemenata, tj. definisanjem načina na koji se svakom elementu x jednoznačno može pridružiti jedan realan broj, koji se zove norma i obeležava se sa $\|x\|$. Pri tom ma za koji element $x \in X$ i ma za koji skalar λ moraju biti zadovoljeni sledeći *aksiomi norme*:

(a) $\|x\| > 0;\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$ (*nenegativnost*) (8.35)

(b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|,$ (*homogenost*) (8.36)

(c) $\|x \oplus y\| < \|x\| + \|y\|.$ (8.37)

Za razliku od uvođenja metrike, uvođenje norme zahteva da prostor koji se želi normirati ima strukturu linearnog vektorskog prostora, jer se u poslednja dva aksioma norme pojavljuju množenje elementa skalarom i sabiranje elemenata. Normirani prostori nisu od većeg interesa u primenama u Teorijskoj fizici, pa se stoga na njima nećemo mnogo zadržavati. ***Normirani prostori koji imaju osobinu kompletnosti zovu se Banach-ovi prostori.***

Veza između norme i metrike. Normirani linearni vektorski prostor je uvek moguće učiniti metričkim prostorom. To se vidi iz činjenice da je relacijom:

$$\rho(x, y) = \|x \ominus y\| \tag{8.38}$$

definisana jedna skalarna veličina koja ima sve osobine rastojanja između x i y. Ovde simbol $\ominus$ ima značenje objašnjeno jednačinom (8.4). Zaista, relacija (8.38) ma kojim elementima x i y datog normiranog prostora pridružuje nenegativan skalar prema (8.35); on može biti jednak nuli samo ako je $x \ominus y = \theta$ tj. ako je $x = y$. Time je prvi aksiom rastojanja (8.17) dokazan. Simetričnost rastojanja, koju zahteva aksiom (8.18), sledi iz uslova homogenosti norme (8.36). To se vidi iz sledećih jednakosti:

$$\rho(y, x) = \|y \ominus x\| = \|-1\,(x \ominus y)\| = |-1|\,\|x \ominus y\| = \rho(x, y).$$

Najzad, relacija trougla (8.19) proizilazi iz (8.37) na sledeći način:

$$\rho(x, y) = \|x \ominus y\| = \|x \ominus z \oplus z \ominus y\| <$$
$$< \|x \ominus z\| + \|z \ominus y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Prema tome, relacija (8.38) zaista definiše jednu metriku u datom normiranom prostoru. Kažemo da ova metrika proističe iz norme, ili da je ***generirana normom.*** Naravno, u tom normiranom prostoru mogu se uvoditi i drukčije metrike.

Iz (8.38) se vidi da u normiranom prostoru sa metrikom generiranom normom, norma ma kog elementa se poklapa sa njegovim rastojanjem od neutralnog elementa:

$$\|x\| = \rho(x, \theta). \tag{8.39}$$

Ovaj zaključak ***ne implicira***, razume se, da se i obrnuto u proizvoljnom metričkom prostoru može uvesti norma preko relacije (8.39). To se jasno vidi na primeru s svih beskonačnih nizova sa metrikom (8.22), gde skalari

$$\rho(x, \theta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{|\xi_\nu|}{1+|\xi_\nu|}$$

ne zadovoljavaju uslov homogenosti norme (8.36). U prostorima $E_k^{(p)}$, $E_k^{(\infty)}$, l_p, m, $C[a, b]$, $C_p[a, b]$ se može uvesti norma u skladu sa (8.39).

ZADACI

8.1. Pokazati da osobine (8.1)–(8.8) operacija sabiranja i množenja skalarom u linearnom vektorskom prostoru imaju sledeće posledice:

(*a*) $x \oplus y = x \oplus z \Rightarrow y = z$,

(*b*) $x = y \Rightarrow x \ominus y = \theta$,

(*c*) $0x = \theta$,

(*d*) $\lambda\theta = \theta$,

(*e*) $(-1)x = (-x)$,

(*f*) $\lambda x = \theta$ i $\lambda \neq 0 \Rightarrow x = \theta$,

$\lambda x = \theta$ i $x \neq \theta \Rightarrow \lambda = 0$,

(*g*) $\lambda x = \lambda y$ i $\lambda \neq 0 \Rightarrow x = y$,

(*h*) $\lambda x = \mu x$ i $x \neq \theta \Rightarrow \lambda = \mu$.

8.2. Ako su α_ν i β_ν proizvoljni (realni ili kompleksni) brojevi, a p i q dva pozitivna broja veća od jedinice vezana uslovom $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, onda za svako $n = 1, 2, 3, \ldots$ važi tzv. ***Hölder-ova nejednačina:***

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu \beta_\nu| < \left\{\sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{\nu=1}^{n} |\beta_\nu|^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Dokazati. Primenjujući ovu nejednačinu pokazati zatim da za svako $p > 1$ važi i tzv. ***Minkowski-jeva nejednačina***

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu + \beta_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \left\{\sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{\nu=1}^{n} |\beta_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Mogu li se ove nejednačine generalisati tako, da budu primenljive i na integrale? Kakav je njihov oblik u tom slučaju?

8.3. Pokazati da je skup koordinatnih dijada $\mathcal{T}_{ij} = \{e_i, e_j\}$ u prostoru klasičnih tenzora linearno nezavisan. Ispitati takođe linearnu nezavisnost pet tenzora navedenih u zadatku 5.16.

8.4. Ispitati da li u prostoru matrica tipa 2×2 Pauli-jeve spinske matrice iz zadatka 5.5. zajedno sa jediničnom matricom u ovom prostoru čine jednu algebarsku bazu. U potvrdnom slučaju izraziti matrice iz zadatka 5.2. kao njihove linearne kombinacije.

8.5. Da li u prostoru matrica tipa 2×3 sledećih šest matrica

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad m_2 = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$m_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad m_5 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad m_6 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

obrazuje jednu algebarsku bazu? Mogu li se pomoću njih izraziti matrice:

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 22 \\ -13 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}?$$

8.6. Prostor neprekidnih periodičnih funkcija $\bar{C}[-\pi, \pi]$ sa periodom 2π je linearni potprostor prostora $C[-\pi, \pi]$. U njemu je beskonačan skup funkcija:

$$x_0(t) = 1, \; x_1(t) = \cos t, \; x_2(t) = \sin t, \; x_3(t) = \cos 2t, \; x_4(t) = \sin 2t, \ldots$$

linearno nezavisan. Prikazati funkciju $x(t) = 2\sin^3 t \cos t + 3\cos^2 t$ kao element lineala nad njima.

8.7. U prostoru $C[-1, 1]$ beskonačan niz *Legendre-ovih polinoma* je linearno nezavisan. Ovi polinomi su, kao što je poznato iz matematičke analize, dati relacijama:

$$P_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \; P_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t, \; P_2(t) = \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \ldots,$$

$$P_n(t) = \frac{\sqrt{n + \frac{1}{2}}}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n, \ldots$$

Izraziti $x(t) = t^7$ kao element lineala nad njima.

8.8. Između prostora matrica tipa 3×2 i prostora polinoma najviše petog stepena uspostavljen je sledeći algebarski izomorfizam:

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\leftrightarrow 2,\quad \begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix}\leftrightarrow 3-t,\quad \begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 1+t^2,$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\\0&0\end{pmatrix}\leftrightarrow 5+4t-3t^2-t^3,\quad \begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 2-2t+t^3+t^4,$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\1&0\end{pmatrix}\leftrightarrow 3+t-t^2+2t^4+3t^5.$$

Naći matricu koja se ovim izomorfizmom pridružuje polinomu $P(t)=$ $=1-t+t^2-t^3+t^4-t^5$. Naći takođe polinom koji je, istim izomorfizmom, pridružen matrici

$$M=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

8.9. Ako je $\rho(x, y)$ jedno rastojanje u metričkom prostoru X, onda je i

$$\rho_1(x, y)=\frac{\rho(x, y)}{1+\rho(x, y)}$$

takođe jedno rastojanje u istom prostoru. Dokazati.

8.10. Ako je $\rho(x, y)$ jedno rastojanje u metričkom prostoru X, onda važe sledeće relacije:

(a) $\rho(x_1, x_m)<\rho(x_1, x_2)+\rho(x_2, x_3)+\cdots+\rho(x_{m-1}, x_m)$,

(b) $|\rho(x, z)-\rho(y, u)|<\rho(x, y)+\rho(z, u)$,

(c) $|\rho(x, z)-\rho(y, z)|<\rho(x, y)$.

Dokazati.

9. UNITARNI I HILBERTOVI PROSTORI

9.1. SKALARNI PROIZVOD. ERMITSKI PROSTORI

Aksiomi skalarnog množenja. Algebarska struktura linearnog vektorskog prostora može se na celishodan način dopuniti uvođenjem operacije *skalarnog množenja*, tj. definisanjem pravila na osnovu koga je moguće svakom uređenom paru elemenata x i y iz tog linearnog vektorskog prostora pridružiti jedan skalar (u opštem slučaju kompleksan). Taj skalar se zove *skalarni proizvod* elemenata x i y i obično se označava sa (x, y). Pri ovome moraju biti zadovoljeni sledeći *aksiomi skalarnog množenja:*

$$(a)\ (x, y)=\overline{(y, x)},\quad \text{(tzv. } \textit{ermitska simetrija}) \tag{9.1}$$

$$(b)\ (x, \lambda y)=\lambda(x, y),\quad (\textit{asocijativnost}) \tag{9.2}$$

$$(c)\ (x_1\oplus x_2, y)=(x_1, y)+(x_2, y),\quad (\textit{distributivnost}) \tag{9.3}$$

$$(d)\ (x, x)>0;\quad (x, x)=0 \Leftrightarrow x=\theta. \tag{9.4}$$

Crta iznad skalarne veličine označava njenu konjugovano-kompleksnu vrednost. Iz ovih aksioma proizilaze mnoge manje ili više neposredne posledice, od kojih ovde notiramo sledeće tri, koje će biti od koristi u daljem:

$$(\lambda x, y)=\bar{\lambda}(x, y), \tag{9.5}$$

$$(x, y_1\oplus y_2)=(x, y_1)+(x, y_2), \tag{9.6}$$

$$(\lambda x, \lambda x)=|\lambda|^2(x, x). \tag{9.7}$$

Njihovo dokazivanje je elementarno, pa ga stoga ovde izostavljamo. Napomenimo da se aksiom skalarnog množenja (9.2) i jednačina (9.5), koja proizilazi iz njega i uslova ermitske simetrije (9.1), koriste u ovde navedenom obliku u fizičkoj literaturi, posebno u literaturi iz Kvantne mehanike. U matematičkoj literaturi se često uzima da su osobine skalarnog množenja takve da je $(\lambda x, y)=$ $=\lambda(x, y)$ i $(x, \lambda y)=\bar{\lambda}(x, y)$ (tj. skalar λ se nepromenjen izvlači ispred skalarnog proizvoda kada stoji uz *prvi* faktor). Ovo pitanje nije, razume se, suštinsko.

Linearne vektorske prostore u kojima je definisana operacija skalarnog množenja elemenata (koja zadovoljava aksiome (9.1) — (9.4)) *zvaćemo ermitski prostori*. Ovaj naziv nije opšteprihvaćen, i ponekad se u literaturi, posebno matematičkoj, mogu sresti i drugi nazivi (na primer, *unitarni prostori*, *pred-Hilbertovi prostori*, itd).

Schwarz-ova i Minkowski-jeva nejednačina za skalarni proizvod. Aksiomi skalarnog množenja (9.1) — (9.4) imaju za posledicu dve veoma važne nejednačine, oblika:

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)\ (y, y), \tag{9.8}$$

$$\sqrt{(x \oplus y, x \oplus y)} \leq \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}, \tag{9.9}$$

koje se obično nazivaju *Schwarz-ova* i *Minkowski-jeva nejednačina* respektivno.

Da bismo dokazali prvu od njih, zapazimo da prema relaciji (9.4) možemo uvek pisati

$$(x \oplus \mu (x, y) y,\ x \oplus \mu (x, y) y) \geq 0,$$

gde je μ neki skalarni parametar. Pretpostavićemo da je on *realan*, i razvićemo napisani skalarni proizvod, množeći član po član u skladu sa osobinama distributivnosti (9.3) i (9.6). Nakon sređivanja dobija se sledeći rezultat:

$$\mu^2 (y, y) |(x, y)|^2 + 2\mu |(x, y)|^2 + (x, x) \geq 0.$$

Pošto je napisani kvadratni trinom po parametru μ nenegativan, njegova diskriminanta ne može biti veća od nule, tj. mora važiti:

$$|(x, y)|^4 - |(x, y)|^2 (x, x)(y, y) \leq 0.$$

Ako je $(x, y) \neq 0$, odavde se, skraćivanjem sa pozitivnom veličinom $|(x, y)|^2$, dobija (9.8). Važenje Schwarz-ove nejednačine u slučaju $(x, y) = 0$ je očevidno.

Radi dokazivanja Minkowski-jeve nejednačine (9.9), posmatrajmo najpre potkoreni izraz leve strane i transformišimo ga na sledeći način:

$$\begin{aligned}(x \oplus y, x \oplus y) &= (x, x) + (y, y) + (x, y) + (y, x) = \\ &= (x, x) + (y, y) + 2\, Re\,[(x, y)] \leq \\ &\leq (x, x) + (y, y) + 2\,|(x, y)|.\end{aligned}$$

Napisane relacije su očevidno ispunjene jer je sigurno $(x, y) + (y, x) = (x, y) + \overline{(x, y)} = 2\, Re\,[(x, y)]$, a realni deo ma kog komplesnog broja nije veći od modula tog kompleksnog broja. Na osnovu upravo dokazane Schwarz-ove nejednačine imaćemo onda dalje:

$$\begin{aligned}(x \oplus y, x \oplus y) &\leq (x, x) + (y, y) + 2\,|(x, y)| \leq \\ &\leq (x, x) + (y, y) + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} = \\ &= [\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}]^2,\end{aligned}$$

čime je dokazana Minkowski-jeva nejednačina.

Norma elemenata i metrika ermitskih prostora. Iz aksioma skalarnog množenja (9.1) — (9.4) i Minkowski-jeve nejednačine (9.9) može se zaključiti da $+\sqrt{(x, x)}$ *ima sve osobine norme*. Zaista, na osnovu (9.4) će ovo biti realan nenegativan broj jednak nuli samo ako je $x = \theta$, te je aksiom nenegativnosti norme (8.35) zadovoljen. Minkowski-jeva nejednačina (9.9) direktno obezbeđuje važenje aksioma norme (8.37), dok homogenost norme (8.36) proizlazi iz relacije (9.7).

Dakle, *u svakom ermitskom prostoru se može uvesti norma koja izvire iz skalarnog proizvoda tog prostora*:

$$\|x\| = +\sqrt{(x, x)}. \tag{9.10}$$

Ta norma, u skladu sa relacijom (8.38), onda sa svoje strane *generira metriku tog ermitskog prostora*:

$$\rho(x, y) = +\sqrt{(x \ominus y, x \ominus y)}. \tag{9.11}$$

Lako je videti da je norma (9.10) generalizacija pojma intenziteta vektora, a metrika (9.11) generalizacija rastojanja između tačaka trodimenzionog prostora.

Primeri. Od većeg interesa su sledeći primeri ermitskih prostora.

(1) *Prostor* $E_k^{(2)} \ni x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$, čije elemente možemo intepretirati kao tačke ili kao vektore u jednom k-dimenzionom prostoru (u opštem slučaju kompleksnom), postaje ermitski prostor, ako skalarni proizvod definišemo na sledeći način:

$$(x, y) = \sum_{\nu=1}^{k} \bar{\xi}_\nu \eta_\nu. \tag{9.12}$$

Proveravanje važenja aksioma skalarnog množenja je elementarno. Za normu i metriku se dobijaju sledeći izrazi:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu|^2}, \quad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu - \eta_\nu|^2}. \tag{9.13}$$

Vidimo, dakle, da se već ranije uvedena metrika (8.20) može generirati skalarnim proizvodom, ali samo za $p = 2$. Kao što smo već ranije konstatovali, sa ovakvom metrikom je posmatrani prostor kompletan i separabilan. Ovaj je prostor takođe i kompaktan.

(2) *Prostor* l^2. To je prostor beskonačnih nizova kod kojih suma $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^2$ konvergira. Skalarni proizvod se može uvesti generalizacijom relacije (9.12) iz $E_k^{(2)}$:

$$(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{\xi}_\nu \eta_\nu. \tag{9.14}$$

Ovakva definicija ima smisla, jer napisani red konvergira ako su $x, y \in l_2$. To sledi iz Hölder-ove nejednačine (v. zadatak 8.2.) za $p = q = 2$. Zaista:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{\xi}_\nu \eta_\nu\right| &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |\bar{\xi}_\nu \eta_\nu| = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|\,|\eta_\nu| \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^2}\ \sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu|^2},\end{aligned}$$

a poslednji izraz je sigurno konačan. Norma i metrika koje se odavde dobijaju su oblika:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^2}, \quad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu - \eta_\nu|^2}, \tag{9.15}$$

što odgovara metrici (8.24) za $p = 2$. Podsetimo se da je u prošloj glavi konstatovano da je ovaj prostor kompletan i separabilan, ali nije kompaktan.

(3) *Prostor* $C_2\,[a, b]$ neprekidnih funkcija kod kojih integral $\int_a^b |x(t)|^2\,dt$ konvergira može postati ermitski prostor, ako se skalarni proizvod definiše kao:

$$(x, y) = \int_a^b \overline{x(t)}\,y(t)\,dt. \tag{9.16}$$

Da ova definicija skalarnog proizvoda ima smisla, vidi se iz činjenice da navedeni integral sigurno konvergira ako su $x(t), y(t) \in C_2[a, b]$. Dokaz ove tvrdnje se izvodi na isti način kao u prostoru l_2, polazeći od Hölder-ove nejednačine za integrale. Proveravanje aksioma skalarnog množenja kod definicije (9.16) je elementarno. Norma i metrika koje se odavde dobijaju su:

$$\|x\| = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\,dt}, \quad \rho(x, y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2\,dt}. \tag{9.17}$$

I ovde je dobijena metrika istovetna onoj koja je uvedena u prethodnoj Glavi [jednačina (8.27), za $p = 2$]. U odnosu na tu metriku, prostor neprekidnih funkcija, kao što smo videli, nije kompletan ali je separabilan.

Ortonormirani sistemi elemenata u ermitskim prostorima. U ermitskom prostoru se može uvesti pojam *ortogonalnosti* elemenata: dva elementa, x i y, su ortogonalni ako im je skalarni proizvod jednak nuli, $(x, y) = 0$. Ukoliko su norme ovih elemenata uz to jednake jedinici, $\|x\| = \|y\| = 1$, kažemo da oni obrazuju jedan ortonormirani skup. Uopšte, skup elemenata $\{x_i\}$ datog ermitskog prostora (kojih može biti konačno mnogo, prebrojivo ili neprebrojivo beskonačno mnogo u zavisnosti od toga kakve vrednosti može uzimati indeks i) zovemo *ortonormirani sistem* ako je, ma za koje vrednosti indeksa i i j koje dolaze u obzir, zadovoljen uslov:

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij}, \tag{9.18}$$

gde je δ_{ij} Kronecker-ov simbol (1.8). Napisani uslov znači da su svi elementi x_i uzajamno ortogonalni i svi imaju normu jednaku jedinici.

Lako je uvideti da *elementi jednog ortonormiranog sistema moraju biti međusobno linearno nezavisni*, tj. relacija (8.12) sa *konačnim* brojem sabiraka može biti zadovoljena samo ako su svi skalari α_i istovremeno jednaki nuli. Da bismo se u ovo uverili, pretpostavimo da su elementi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koji pripadaju nekom (konačnom ili beskonačnom) ortonormiranom sistemu linearno zavisni, tj. da važi

$$\alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \cdots \oplus \alpha_n x_n = \theta,$$

pri čemu svi koeficijenti nisu jednaki nuli. Neka je, recimo, $\alpha_1 \neq 0$. No, onda skalarnim množenjem gornje relacije sa x_1 odmah dobijamo $\alpha_1 = 0$, u kontradikciji sa upravo učinjenom pretpostavkom. Prema tome, nijedan od koeficijenata u posmatranom zbiru ne može biti različit od nule, tj. posmatrani elementi ortonormiranog sistema su linearno nezavisni.

Ortonormirani sistemi elemenata u ermitskim prostorima su očevidna generalizacija ortogonalnih jediničnih vektora $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ prostora klasičnih vektora sa skalarnim proizvodom (1.27). Uzastopnim parcijalnim integracijama se

može proveriti da Legendre-ovi polinomi (v. zadatak 8.7.) obrazuju jedan ortonormirani sistem u prostoru $C_2[-1, 1]$, tj. da je:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{m+\frac{1}{2}}}{2^m \cdot m!} \frac{d^m}{dt^m}(t^2-1)^m \cdot \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n\,dt = \delta_{mn}. \tag{9.19}$$

Isto tako, skup beskonačnih nizova

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots), \\ x_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots), \\ &\ldots \qquad \ldots \\ x_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1, \ldots), \\ &\ldots \qquad \ldots \end{aligned} \tag{9.20}$$

obrazuje jedan ortonormiran sistem u prostoru l_2, kao što se može videti pomoću relacije (9.14).

Kongruencija ermitskih prostora. Ako je između elemenata dva ermitska prostora uspostavljena biunivoka korespondencija $x \leftrightarrow x^*$, koja predstavlja ne samo algebarski izomorfizam (8.14), već takođe i ostavlja invarijantan skalarni proizvod:

$$(x, y) = (x^*, y^*), \tag{9.21}$$

kažemo da su ti prostori *kongruentni*. Kongruentni ermitski prostori imaju ne samo jednaku algebarsku strukturu, već su i geometrijski odnosi (norma, metrika) u njima jednaki.

Kao primer kongruentnih vektorskih prostora navedimo prostor klasičnih vektora sa skalarnim proizvodom (1.27) i prostor realnih polinoma najviše drugog stepena, sa skalarnim proizvodom (9.16) indukovanim iz prostora $C_2[-1, 1]$, čiji je ovo potprostor. Ako vektore prikažemo u obliku $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$, a polinome predstavimo kao linearne kombinacije prvih triju Legendre-ovih polinoma (zadatak 8.7.) $P(t) = a_1 P_0(t) + a_2 P_1(t) + a_3 P_2(t)$, onda korespondencija:

$$\mathbf{A} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 \leftrightarrow P(t) = \alpha_1 P_0(t) + \alpha_2 P_1(t) + \alpha_3 P_2(t)$$

(komponente vektora i koeficijenti njemu korespondentnog polinoma su jednaki) predstavlja jednu kongruenciju, kao što je lako proveriti, imajući u vidu i relaciju (9.19).

Definicija unitarnih i Hilbertovih prostora. Sa stanovišta teorijske fizike veoma je važno da li je posmatrani ermitski prostor *kompletan* i *separabilan* u odnosu na metriku koja proizilazi iz skalarnog množenja, ili nije. Situacija je bitno različita kod konačno dimenzionih i kod beskonačno dimenzionih prostora. Kao što ćemo u daljem izlaganju pokazati, *konačno dimenzioni ermitski prostori su uvek i kompletni i separabilni* (štaviše, oni su *uvek kompaktni*, tako da kompletnost i separabilnost automatski rezultiraju iz te njihove osobine). Kod beskonačno dimenzionih prostora situacija je složenija. Oni ne moraju biti ni kompletni ni separabilni, ili mogu imati samo jednu od ovih osobina. To se vidi na primeru prostora $C_2[a, b]$ za koga je u prethodnoj Glavi pokazano da je separabilan ali ne i kompletan (a da je to beskonačno dimenzioni prostor, vidi se iz toga što je beskonačan niz funkcija $1, t, t^2, t^3, \ldots$ koje mu pripadaju, linearno nezavisan).

Za konačno dimenzione ermitske prostore (koji su sigurno i kompletni i separabilni) koristićemo naziv unitarni prostori. Beskonačno dimenzione kompletne i separabilne ermitske prostore zvaćemo Hilbertovi prostori. Takav je, na primer, prostor l_2.

Napomenimo da izneti nazivi nisu opšteprihvaćeni. U matematičkoj literaturi se, čak, ponekad koriste u drugom smislu; termini „ermitski" i „unitarni" se često upotrebljavaju sinonimno za označavanje linearnog vektorskog prostora sa definisanim skalarnim množenjem, bez obzira na to da li je on konačno ili beskonačno dimenzioni, da li ima svojstva kompletnosti i separabilnosti ili ne. U istom smislu se, u matematičkoj literaturi, koriste i izrazi „Euklidov" ili „pred-Hilbertov" prostor. Pod nazivom „Hilbertov prostor" se u matematičkoj literaturi obično podrazumeva linearni vektorski prostor sa uvedenom operacijom skalarnog množenja i sa osobinom kompletnosti u odnosu na metriku koja odatle proizilazi, bez obzira da li je konačno ili beskonačno dimenzioni, separabilan ili ne. U fizičkoj literaturi nazivi „unitarni" i „Hilbertov" prostor označavaju respektivno konačno i beskonačno dimenzione kompletne i separabilne prostore, kao što je gore precizirano.

9.2. UNITARNI PROSTORI

Osnovne relacije. Konačno dimenzioni ermitski prostor (linearni vektorski prostor sa definisanim skalarnim množenjem) zovemo *unitaran*. Neka je posmatrani unitaran prostor k-dimenzioni, tj. neka u njemu postoji tačno k linearno nezavisnih elemenata i neka je svaki skup od $(k+1)$ elementa sigurno linearno zavisan. Kao što je već bilo istaknuto u prethodnoj Glavi, ma koji skup od k linearno nezavisnih elemenata će onda predstavljati jednu *algebarsku bazu*. Označimo sa $x_1, x_2, \ldots, x_k$ elemente jedne algebarske baze čiji su elementi ortonormirani, tj. za koje važi relacija (9.18). Takvu algebarsku bazu ćemo zvati *ortonormirana baza*. Videćemo na kraju ovog odeljka kako se pomoću tzv. *Schmidt-ovog postupka ortogonalizacije* može konstruisati jedna ortonormirana baza unitarnog prostora, polazeći od ma kakve algebarske baze tog prostora.

Prema rečenom, ma za koji element x unitarnog prostora X možemo pisati.

$$x = \alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \cdots \oplus \alpha_k x_k = \circ\sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu x_\nu, \tag{9.22}$$

gde su $x_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, k)$ elementi jedne ortonormirane baze u X, a znak $\circ\Sigma$ je upotrebljen da bi se naglasilo da se ima u vidu sumiranje u odnosu na operaciju $\oplus$. Koeficijenti α_ν, kojima je jednoznačno određen svaki element $x \in X$ mogu se izračunati na osnovu

$$(x_\nu, x) = \left(x_\nu, \circ\sum_{\sigma=1}^{k} \alpha_\sigma x_\sigma\right) = \sum_{\sigma=1}^{k} \alpha_\sigma (x_\nu, x_\sigma) = \sum_{\sigma=1}^{k} \alpha_\sigma \delta_{\nu\sigma} = \alpha_\nu. \tag{9.23}$$

Pri transformisanju ovog skalarnog proizvoda iskorišćena je osobina distributivnosti po drugom faktoru (9.6) i osobina asocijativnosti (9.2). Koeficijenti

$$\alpha_\nu = (x_\nu, x) \tag{9.24}$$

se zovu *Fourier-ovi koeficijenti* elemenata $x \in X$ u odnosu na ortonormiranu bazu $\{x_\nu\}$, a relacija

$$x = \circ\sum_{\nu=1}^{k} (x_\nu, x)\, x_\nu, \tag{9.25}$$

koja proizilazi iz (9.24) i (9.22) je tzv. *Fourier-ov razvoj* elementa $x \in X$.

Fourier-ovi redovi u teoriji periodičnih funkcija predstavljaju, istorijski gledano, prvi primer ovakvih razvoja. Koeficijenti Fourier-ovog reda jedne periodične funkcije se upravo nalaze pomoću formule (9.24), gde su

$$x_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, x_1(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, x_2(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, x_3(t) = \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, x_4(t) = \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

ortonormirane funkcije u $\tilde{C}[-\pi, \pi]$. Pri tom se skalarni proizvod definiše pomoću (9.16).

Neka su α_ν i β_ν Fourier-ovi koeficijenti elemenata x i y iz X respektivno. Onda je:

$$x \oplus y = \circ\sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu x_\nu \oplus \circ\sum_{\nu=1}^{k} \beta_\nu \alpha_\nu = \circ\sum_{\nu=1}^{k} (\alpha_\nu + \beta_\nu)\, x_\nu, \tag{9.26}$$

$$\lambda x = \lambda \left(\circ\sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu x_\nu\right)^{*} = \circ\sum_{\nu=1}^{k} (\lambda \alpha_\nu)\, x_\nu, \tag{9.27}$$

u skladu sa osobinama koje mora imati sabiranje i množenje skalarom u ma kom linearnom vektorskom prostoru, pa prema tome i u unitarnom prostoru. Za skalarni proizvod elemenata x i y nalazimo, koristeći osobine asocijativnosti (9.2), (9.5) i distributivnosti (9.3), (9.6) skalarnog množenja,

$$(x, y) = \left(\circ\sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu x_\nu, \circ\sum_{\sigma=1}^{k} \beta_\sigma x_\sigma\right) = \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{\sigma=1}^{k} (\alpha_\nu x_\nu, \beta_\sigma x_\sigma) = \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{\sigma=1}^{k} \bar{\alpha}_\nu \beta_\sigma (x_\nu, x_\sigma) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{\sigma=1}^{k} \bar{\alpha}_\nu \beta_\sigma \delta_{\sigma\nu} = \sum_{\nu=1}^{k} \bar{\alpha}_\nu \beta_\nu. \tag{9.28}$$

Odavde za normu elementa i za rastojanje slede, u skladu sa (9.10) i (9.11), izrazi:

$$\|x\|^2 = \sum_{\nu=1}^{k} |\alpha_\nu|^2 = \sum_{\nu=1}^{k} |(x_\nu, x)|^2 \tag{9.29}$$

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{k} |\alpha_\nu - \beta_\nu|^2}. \tag{9.30}$$

Relacije (9.28) i (9.29) se često zovu *Parseval-ova* i *Bessel-ova jednačina* respektivno.

Metrički odnosi. Relacije (9.26) – (9.30) dozvoljavaju da se zaključi da biunivoka korespondencija između elemenata ma kog unitarnog prostora i $E_k^{(2)}$, uspostavljena vezom:

$$x = \circ\sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu x_\nu \leftrightarrow x^* = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k) \tag{9.31}$$

(svakom elementu unitarnog prostora pridružujemo u $E_k^{(2)}$ tačke čije su koordinate Fourier-ovi koeficijenti tog elementa) predstavlja jednu *kongruenciju*. Zaista, veza (9.31) pridružuje zbiru dva elementa iz unitarnog prostora zbir njima korespondentnih elemenata iz $E_k^{(1)}$, što se neposredno vidi iz (9.26), a proizvodu ma kog elementa unitarnog prostora i skalara pridružuje proizvod korespondentnog elementa iz $E_k^{(2)}$ i istog skalara u skladu sa (9.27). Zbog ovih osobina, veza (9.31) je *algebarski izomorfizam* [v. jednačinu (8.14)]. Posmatrano preslikavanje očuvava, međutim, i skalarni proizvod, kao što se vidi upoređivanjem (9.28) i (9.12), pa je ono takođe *kongruencija* [v. jednačinu (9.21)].

To znači da su sve metričke karakteristike bilo kog unitarnog prostora istovetne sa metričkim osobinama $E_k^{(2)}$. Konkretno *iz kompaktnosti prostora* $E_k^{(2)}$ *sledi, na osnovu veze* (9.31) *kompaktnost svakog k-dimenzionog unitarnog prostora*. To će onda imati za posledicu *kompletnost* i *separabilnost ma kog konačnog dimenzionog unitarnog prostora*. Kao što je već pomenuto, upravo ove poslednje dve osobine su od interesa u primenama u Teorijskoj fizici.

Kompletnost i separabilnost unitarnih prostora se mogu pokazati, razume se, i bez pozivanja na kongruenciju sa $E_k^{(2)}$. U tom cilju se polazi direktno od metrike (9.30) i od činjenice da je skup brojeva na realnoj pravoj kompletan i separabilan (racionalni brojevi obrazuju prebrojiv, svuda gust skup u ovom skupu). Mi se na ovom formalnom pitanju nećemo zadržavati.

Schmidt-ov postupak ortogonalizacije. Neka su $y_1, y_2, \ldots, y_k$ elementi jedne algebarske baze datog unitarnog prostora, koji nisu ortonormirani. Postupak ortogonalizacije se sastoji u tome da se najpre obrazuju linearne kombinacije oblika

$$
\begin{aligned}
y_1^* &= y_1, \\
y_2^* &= y_2 \oplus \gamma_{21} y_1, \\
y_3^* &= y_3 \oplus \gamma_{32} y_2 \oplus \gamma_{31} y_1, \\
&\ldots \quad \ldots \\
y_k^* &= y_k \oplus \gamma_{k,k-1} y_{k-1} \oplus \cdots \oplus \gamma_{k1} y_1,
\end{aligned}
\tag{9.32}
$$

a zatim se koeficijenti γ_{ij} odrede tako da svaki element y_i^* bude ortogonalan na sve prethodne. Time se, kako nije teško neposrednim izračunavanjem proveriti, ovi koeficijenti određuju jednoznačno. Nakon toga se još svaki od novodobijenih elemenata podeli svojom normom, čime se dobija jedna ortonormirana baza:

$$
x_1 = \frac{y_1^*}{\|y_1^*\|}, \quad x_2 = \frac{y_2^*}{\|y_2^*\|}, \quad \ldots, \quad x_k = \frac{y_k^*}{\|y_k^*\|}. \tag{9.33}
$$

Primeri postupka ortogonalizacije u unitarnom prostoru su dati u zadacima 9.9. i 9.10.

9.3. BESKONAČNO DIMENZIONI KOMPLETNI ERMITSKI PROSTORI

Fourier-ovi koeficijenti. Da bismo bili u stanju da formulišemo kriterijum separabilnosti beskonačno dimenzionog i *kompletnog* ermitskog prostora (linearnog vektorskog prostora sa definisanim proizvodom), tj. da bismo mogli izdvojiti *Hilbertove prostore*, ispitajmo najpre do kakvih posledica dovodi pokušaj generalizacije relacija (9.25), (9.28) i (9.29). U beskonačno dimenzionom ermitskom prostoru može biti beskonačno mnogo linearno nezavisnih i ortonormiranih elemenata.

Neka je $\{x_i\}$ jedan ortonormirani sistem od beskonačno mnogo (prebrojivo ili neprebrojivo) elemenata nekog beskonačno dimenzionog i kompletnog ermitskog prostora X. Po analogiji sa (9.24) ćemo skalarne proizvode (x_i, x), gde je x ma koji element prostora X, zvati *Fourier-ovim koeficijentima* uočenog elementa.

Za ove koeficijente važi sledeći interesantan stav. *Među Fourier-ovim koeficijentima* (x_i, x) *ma kog elementa* x *iz beskonačno dimenzionog ermitskog prostora ima najviše prebrojivo mnogo različitih od nule, čak i kad je ortonormirani sistem* $\{x_i\}$ *neprebrojiv*. Radi dokazivanja ovog tvrđenja, zapazimo najpre da suma kvadrata modula ma kog *konačnog* broja Fourier-ovih koeficijenata nekog elementa x ne može biti veća od kvadrata njegove norme, tj. da za svako konačno k važi:

$$
\sum_{i=1}^{k} |(x_i, x)|^2 \leq \|x\|^2. \tag{9.34}
$$

Naime, ako posmatramo element $y = x \ominus \circ \sum_{i=1}^{k} (x_i, x)\, x_i$, koji takođe sigurno pripada istom prostoru X, i uzmemo u obzir da mora biti $(y, y) \geq 0$, dobićemo neposredno, na osnovu osobina asocijativnosti i distributivnosti skalarnog proizvoda,

$$
\begin{aligned}
(y, y) &= \left(x \ominus \circ \sum_{i=1}^{k} (x_i, x)\, x_i,\ x \ominus \circ \sum_{j=1}^{k} (x_j, x)\, x_j\right) = (x, x) - \sum_{j=1}^{k} (x, (x_j, x)\, x_j) - \\
&- \sum_{i=1}^{k} ((x_i, x)\, x_i, x) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} ((x_i, x)\, x_i, (x_j, x)\, x_j) = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{k} |(x_i, x)|^2 \geq 0,
\end{aligned}
$$

što dokazuje relaciju (9.34). Uočimo sad skup F_n Fourier-ovih koeficijenata elementa $x \in X$, koji su po modulu veći od $\frac{1}{n}$. Neka su to, recimo, (x_{i_1}, x), $(x_{i_2}, x), \ldots, (x_{i_m}, x)$. Na osnovu (9.34) onda možemo pisati:

$$
\|x\|^2 \geq \sum_{v=1}^{m} |(x_{i_v}, x)|^2 > m \frac{1}{n^2},
$$

odakle sledi da je $m < n^2 \|x\|^2$, tj. da za svako fiksirano n skup F_n sadrži samo konačan broj Fourier-ovih koeficijenata. Prema tome, u uniji $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, koja predstavlja skup svih Fourier-ovih koeficijenata različitih od nule, može biti najviše prebrojivo mnogo elemenata. Drugim rečima, u sumama oblika

$$
\circ \sum_{i} (x_i, x)\, x_i, \quad \sum_{i} |(x_i, x)|^2 \tag{9.35}
$$

uvek ćemo imati najviše prebrojivo mnogo sabiraka, tj. to će uvek biti *redovi* i nikada nećemo doći u situaciju da ih moramo tretirati na složeniji način (na primer, kao integrale). To znači da ako sa $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_v}, \ldots$ označimo one elemente posmatranog ortonormiranog sistema $\{x_i\}$ za koje su Fourier-ovi koeficijenti elementa $x \in X$ različiti od nule, gornje sume možemo pisati eksplicitnije

$$
\circ \sum_{v=1}^{\infty} (x_{i_v}, x)\, x_{i_v}, \quad \sum_{v=1}^{\infty} |(x_{i_v}, x)|^2, \tag{9.36}
$$

tako da se jasno uočava da u njima nema više nego prebrojivo mnogo sabiraka. Prvu od ovih suma zvaćemo *Fourier-ovim razvojem*, a za drugu možemo odmah pisati:

$$
\sum_{v=1}^{\infty} |(x_{i_v}, x)|^2 \leq \|x\|^2, \tag{9.37}
$$

jer su, u skladu sa (9.34), parcijalne sume ovog reda ograničene za svako k. Relacija (9.37) se, zbog analogije sa (9.29) zove *Bessel-ova nejednačina*.

Konvergencija Fourier-ovog razvoja. Neka je x ma koji element jednog beskonačno dimenzionog i *kompletnog* ermitskog prostora. Dokazaćemo da *njegov Fourier-ov razvoj uvek konvergira u smislu metrike indukovane skalarnim proizvodom*. U tom cilju posmatraćemo sledeća dva niza parcijalnih suma:

$$s_n = \circ\sum_{\nu=1}^{n} (x_{i_\nu}, x)\, x_{i_\nu}, \qquad \sigma_n = \sum_{\nu=1}^{n} |(x_{i_\nu}, x)|^2; \tag{9.38}$$

zapazimo da elementi s_ν pripadaju prostoru X, dok su σ_n pozitivni skalari. Prema relaciji (9.37), niz σ_n konvergira.

Rastojanje između elemenata s_m i s_n u smislu metrike (9.11) indukovane skalarnim proizvodom je:

$$\begin{aligned}\rho(s_m, s_n) &= \|s_m \ominus s_n\| = \left\| \circ\sum_{\nu=n+1}^{m} (x_{i_\nu}, x)\, x_{i_\nu} \right\| = \\ &= \sqrt{\left(\circ\sum_{\nu=n+1}^{m} (x_{i_\nu}, x)\, x_{i_\nu},\ \circ\sum_{\alpha=n+1}^{m} (x_{i_\alpha}, x)\, x_{i_\alpha} \right)} = \\ &= \sqrt{\sum_{\nu=n+1}^{m} |(x_{i_\nu}, x)|^2} = \sqrt{|\sigma_m - \sigma_n|}.\end{aligned} \tag{9.39}$$

Pošto je niz σ_n konvergentan, on je sigurno i Cauchy-jev, pa se izborom dovoljno velikih vrednosti za m i n može postići da bude $|\sigma_m - \sigma_n| < \varepsilon^2$. No, to onda povlači i $\rho(s_m, s_n) < \varepsilon$ za iste vrednosti m i n, tj. i niz s_n je Cauchy-jev. Pošto se naše razmatranje odnosi na *kompletne* prostore, zaključujemo da je niz s_n *konvergentan*. Ovaj zaključak se često izražava tvrdnjom da su *redovi* (9.36) *ekvikonvergentni*: iz (9.39) se vidi da konvergencija jednog povlači i konvergenciju drugog.

Svakako treba zapaziti da dokazana teorema tvrdi *samo* da red $\circ\sum_{\nu=1}^{\infty} (x_{i_\nu}, x)\, x_{i_\nu}$ konvergira, ne pružajući mogućnost da se bez daljega utvrdi granična vrednost. Međutim bilo bi pogrešno smatrati da se, po analogiji sa konačno dimenzionalnim prostorom i relacijom (9.25), ovde može pisati $\circ\sum_{\nu=1}^{\infty} (x_{i_\nu}, x)\, x_{i_\nu} = x$.

Sledeći primer nas u to može ubediti. Neka je

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)$$

proizvoljan element prostora $l_2 \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^2 < +\infty \right)$. Posmatrajmo u ovom prostoru beskonačan niz ortonormiranih elemenata:

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots), \\ x_2 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots\ 0, \dots), \\ x_3 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned} \tag{9.40}$$

[n-ti element ima na $(2n-1)$-om mestu jedinicu i sve ostale komponente jednake nuli]; taj niz elemenata je očevidno i beskonačan i ortonormiran u smislu skalarnog proizvoda (9.14) u l_2. Fourier-ovi koeficijenti elementa x će biti:

$$(x_n, x) = \xi_{2n-1},$$

tako da Fourier-ov razvoj glasi:

$$\begin{aligned}\circ\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, x)\, x_n &= \xi_1 (1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots) \oplus \xi_3 (0, 0, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots) \oplus \cdots \\ &= (\xi_1, 0, \xi_3, 0, \xi_5, 0, \dots) = x'.\end{aligned}$$

Element x' pripada prostoru l_2, jer je $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_{2\nu-1}|^2 < \sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^2 < +\infty$, tako da Fourier-ov razvoj konvergira, ali je u opštem slučaju $x' \neq x$. Samo za elemente x koji na parnim mestima imaju nule, bilo bi $x' = x$.

Potpuni ortonormirani sistemi elemenata. Ortonormirani sistem elemenata $\{x_i\}$ datog beskonačno dimenzionog i kompletnog ermitskog prostora biće po definiciji *potpun*, ako u tom prostoru *ne postoji nijedan element osim* θ *ortogonalan na svako* x_i. Ovom se osobinom potpuni ortonormirani sistemi bitno razlikuju od ortonormiranih, jer se od ovih elemenata poslednjih zahteva samo da su uzajamno ortogonalni i da imaju jedinične norme, tako da je dopustivo postojanje nenultih elemenata ortogonalnih na sve elemente datog ortonormiranog sistema. Na primer, beskonačan ortonormiran niz elemenata (9.40) u l_2 nije potpun, jer je, recimo element $x_1' = (0, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ ili element $x_2' = (0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ ortogonalan na svako x_n.

Za potpune ortonormirane sisteme elemenata jednog beskonačno dimenzionog i kompletnog ermitskog prostora važi *Riesz-Fischer-ova teorema*, prema kojoj *Fourier-ov razvoj ma kog elementa u odnosu na potpuni ortonormirani sistem konvergira samom tom elementu*, tj.

$$\circ\sum_{i} (x_i, x)\, x_i = x. \tag{9.41}$$

Da bismo izbegli složeni način pisanja korišćen u nekoliko ranijih relacija, ovde pišemo prosto $\circ\sum_i$; iako formalno u takvom načinu pisanja ova suma može imati i više nego prebrojivo mnogo sabiraka, dokazali smo ranije da će ih biti najviše prebrojivo mnogo različitih od nule.

Dokaz Riesz-Fischer-ove teoreme sledi iz činjenice da suma sa leve strane jednačine (9.41) konvergira na osnovu (9.39), tako da u posmatranom prostoru postoji element $z = x \ominus \circ\sum_i (x_i, x)\, x_i$. Lako je videti da je on ortogonalan na svako x_j. Zaista:

$$\begin{aligned}(z, x_j) &= \left(x \ominus \circ\sum_i (x_i, x)\, x_i,\ x_j\right) = (x, x_j) - \sum_i \left((x_i, x)\, x_i,\ x_j\right) = \\ &= (x, x_j) - \sum_i \overline{(x_i, x)}\, \delta_{ij} = (x, x_j) - \overline{(x_j, x)} = 0.\end{aligned} \tag{9.42}$$

Prema tome, ako je $\{x_i\}$ *potpun* ortonormiran skup, mora biti $z = 0$, odakle izlazi (9.41). To je generalizacija relacije (9.25).

Ova teorema ima dve važne posledice, koje proizilaze iz osobina skalarnog proizvoda. Naime, na osnovu (9.41) imamo

$$(x, x)=\left(\circ\sum_i (x_i, x)\,x_i, \circ\sum_j (x_j, x)\,x_j\right)=\sum_i\sum_j \left((x_i, x)\,x_i, (x_j, x)\,x_j\right)=$$

$$=\sum_i\sum_j \overline{(x_i, x)}\,(x_j, x)\,(x_i, x_j)=\sum_i\sum_j \overline{(x_i, x)}\,(x_j, x)\,\delta_{ij}=\sum_i |(x_i, x)|^2, \tag{9.43}$$

tj. ako $\{x_i\}$ obrazuju potpun ortonormiran sistem, važi ***Bessel-ova jednačina***:

$$\|x\|^2=\sum_i |(x_i, x)|^2 \tag{9.44}$$

koja generališe jednačinu (9.29) iz unitarnih prostora. Ako nije sigurno da je $\{x_i\}$ potpun ortonormirani sistem, važi ***Bessel-ova nejednačina*** (9.37).

S druge strane, na osnovu (9.41) i osobina skalarnog proizvoda proizilazi takođe i:

$$(x, y)=\left(\circ\sum_i (x_i, x)\,x_i, \circ\sum_j (x_j, y)\,x_j\right)=\sum_i \overline{(x_i, x)}\,(x_i, y); \tag{9.45}$$

detalji računanja su analogi onima u (9.42) i (9.43). Relacija (9.45) je *Parseval-ova jednačina* u beskonačne dimenzionom slučaju; kao što vidimo ona važi jedino ako je $\{x_i\}$ potpun ortonormirani sistem. Za konačno dimenzioni (unitarni) prostor, Parseval-ova jednačina ima već ranije nađeni oblik (9.28).

Riesz-Fischer-ova teorema pokazuje da između ortonormirane baze u unitarnom (konačno dimenzionom) prostoru i potpunog ortonormiranog sistema elemenata u beskonačno dimenzionom prostoru postoji izvesna analogija. Svaki element $x \in X$ se u oba slučaja može prikazati kao linearna kombinacija ortonormiranih elemenata, kao što se vidi iz (9.25) i (9.24), te su u tom pogledu konačno i beskonačno dimenzioni slučaj slični. U konačno dimenzionom slučaju, međutim, važi i obrnuto tvrđenje: svaka linearna kombinacija oblika $\sum_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu x_\nu$ predstavlja neki element datog unitarnog prostora. U beskonačno dimenzionom prostoru analogi izraz, $\sum_i \gamma_i x_i$, ne mora nužno predstavljati neki element posmatranog prostora (tj. napisana suma ne mora konvergirati). Kao što smo videli, to će biti jedino u slučaju ako su koeficijenti γ_i takvi da je $\sum_i |\gamma_i|^2 < +\infty$, u skladu sa (9.39). Sa ovim ograničenjem se i kod beskonačno dimenzionih prostora upotrebljava, umesto termina ortonormirani sistem, izraz *ortonormirana bazu*.

Efektivno proveravanje potpunosti datog ortonormiranog sistema elemenata u nekom konkretnom beskonačnom dimenzionom i kompletnom ermitskom prostoru vrlo često se vrši na taj način što se proveri da li zadovoljena Bessel-ova jednačina (9.44) ma za koje $x \in X$, ili Parseval-ova jednačina (9.45) ma za koje $x, y \in X$. Zbog toga se ove jednačine često nazivaju i *relacije potpunosti*.

Kao važna posledica Riesz-Fischer-ove teoreme proizilazi da je *lineal nad potpunim ortonormiranim sistemom u beskonačno dimenzionom i kompletnom ermitskom prostoru svuda gust u tom prostoru*. Podsetimo se da lineal nad datim beskonačnim skupom elemenata čine sve linearne kombinacije oblika (8.13) sa *konačno* mnogo sabiraka. Podsetimo se takođe da će podskup $X' \subset X$ biti svuda gust u X, ako je za svako $x \in X$ moguće naći bar jedno $x' \in X'$ za koje važi $\rho(x, x') < \varepsilon$, ma kako malo bilo odabrano $\varepsilon > 0$. Dokaz gornjeg tvrđenja se

može dati na sledeći način. Označimo sa $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, \ldots$ onaj skup od najviše prebrojivo mnogo elemenata datog potpunog ortonormiranog sistema, $\{x_i\}$ koji može biti i neprebrojiv za koje su Fourier-ovi koeficijenti elementa $x \in X$ različiti od nule. Prema Riesz-Fischer-ovoj teoremi možemo, dakle, umesto (9.45) eksplicitno pisati

$$x=\circ\sum_{\nu=1}^{\infty} (x_{i_\nu}, x)\,x_{i_\nu}. \tag{9.46}$$

Element

$$x'=\circ\sum_{\nu=1}^{n} (x_{i_\nu}, x)\,x_{i_\nu} \tag{9.47}$$

ima samo konačno mnogo (n) sabiraka, pa prema tome pripada linealu nad elementima $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, \ldots$ tj. i linealu nad $\{x_i\}$. Rastojanje između x i x' iznosi:

$$\rho(x, x')=\|x \ominus x'\|=\left\|\circ\sum_{\nu=n}^{\infty} (x_{i_\nu}, x)\,x_{i_\nu}\right\|=$$

$$=\sqrt{\left(\circ\sum_{\nu=n}^{\infty} (x_{i_\nu}, x)\,x_{i_\nu}, \circ\sum_{\sigma=n}^{\infty} (x_{i_\sigma}, x)\,x_{i_\sigma}\right)}=\sqrt{\sum_{\nu=n}^{\infty} |(x_{i_\nu}, x)|^2}, \tag{9.48}$$

suma pod korenom u poslednjem izrazu je sigurno konvergentna na osnovu Bessel-ove jednačine (9.44), tako da se izborom dovoljno velikog n može postići da ona bude manja od ε^2, tj. da ovo rastojanje bude manje od ma kako malog unapred zadanog broja $\varepsilon > 0$, čime je izneto tvrđenje dokazano.

9.4. HILBERTOVI PROSTORI

Uslov separabilnosti. Hilbertove prostore smo definisali kao beskonačno dimenzione ermitske prostore koji osim osobine kompletnosti imaju i osobinu *separabilnosti*. Sada ćemo pokazati da je za ovo dovoljno da potpuni ortonormirani sistem u tom prostoru bude *prebrojiv*, tj. da se elementi tog potpunog ortonormiranog sistema mogu poređati u niz $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

U ovom cilju uočimo jedan element $x \in X$ i pretpostavimo da je potpuni ortonormirani sistem prostora prebrojiv. Prema Riesz-Fischer-ovoj teoremi (9.41), moći ćemo pisati:

$$x=\circ\sum_{\nu=1}^{\infty} (x_\nu, x)\,x_\nu.$$

Uočimo takođe i element

$$x'=\circ\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu, x)\,x_\nu,$$

za koji smo na kraju prethodnog odeljka pokazali da uz izbor dovoljno velikog n može biti proizvoljno blizu (u smislu metrike indukovane skalarnim proizvodom) elementu x. Element x' pripada linealu nad elementima potpunog ortonormiranog sistema, jer sadrži konačan broj sabiraka. Uočimo i treći element prostora X oblika

$$x''=\circ\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu, \tag{9.49}$$

čiji koeficijenti imaju racionalni realni i imaginarni deo. Podesnim izborom ovih koeficijenata može se postići da $\rho(x', x'') < \frac{\varepsilon}{2}$, gde je $\varepsilon > 0$ unapred odabran mali broj. Ovo je stoga što je skup racionalnih brojeva svuda gust u skupu realnih brojeva. To se detaljnije vidi iz:

$$\rho(x', x'') = \| x' \ominus x'' \| = \left\| \circ \sum_{\nu=1}^{n} [(x_\nu, x) - \lambda_\nu] x_\nu \right\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |(x_\nu, x) - \lambda_\nu|^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |Re(x_\nu, x) - Re\lambda_\nu|^2 + \sum_{\nu=1}^{n} |I_m(x_\nu, x) - I_m\lambda_\nu|^2}. \qquad (9.50)$$

Ovde *Re* i *Im* znače realni i imaginarni deo. Ako se, dakle, uzme

$$|Re(x_\nu, x) - Re\lambda_\nu|^2 < \frac{1}{8n}\varepsilon^2$$

$$|Im(x_\nu, x) - Im\lambda_\nu|^2 < \frac{1}{8n}\varepsilon^2,$$

što je sigurno uvek moguće, imaćemo $\rho(x', x'') < \frac{\varepsilon}{2}$. S druge strane izborom dovoljno velikog n možemo, na osnovu (9.48), postići da bude $\rho(x, x') < \frac{\varepsilon}{2}$, tako da relacija trougla daje:

$$\rho(x, x'') < \rho(x, x') + \rho(x', x'') < \varepsilon. \qquad (9.51)$$

Odatle zaključujemo da je skup (9.49) elemenata lineala nad ortonormiranom bazom sa racionalnim koeficijentima svuda gust u posmatranom prostoru X. No, taj skup je i prebrojiv, što znači da je X ***separabilan prostor***, jer u njemu postoji prebrojiv svuda gust skup.

Kongruencija sa prostorom l_2. U separabilnom (Hilbertovom) prostoru možemo relacije (9.41), (9.44) i (9.45) napisati kao:

$$x = \circ \sum_{\nu=1}^{\infty} (x_\nu, x) x_\nu, \qquad (9.52)$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} |(x_\nu, x)|^2}, \qquad (9.53)$$

$$(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{(x_\nu, x)} (x_\nu, y). \qquad (9.54)$$

Razlika između ovih relacija i pomenutih relacija u ma kom beskonačnom dimenzionom i kompletnom ermitskom prostoru je u tome što su *elementi ortonormirane baze ovde isti za sve elemente prostora*, jer ih ima samo prebrojivo mnogo, koliko svaki element može imati Fourier-ovih koeficijenata različitih od nule. Istaknimo da i u sumi (9.41) postoji, prema rečenom, takođe samo prebrojivo mnogo sabiraka (samo prebrojivo mnogo Fourier-ovih koeficijenata je različito od nule, čak i ako ortonormirana baza ima neprebrojivo mnogo elemenata), ali se *elementi baze prisutni u sumi mogu menjati od elementa do elementa*. Naime, za svaki element prostora u tom slučaju treba iz neprebrojivog skupa elemenata ortonormirane baze izdvojiti samo onih prebrojivo mnogo za koje će Fourier-ovi koeficijenti biti različiti od nule.

Upoređivanjem relacija (9.52)–(9.54) sa formulama (9.14) i (9.15) skalarni proizvod i normu elementa u prostoru l_2, zaključujemo da se izm elemenata ma kog Hilbertovog prostora i elemenata prostora l_2 može uspostav biunivoka korespondencija tako što će se *svakom elementu posmatranog Hilb tovog prostora pridružiti beskonačan niz njegovih Fourier-ovih koeficijenata odnosu na datu ortonormiranu bazu*:

$$x = \circ \sum_{\nu=1}^{\infty} (x_\nu, x) x_\nu \leftrightarrow x^* = ((x_1, x), (x_2, x), \ldots, (x_n, x), \ldots). \qquad (9.$$

Ova korespondencija očevidno očuvava strukturu (zbiru dva elementa ma Hilbertovog prostora pridužuje zbir njihovih beskonačnih nizova Fourier-o koeficijenata, a proizvodu elementa i skalara pridružuje proizvod beskonač niza Fourier-ovih koeficijenata i istog skalara) i, kako se vidi iz (9.54) i (9.1 ostavlja invarijantan skalarni proizvod. Prema tome, korespondencija (9.55) *kongruencija*. Ona je analoga kongruenciji (9.31) između ma kog unitar (konačno dimenzionog ermitskog) prostora i prostora $E_k^{(2)}$. Na taj način pros l_2 postaje najvažnija konkretna realizacija Hilbertovog prostora *i ma koji H bertov prostor kongruentan je sa prostoram* l_2. Na osnovu (9.55) možemo tak tvrditi da su, preko kongruencije sa l_2, *ma koja dva Hilbertova prosto kongruentna*.

Funkcionalni Hilbertov prostor L_2. Za mnoge primene u Teorijskoj fizic posebno u Kvantnoj mehanici, celishodno je imati na raspolaganju realizaci Hilbertovog prostora čiji su elementi *funkcije*. Prostor $C_2[a, b]$ sa skalarni proizvodom (9.16) i normom i metrikom (9.17) nije dovoljan za tu svrhu, je separabilan, ali *nije kompletan*, kao što je ilustrovano primerom (8.30). bismo, dakle, dobili funkcionalni Hilbertov prostor, treba $C_2[a, b]$ dopuniti t da obuhvati i prekidne funkcije, koje bi bile granične vrednosti nizova analo onima u primeru (8.30). Sa ovim proširenjem, međutim, relacije (9.16) i (9. gube dosadašnji smisao, jer Riemann-ovi integrali koji se u njima pojavlj nisu definisani ma za kakve prekidne funkcije.

Umesto Riemann-ovog integrala moramo, dakle, koristiti pojam *Lebesg -ovog integrala*, koji ima smisla i kod funkcije koje nisu neprekidne. U okv ove knjige ne možemo strogo matematički zasnovati pojam Lebesgue-ovog in grala i skupova merljivih u Lebesgue-ovom smislu*. Naglasimo samo na ov mestu da *ako je neka funkcija integrabilna u Riemann-ovom smislu u konačn intervalu* $[a, b]$ *ona je onda integrabilna i u Lebesgue-ovom smislu u istom int rvalu, i oba integrala se poklapaju,*

$$(R)\int_a^b x(t)\,dt = (L)\int_a^b x(t)\,dt. \qquad (9.5$$

Oznake (R) i (L) ćemo koristiti da naglasimo o kom tipu integrala se rad kada je to potrebno. Važno je istaći da obrnuto tvrđenje ne važi. *Funkcija mo biti integrabilna u Lebesgue-ovom smislu a da njen Riemann-ov integral ne postoj* Još nekoliko analogih osobina i stavova je navedeno na kraju ove Glave be formalnog dokazivanja, sa ciljem da se olakša operisanje sa ovim novim pojmo integrala.

* Za opširnije upoznavanje sa ovim pitanjima, čitaocu se preporučuje da konsultuje na primer, knjigu citiranu u spisku literature pod rednim brojem 1, III Glava, ili knjigu po rednim brojem 28, V Glava.

Definišimo sada *prostor kompleksnih funkcija realnog argumenta, koje imaju osobine da im je kvadrat modula Lebesgue-integrabilan u datom intervalu* (a, b),

$$(L)\int_a^b |x(t)|^2 \, dt < +\infty. \tag{9.57}$$

Taj prostor ćemo označiti sa $L_2(a, b)$. Unutrašnja i spoljašnja kompozicija, koje će ovom prostoru dati algebarsku strukturu linearnog vektorskog prostora, definiše se kao obično sabiranje funkcija i njihovo množenje brojevima. Potrebno je, razume se, dokazati da se pomenute operacije zaista mogu ovako definisati, tj. da će $\alpha x(t)$ i $x(t)+y(t)$ biti elementi prostora $L_2(a, b)$ ako su to $x(t)$ i $y(t)$. Imamo:

$$(L)\int_a^b |\alpha x(t)|^2 \, dt = (L)\int_a^b |\alpha|^2 |x(t)|^2 \, dt = |\alpha|^2 \Big[(L)\int_a^b |x(t)|^2 \, dt\Big] < +\infty \tag{9.58}$$

jer i Lebesgue-ov integral dopušta izvlačenje konstante ispred znaka integrala. Dakle, ako je $x(t) \in L_2(a, b)$ biće i $\alpha x(t) \in L_2(a, b)$ ma za kakvu (kompleksnu) vrednost skalara α. Da bismo dokazali analogo tvrđenje za zbir dve funkcije iz $L_2(a, b)$, zapazimo najpre da se iz očevidne nejednakosti $[|x(t)| - |y(t)|]^2 > 0$ nakon dizanja na kvadrat i neznatnog preuređivanja dobija uslov

$$|x(t)|\,|y(t)| < \frac{1}{2}[|x(t)|^2 + |y(t)|^2], \tag{9.59}$$

koji je ispunjen za svako $t \in (a, b)$. Ako sad eksplicitno napišemo $x(t) = x_1(t) + i x_2(t)$ i $y(t) = y_1(t) + i y_2(t)$, imaćemo:

$$\begin{aligned} |x(t)+y(t)|^2 &= |x_1(t)+y_1(t)+i[x_2(t)+y_2(t)]|^2 = \\ &= x_1^2(t) + 2x_1(t)y_1(t) + y_1^2(t) + x_2^2(t) + 2x_2(t)y_2(t) + y_2^2(t) = \\ &= |x(t)|^2 + |y(t)|^2 + 2[x_1(t)y_1(t) + x_2(t)y_2(t)] < \\ &< |x(t)|^2 + |y(t)|^2 + 4|x(t)|\,|y(t)|. \end{aligned} \tag{9.60}$$

Nejednakost u poslednjem redu proizilazi iz očevidnih uslova $x_1(t)y_1(t) < |x(t)|\,|y(t)|$, $x_2(t)y_2(t) < |x(t)|\,|y(t)|$. Ako sad iskoristimo (9.59), moći ćemo dalje pisati:

$$|x(t)+y(t)|^2 < 3[|x(t)|^2 + |y(t)|^2]. \tag{9.61}$$

Dakle,

$$(L)\int_a^b |x(t)+y(t)|^2 \, dt < 3\Big[(L)\int_a^b |x(t)|^2 \, dt + (L)\int_a^b |y(t)|^2 \, dt\Big] < +\infty, \tag{9.62}$$

čime je dokazano da će biti $x(t)+y(t) \in L_2(a, b)$, ako je $x(t) \in L_2(a, b)$ i $y(t) \in L_2(a, b)$. Štaviše, ako u nejednakosti (9.59) umesto $|x(t)|\,|y(t)|$ napišimo

$$|x(t)|\,|y(t)| = |x(t)|\,|y(t)| = |\bar{x}(t)y(t)|,$$

dobićemo:

$$(L)\int_a^b |\bar{x}(t)y(t)| \, dt < \frac{1}{2}\Big[(L)\int_a^b |x(t)|^2 \, dt + (L)\int_a^b |y(t)|^2 \, dt\Big] < +\infty, \tag{9.63}$$

tako da možemo zaključiti da integral $(L)\int_a^b \bar{x}(t)y(t)\,dt$ konvergira. Naime, prema osobinama Lebesgue-ovog integrala (v. napomene na kraju ove Glave), funkcija $f(t)$ će biti integrabilna, ako je $|f(t)|$ integrabilna. Taj zaključak je za naša razmatranja vrlo važan, jer omogućuje da skalarni proizvod u $L_2(a, b)$ definišemo po analogiji sa (9.16):

$$(x, y) = (L)\int_a^b \bar{x}(t)y(t)\,dt, \tag{9.64}$$

jer će napisani integral uvek konvergirati ako je $x(t), y(t) \in L_2(a, b)$. Aksiomi skalarnog proizvoda su sigurno zadovoljeni na osnovu osobina Lebesgue-ovog integrala, analogih osobinama Riemann-ovog integrala.

Na osnovu rečenog izlazi da je *prostor* $C_2(a, b)$ *neprekidnih funkcija linearni potprostor prostora* $L_2(a, b)$. Štaviše u funkcionalnoj analizi se pokazuje da je *skup neprekidnih funkcija svuda gust u* $L_2(a, b)$ u smislu metrike

$$\rho(x, y) = \sqrt{(L)\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 \, dt}, \tag{9.65}$$

indukovane uvedenim skalarnim proizvodom (9.64). Odavde odmah zaključujemo da je $L_2(a, b)$ *separabilan prostor**. Da bismo se uverili u to, uočimo elemente $x(t)$ ovog prostora. Pošto je skup neprekidnih funkcija svuda gust u njemu, može se naći neprekidna funkcija $y(t)$ tako da bude $\rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$, gde je $\varepsilon > 0$ proizvoljan unapred odabran broj. S druge strane, neka $y_1(t)$ pripada prebrojivom svuda gustom skupu u potprostoru neprekidnih funkcija (ovaj potprostor je u stvari prostor $C_2[a, b]$ i separabilan je, tj. u njemu postoji prebrojiv svuda gust skup), odnosno neka je $\rho(y, y_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. No, onda relacija trougla daje $\rho(x, y_1) < \rho(x, y) + \rho(y, y_1) < \varepsilon$, odakle izlazi da je skup sa elementima $y_1(t)$ svuda gust i u prostoru $L_2(a, b)$ (a ne samo u $C_2[a, b]$), a pošto je taj skup prebrojiv, posmatrani prostor je separabilan.

U funkcionalnoj analizi se dokazuje takođe da je *prostor* $L_2(a, b)$ kompletan**. Na ovom mestu ne možemo navoditi dokaz ove tvrdnje. Napomenimo samo da granična vrednost niza funkcija (8.30), koji je bio posmatran da bi se pokazalo da $C_2[-1, 1]$ nije kompletan prostor, je funkcija koja pripada prostoru $L_2(-1, 1)$, jer je kvadrat njenog modula integrabilan. Ovo je vrlo lako proveriti.

Pošto je prostor ma kakvih funkcija sigurno beskonačno dimenzioni, takav će biti i $L_2(a, b)$. Ovaj poslednji prostor je uz to kompletan i separabilan, tj. $L_2(a, b)$ *je Hilbertov prostor*.

Ortonormirane baze u prostoru L_2. Na osnovu gore iznetog, prostor $L_2(a, b)$ je separabilan, ma kakav da je interval (a, b) na kome su njegovi elementi definisani. Pošto se svaki konačni ili polubeskonačni interval može jednostavnom smenom nezavisno promenljive preslikati na $(-1, 1)$ i $(0, +\infty)$

---

* Dokaz ovog tvrđenja, koje zapravo važi u ma kom prostoru $L_p(a, b)$, može se naći, na primer, u knjizi navedenoj u spisku literature pod rednim brojem 1, str. 187.

** I ovaj stav zapravo važi u ma kom prostoru $L_p(a, b)$, kao što se može videti u knjizi navedenoj u spisku literature pod rednim brojem 1, str. 190.

respektivno, dovoljno je da razmotrimo pitanje nalaženja ortonormiranih baza u prostorima $L_2(-1, 1)$, $L_2(0, +\infty)$ i $L_2(-\infty, +\infty)$.

Istakli smo da je skup neprekidnih funkcija svuda gust u L_2, tako da se možemo ograničiti na nalaženje ortonormirne baze u ovom skupu. Kada je interval (a, b) konačan, onda linearno nezavisne funkcije $1, t, t^2, t^3, \ldots$ čine jednu bazu (ali ne ortonormiranu), pošto se svaka neprekidna funkcija može prikazati svojim McLaurin-ovim redom. Ako se na taj niz funkcija primeni *Schmidt-ov postupak ortogonalizacije* (9.32), koji se neposredno generališe na beskonačno dimenzioni slučaj, dobija se, za interval $(-1, 1)$, ortonormirani niz *Legendre-ovih polinoma*, koji se mogu izraziti zajedničkom formulom:

$$P_n(t) = \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n, \quad (n=0, 1, 2, \ldots) \tag{9.66}$$

i koji čine jednu ortonormiranu bazu u $L_2(-1, 1)$. Ovaj rezultat se dobija kao specijalan slučaj jedne opšte teoreme funkcionalne analize, koju ovde navodimo bez dokaza. *Ako je funkcija $f(t) \in L_2(a, b)$, različita od nule i zadovoljava uslov $|f(t)| < Ce^{-\delta|t|}$, gde su C i δ dve pozitivne konstante, onda je skup funkcija $t^n f(t)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ potpun u $L_2(a, b)$**. Daljom ortogonalizacijom se iz ovog skupa može dobiti jedna ortonormirana baza. Pri dobijanju Legendre-ovih polinoma je bilo uzeto $f(t) = 1$.

Gornja teorema važi i u slučaju kada je interval (a, b) polubeskonačan ili beskonačan. U prvom slučaju se može uzeti $f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}$. Ortogonalizacijom niza funkcija $e^{-\frac{t}{2}}, te^{-\frac{t}{2}}, t^2e^{-\frac{t}{2}}, t^3e^{-\frac{t}{2}}, \ldots$ u intervalu $(0, +\infty)$ rezultira niz tzv. ***Laguerre-ovih funkcija***

$$\psi_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!}e^{\frac{t}{2}}\frac{d^n}{dt^n}(t^n - e^{-t}), \; (n=0, 1, 2, \ldots) \tag{9.67}$$

koji predstavlja jednu ortonormiranu bazu u $L_2(0, +\infty)$. U prostoru $L_2(-\infty, +\infty)$ možemo uzeti $f(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$, i ortogonalizacijom tako dobijenog niza funkcija $e^{-\frac{1}{2}t^2}, te^{-\frac{1}{2}t^2}, t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}, t^3e^{-\frac{1}{2}t^2}, \ldots$ doći do niza tzv. ***Hermite-ovih funkcija***

$$\varphi_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}), \; (n=0, 1, 2, \ldots) \tag{9.68}$$

koje se mogu uzeti za jednu ortonormiranu bazu u $L_2(-\infty, +\infty)$.

Hilbertov prostor $\tilde{L}_2(a, b)$. Ovaj prostor obrazuju sve ***periodične*** funkcije zadane u neograničenom intervalu (a, b) i koje se izvan tog intervala periodički ponavljaju. Ostale relevantne osobine elemenata ovog prostora su istovetne sa onima u prostoru $L_2(a, b)$, tj. integral $(L)\int_a^b |x(t)|^2\, dt$ ne sme divergirati, skalarni proizvod je definisan na isti način, jednačinom (9.64), itd. Ovaj prostor je kompletan i separabilan, pošto ima istu metriku kao i $L_2(a, b)$.

* Dokaz ovog stava se može naći, na primer, u knjizi navedenoj pod rednim brojem 28. u spisku literature., str. 404

Skup trigonometrijskih polinoma sa racionalnim koeficijentima je svuda gust u njemu. Razmatranja vezana za prostor periodičnih funkcija $\tilde{L}_2(a, b)$ obično se izvode sa specijalnim prostorom $\tilde{L}_2(-\pi, \pi)$, pošto se svaki drugi konačni interval može preslikati na interval $(-\pi, \pi)$ jednostavnom smenom nezavisno promenljive.

Za elemente ortonormirane baze u $\tilde{L}_2(-\pi, \pi)$ uzimamo:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \; \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \; \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \; \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \; \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{9.69}$$

Ove funkcije su dobro poznate iz teorije Fourier-ovih redova, koji su istorijski bili prvi primer Fourier-ovog razvoja (9.41) po elementima jednog beskonačnog potpunog ortonormiranog sistema.

Osnovne osobine Lebesgue-ovog integrala. Analiza razlika između integrala u Riemann-ovom i u Lebesgue-ovom smislu izlazi iz okvira ove knjige. Na ovo pitanje se možemo osvrnuti samo sa nekoliko reči, upućujući čitaoca koji želi podrobnije informacije na matematičku literaturu*. Pri definisanju integrala u Riemann-ovom smislu polazi se od proizvoljne podele oblasti integriranja na podintervale, i egzistencija integrala je bila obezbeđena u onim slučajevima kada je proizvoljnost u izboru tačaka u svakom podintegralu „malo" uticala na vrednost Darboux-ove sume. Ovakva situacija postoji, na primer, u slučaju kad „maloj" promeni argumenta odgovara „mala" promena vrednosti funkcije. Zahvaljujući ovome, svaka neprekidna funkcija (u zatvorenom, konačnom intervalu) integrabilna je u Riemann-ovom smislu. Može se, štaviše, reći da iako postoje i neke prekidne funkcije koje su integrabilne u Riemann-ovom smislu, Riemann-ova definicija integrala je formulisana sa prvenstvenom namerom da sve neprekidne funkcije budu integrabilne. U Lebesgue-ovoj definiciji integrala, kao polazna tačka služi ne deljenje oblasti nezavisno promenljive, već se *oblast vrednosti funkcije deli na podintervale*, pa se zatim svakom od ovih intervala pridruži skup intervala nezavisno promenljive koji mu pripada, i tek nakon ovog se formiraju sume analoge Darboux-ovim sumama u teoriji Riemann-ovog integrala. Ovim se postiže da se unutar ovako odabranih podintervala nezavisno promenljive vrednosti funkcije „malo" razlikuju, što obezbeđuje postojanje integrala za mnogo širu klasu prekidnih funkcija.

Navedimo, bez dokaza, nekoliko važnih svojstava Lebesgue-ovog integrala.

(1) *Funkcija $x(t)$ biće integrabilna u Lebesgue-ovom smislu samo ako je integrabilna funkcija $|x(t)|$.* Zbog ove osobine, na primer, funkcija $x(t) = \frac{\sin t}{t}$ u intervalu $(0, \infty)$ nema Lebesgue-ov integral, iako ima Rieman-ov integral. Naime, ako se napiše

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

(integral može biti i Lebesgue-ov i Riemann-ov), s desne strane se dobija jedan alternativni, uslovno konvergentni red, što nije prepreka za postojanje Riemann-ovog

* V. fusnotu na str. 165

integrala $\left((R)\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2}\right)$, ali isključuje postojanje Lebesgue-ovog. Skup svih funkcija integrabilnih u Lebesgue-ovom smislu, tj. takvih da integral $(L)\int\limits_a^b |x(t)|\,dt$ ne divergira obično se označava kao *prostor* $L_1(a, b)$.

(2) *Dve funkcije,* $x_1(t)$ *i* $x_2(t)$, *čije se vrednosti međusobno razlikuju samo u najviše prebrojivo mnogo tačaka imaju jednake Lebesgue-ove integrale.* Za funkcije sa ovom osobinom kaže se da su jednake *skoro svuda**. Na primer, tzv. *Dirichlet-ova funkcija* $D(t)$ definisana u intervalu $[0, 1]$ na sledeći način:

$$D(t) = \begin{cases} 1, & \text{za } t \text{ racionalno}, \\ 0, & \text{za } t \text{ iracionalno}. \end{cases} \tag{9.70}$$

je skoro svuda jednaka funkciji $f(t) = 0$ (skup racionalnih brojeva u navedenom intervalu je prebrojiv), pa na osnovu gornje osobine ima Lebesgue-ov integral, $(L)\int\limits_0^1 D(t)\,dt = 0$. Međutim, ova funkcija nije integrabilna u Riemann-ovom smislu, jer ma kako delili intervalu $[0, 1]$ na podintervale, uvek je u svakom podintervalu najveća vrednost funkcije jednaka 1, a najmanja je jednaka nuli, tako da gornja i donja Darboux-ova suma ne teže istoj granici.

(3) *Ako je funkcija integrabilna u konačnom intervalu* $[a, b]$ *u Riemann-ovom smislu, ona je integrabilna u istom intervalu i u Lebesgue-ovom smislu, i oba integrala se poklapaju.* Ovu osobinu smo već naveli, jednačina (9.56). Malo pre razmotreni primer Dirichlet-ove funkcije (9.70) pokazuje da obrnuto tvrđenje ne važi. Primer uz stav (1) pokazuje, uz to, da se stav (3) ne može generalisati na beskonačne intervale.

(4) *Za Lebesgue-ov integral važe relacije:*

$$(L)\int\limits_a^b \alpha x(t)\,dt = \alpha\left[(L)\int\limits_a^b x(t)\right], \tag{9.71}$$

$$(L)\int\limits_a^b [x(t) + y(t)]\,dt = (L)\int\limits_a^b x(t)\,dt + (L)\int\limits_a^b y(t)\,dt, \tag{9.72}$$

$$(L)\int\limits_a^b x(t)\,dt = (L)\int\limits_a^c x(t)\,dt + (L)\int\limits_c^b x(t)\,dt. \tag{9.73}$$

Ove relacije su potpuno identične sa odgovarajućim osobinama Riemann-ovog integrala. One imaju smisla, razume se, jedino ako svi izrazi koji se u njima pojavljuju postoje.

(5) *Da bi važila jednakost*

$$\lim_{n\to\infty} (L)\int\limits_a^b x_n(t)\,dt = (L)\int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} x_n(t)\,dt, \tag{9.74}$$

* U matematici se pojam skoro svuda jednakih funkcija definiše nešto šire, i gornja definicija je specijalan, ali u praksi najčešći slučaj.

niz funkcija $x_n(t)$ *mora zadovoljavati uslov* $|x_n(t)| < y(t)$, *gde je* $y(t) \in L_1(a, b)$. Ovaj uslov će, specijalno, biti zadovoljen, ako su funkcije $x_n(t)$ ograničene.

Iznete osobine su dovoljne za računanje sa Lebesgue-ovim integralima u svim primenama. Napomenimo još jednom da se oznake (R) i (L), koje smo mi ovde koristili iz metodskih razloga, u literaturi obično ne stavljaju.

ZADACI

9.1. Ako je y jedan fiksiran element nekog ermitskog prostora, skalarni proizvod (x, y) je neprekidna funkcija od x, tj. važi relacija $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y) = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n, y)$. Dokazati.

9.2. Ma za koja dva elementa x, y ermitskog prostora važi tzv. *relacija paralelograma*

$$\|x \oplus y\|^2 + \|x \ominus y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Dokazati.

9.3. Normirani prostor u kome važi relacija paralelograma iz prethodnog zadatka može se pretvoriti u ermitski, jer funkcija

$$[x, y] = \left\|\frac{x \oplus y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x \ominus y}{2}\right\|^2 - i\left\|\frac{x \oplus iy}{2}\right\|^2 + i\left\|\frac{x \ominus iy}{2}\right\|^2$$

ima sve osobine skalarnog proizvoda. Proveriti. Ako je posmatrani prostor već ermitski, kakva veza postoji između $[x, y]$ i (x, y)?

9.4. Neka je Γ kvadratna matrica n-tog reda sa realnim elementima γ_{ij} i neka je za njih zadovoljen uslov *pozitivne definitnosti* (tj. neka je $\sum\limits_{i,j=1}^n \gamma_{ij}\xi_i\xi_j > 0$, ma za kakve realne brojeve $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$). Pokazati da se onda relacijom:

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij}\xi_i\eta_j$$

može uvesti jedan skalarni proizvod u realnom n-dimenzionom prostoru $R_n^{(2)} \ni x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

9.5. Pod kojim uslovima će

$$(x, y) = (L)\int\limits_a^b \gamma(t)\overline{x(t)}\,y(t)\,dt$$

biti jedan skalarni proizvod u $L_2(a, b)$?

9.6. Skup $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ elemenata ermitskog prostora biće linearno nezavisan, ako je determinanta sastavljena od skalarnih proizvoda (x_i, x_j) različita od nule (tzv. *Gramm-ova determinanta*). Dokazati.

9.7. U prostoru matrica tipa $p \times q$ se skalarni proizvod može definisati relacijom

$$(x, y) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \bar{\xi}_{ij}\eta_{ij}.$$

Proveriti da su zaista zadovoljeni aksiomi skalarnog množenja.

9.8. Ako je u prostoru matrica tipa 2×4 skalarni proizvod definisan prema prethodnom zadatku, odrediti koeficijent α tako da matrice

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad m_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ \alpha & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) budu ortogonalne, (b) rastojanje među njima buda minimalno, (c) njihove norme budu jednake.

9.9. Da li se u prostoru matrica tipa 2×2 mogu uzeti za elemente jedne algebarske baze sledeće četiri matrice:

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad m_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad m_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad m_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

U potvrdnom slučaju, Schmidt-ovim postupkom ortogonalizacije naći ortonormiranu bazu $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \mathscr{M}_3, \mathscr{M}_4$, ekvivalentnu datim matricama u smislu skalarnog proizvoda iz zadatka 9.7.

9.10. Ako se u prethodnom zadatku za algebarsku bazu uzmu matrice $m_1' = m_3, m_2' = m_4, m_3' = m_1, m_4' = m_2$, dobiće se Schmidt-ovim postupkom ortogonalizacije neka druga ortonormirana baza $\mathscr{M}_1', \mathscr{M}_2', \mathscr{M}_3', \mathscr{M}_4'$. Naći ove matrice i izraziti ih kao linearne kombinacije matrica $\mathscr{M}_i$ iz prethodnog zadatka. Ako stavimo $\mathscr{M}_i' = \sum_{j=1}^{4} \alpha_{ij} \mathscr{M}_j$, šta se može reći o matrici tipa 4×4 čiji su koeficijenti α_{ij}?

9.11. Proveriti da se u prostoru $L_2(-1, 1)$ polazeći od funkcija $1, t, t^2, t^3, \ldots$ Schmidt-ovim postupkom ortogonalizacije zaista dobija niz Legendre-ovih polinoma (9.66).

9.12. Napisati konkretan oblik Schwarz-ove i Minkowski-jeve nejednačine (9.8) i (9.9) za prostore $E_R^{(2)}$, l_2 i $L_2(a, b)$.

9.13. Napisati konkretan oblik Bessel-ove i Parseval-ove jednačine (9.53) i (9.54) u prostorima $L_2(-1, 1)$, $L_2(0, +\infty)$ i $L_2(-\infty, +\infty)$, uzimajući za elemente baza funkcije (9.66), (9.67) i (9.68) respektivno.

9.14. Napisati Fourier-ov razvoj funkcije $x(t) = e^{-t} \in L_2(0, +\infty)$ po Laguerre-ovim funkcijama (9.67).

9.15. Legendre-ovi polinomi sa parnim indeksom $P_{2n}(t)$ predstavljaju jedan ortonormirani sistem, ali *ne potpun*. Naći Fourier-ove koeficijente funkcije $x(t) = e^{-t} \in L_2(-1, 1)$ u odnosu na ovaj ortonormirani sistem i funkciju kojoj konvergira odgovarajući Fourier-ov razvoj.

10. LINEARNI OPERATORI

10.1. POJAM OPERATORA

Skup operacija pomoću kojih se elementima nekog prostora jednoznačno pridružuju elementi *istog* prostora definiše jedan *operator*. Simbolički se to označava relacijom

$$y = Ax, \tag{10.1}$$

u kojoj je sa A označen operator, tj. skup operacija pomoću kojih je elementu $x \in X$ (tzv. *objekt operatora*) pridružen element $y \in X$ (tzv. *lik objekta operatora*). U literaturi se operatori često označavaju i simbolom $\hat{A}$ ili grčkim slovima. Neki autori pojem operatora podrazumevaju nešto uže, ograničavajući se samo na slučaj kad je X linearni vektorski prostor.

Naglasimo da će se, u okviru razmatranja koja slede, operator shvatiti uvek kao postupak pridruživanja elemenata koji pripadaju istom prostoru. Za operacije pomoću kojih se elementima prostora X, pridružuju elementi prostora Y koristićemo u opštem slučaju termin *preslikavanje*. Operator je, dakle, specijalan slučaj preslikavanja kad je $X = Y$. Na primer, u prostoru neprekidnih funkcija $C[0, 1]$ relacija $y(t) = \int_0^1 e^{-t^2 s^2} x(s)\, ds$ definiše jedan operator [funkciji $x(t)$ pridružuje funkciju, $y(t)$], dok relacija $y = \int_0^1 e^{-t} x(t)\, dt$ definiše jedno opštije preslikavanje [funkciji $x(t)$ pridružuje skalar y]. Napomenimo da ova terminologija nije svuda u literaturi prihvaćena i da se, posebno u matematičkim monografijama, ponekad jedan ili drugi termin koristi u oba smisla. *U centru pažnje će biti operatori u unitarnim i Hilbertovim prostorima, mada bi izvesni pojmovi i odnosi o kojima će biti reči mogli biti primenjeni i u prostorima jednostavnije strukture.* Čitalac će u svakom konkretnom slučaju lako ustanoviti da li je važenje posmatranog stava ograničeno na prostore sa uvedenom operacijom skalarnog množenja i kompletne u odnosu na metriku koja iz tog skalarnog proizvoda proizilazi, ili ne.

Skup svih elemenata x za koje izraz Ax ima smisla (tj. sa kojima se može izvesti skup operacija koji predstavlja operator A) predstavlja *domen operatora* A (preciznija, *domen objekata operatora*). Skup svih elemenata y koji se dobijaju kao rezultat primene operatora A zvaćemo *domen likova* (kraće, *antidomen*). Slično se definišu i analogi pojmovi kod preslikavanja. Pri primenama u teorijskoj fizici, najčešće se sreće slučaj kad je domen operatora svuda gust.

Definicija i primeri. Neka su x i y elementi nekog unitarnog ili Hilbert-ovog prostora H. Operator A biće po definiciji *linearan*, ukoliko: 1. njegov domen predstavlja jedan lineal, i 2. svakoj linearnoj kombinaciji objekata korespondira linearnu kombinaciju likova sa istim skalarnim koeficijentima, tj. ako za svako x i y iz njegovog domena važi relacija:

$$A(\alpha x \oplus \beta y) = \alpha Ax \oplus \beta Ay. \tag{10.2}$$

Najveći broj operatora od interesa u Teorijskoj fizici su linearni. Navedimo nekoliko primera.

(1) *Nulti operator O* je operator koji svakom elementu $x \in H$ korespondira nulti elementi θ:

$$Ox = \theta. \tag{10.3}$$

Ovaj operator je očevidno linearan i njegov domen je ceo posmatrani prostor H.

(2) *Jedinični (identični) operator I* ima osobinu da svakom elementu $x \in H$ korespondira taj isti element,

$$Ix = x. \tag{10.4}$$

I kod ovog operatora linearnost je očevidna, a domen mu je ceo prostor H.

(3) *Operator sličnosti*, koji svakom elementu $x \in H$ korespondira element αx, gde je α konstantan (realan ili kompleksan) skalar

$$Ax = \alpha x, \tag{10.5}$$

takođe je očevidno linearan i ima ceo prostor H za svoj domen.

(4) *Operator normalnog oblika*. Ako je $\{x_\nu\}$ jedna ortonormirana baza u H (konačna u slučaju unitarnog prostora, i beskonačna ali prebrojiva u slučaju Hilbertovog), svaki element prostora se može prikazati u obliku

$$x = \circ\sum_{\nu=1}^{k} (x_\nu, x)\, x_\nu \quad \text{odnosno} \quad x = \circ\sum_{\nu=1}^{\infty} (x_\nu, x)\, x_\nu,$$

u skladu sa jednačinama (9.25) i (9.52). Neka je $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ niz (realnih ili kompleksnih brojeva.) Relacijom

$$Ax = \circ\sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu (x_\nu, x)\, x_\nu \quad \text{odnosno} \quad Ax = \circ\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (x_\nu, x)\, x_\nu \tag{10.6}$$

definisan je jedan operator. U slučaju Hilbertovog (beskonačno dimenzionog) prostora, niz $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ mora još biti *ograničen*, da bi Ax pripadao istom prostoru. Naime, ako za svako ν važi $|\lambda_\nu| < M$, gde je M pozitivna konstanta, za normu elementa Ax dobijamo:

$$\|Ax\|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_\nu (x_\nu, x)|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_\nu|^2 \, |(x_\nu, x)|^2 < M^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} |(x_\nu, x)|^2 = M^2 \|x\|^2 < +\infty,$$

ako uzmemo u obzir Bessel-ovu jednačinu (9.53). Prema tome, niz $\circ\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (x_\nu, x)\, x_\nu$ je zaista konvergentan, te Ax pripada Hilbertovom prostoru.

Nakon ovih nekoliko primera nezavisnih od tipa prostora, evo i nekoliko operatora definisanih u skladu sa unitarnim ili Hilbertovim prostorom u kome deluju.

(5) *Klasični tenzori* su, kako se vidi iz osnovne formule (4.7), operatori u prostoru klasičnih vektora. Iz iste formule se vidi da su to linearni operatori. Štaviše, mnogi pojmovi vezani za operatore u ma kom prostoru uvedeni su po analogiji sa klasičnim tenzorima, kao što će biti jasno iz daljeg izlaganja,

(6) *Kvadratna matrica n-tog reda*. Svaka takva matrica je multiplikativni operator u prostoru matrica tipa $n \times p$, pošto je proizvod jedne fiksne matrice tipa $n \times n$ i matrica tipa $n \times p$ uvek ponovo matrica tipa $n \times p$. I ovde je linearnost očevidna.

(7) *Operator diferenciranja* $\dfrac{d}{dt}$, je očevidno linearni operator u $L_2(a, b)$, jer je na osnovu poznatih pravila diferenciranja

$$\frac{d}{dt}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha \frac{dx_1}{dt} + \beta \frac{dx_2}{dt}.$$

Domen ovog operatora nije ceo prostor $L_2(a, b)$, već samo skup onih diferencijabilnih funkcija čiji prvi izvod takođe pripada prostoru $L_2(a, b)$, jer inače to ne bi bio operator. (Podsetimo se da je klasa diferencijabilnih funkcija još uža od klase neprekidnih).

(8) *Multiplikativni operator u funkcionalnom prostoru*. Ako je $\Phi(t)$ fiksna funkcija, relacijom

$$y(t) = Ax(t) = \Phi(t)\, x(t) \tag{10.7}$$

je takođe definisan jedan operator. Ako je $x(t) \in L_2$ (tj. posmatrani operator A deluje u prostoru L_2), funkcija $\Phi(t)$ mora biti ograničena da bi i $y(t)$ pripadalo istom prostoru.

(9) *Fredholm-ov integralni operator*. Ako je $x(t) \in L_2(a, b)$, relacijom

$$y(t) = Ax(t) = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds \tag{10.8}$$

definisan je jedan integralni operator, sa očevidno zadovoljenim osobinama linearnosti (10.2). Funkcija $K(t, s)$ se zove *jezgro* posmatranog integralnog operatora. Da bi za svako $x(t) \in L_2(a, b)$ bilo i $y(t) \in L_2(a, b)$ jezgro mora zadovoljavati uslov

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2\, dt\, ds < +\infty, \tag{10.9}$$

koji se detaljnije obrazlaže u literaturi iz Funkcionalne analize*,

Algebra linearnih operatora. Algebarske operacije sa linearnim operatorima u Hilbertovim (ili unitarnim) prostorima definišu se po analogiji sa već ranije proučenim operacijama u prostoru klasičnih tenzora (Glava 4), tako da će biti moguće izostaviti dokaze mnogih stavova.

Dva linearna operatora će po definiciji biti *jednaki*, ako im se poklapaju domeni i ako za svaki element x iz tog domena važi

$$Ax = Bx \Leftrightarrow A = B. \tag{10.10}$$

---

* V. npr. knjigu citiranu u spisku literature pod rednim brojem 1, str. 213 (primer 5), ili knjigu pod rednim brojem 32, str. 204.

Zbir dva linearna operatora A i B obeležavaćemo sa $A \hat{+} B$ i definisaćemo ga kao linearni operator C takav da je

$$Cx = (A \hat{+} B)\, x = Ax \oplus Bx \Leftrightarrow C = A \hat{+} B, \tag{10.11}$$

za svaki element za koje izrazi Ax i Bx imaju smisla, tj. za svako x iz preseka domena operatora A i B. U odnosu na ovako definisano sabiranje linearni operatori sa istim domenom objekata *obrazuju komutativnu grupu*, kao što sledi iz osobina operacije sabiranja u prostoru H pri čemu je neutralni element suženje nultog operatora na taj zajednički domen. U to se možemo uveriti iz sledećih očevidnih jednakosti:

$$[(A \hat{+} B) \hat{+} C]\, x = (A \hat{+} B)\, x \oplus Cx = (Ax \oplus Bx) \oplus Cx =$$
$$= Ax \oplus (Bx \oplus Cx) = Ax \oplus (B \hat{+} C)\, x = [A \hat{+} (B \hat{+} C)]\, x;$$
$$(A \hat{+} B)\, x = Ax \oplus Bx = Bx \oplus Ax = (B \hat{+} A)\, x,$$
$$Ax = Ax \oplus \theta = Ax \oplus 0x = (A \hat{+} 0)\, x;$$

pri pisanju ovih jednakosti uzeta je u obzir asocijativnost (8.1) i komutativnost (8.2) sabiranja u H, kao i relacije (10.3) i (8.3). Na osnovu uslova jednakosti dva linearna operatora (10.10), iz napisanih relacija proizilazi:

$$(A \hat{+} B) \hat{+} C = A \hat{+} (B \hat{+} C), \tag{10.12}$$

$$A \hat{+} B = B \hat{+} A, \tag{10.13}$$

$$A \hat{+} 0 = A, \tag{10.14}$$

tj. da je sabiranje operatora (10.11) zaista asocijativno, komutativno i da je suženje nultog operatora (10.3) na domen objekata posmatranih operatora neutralni element tog sabiranja. Najzad, svakom operatoru A možemo pridružiti *suprotni operator* sa istim domenom:

$$(-A)\, x = (-Ax) = A\,(-x). \tag{10.15}$$

Zaista, sa gornjom definicijom izlazi:

$$[A \hat{+} (-A)]\, x = Ax \oplus (-A)\, x = Ax \oplus (-Ax) = \theta = 0\, x,$$

gde je $\underline{O}$ ponovo suženje nultog operatora na domen posmatranih operatora. Prema tome:

$$A \hat{+} (-A) = A \hat{-} A = O, \tag{10.16}$$

čime je istovremeno objašnjen i smisao znaka $\hat{-}$. Ovim su dokazane sve osobine komutativne grupe. Napomenimo, na kraju, da simboli $\hat{+}$ i $\hat{-}$ koje smo ovde koristili nisu opšteprihvaćeni. Mnogi autori koriste prosto oznake + i — za označavanje posmatranih operacija.

Proizvod skalara i linearnog operatora definisaćemo kao linearni operator sa osobinom:

$$(\alpha A)\, x = \alpha\,(Ax), \tag{10.17}$$

pri čemu su domeni operatora αA i A jednaki, izuzev u slučaju $\alpha = 0$, kad se dobija nulti operator koji se može primeniti na ceo prostor. Ovako definisano *množenje operatora skalarom ima očevidno osobine* (8.5) – (8.8) *koje ta operacija mora imati u linearnom vektorskom prostoru*. Da bismo se u to uverili, posmatrajmo sledeći niz jednakosti, u kojima je x bilo koji element iz domena objekata operatora A i B:

$$[\alpha(\beta A)]\, x = \alpha[(\beta A)\, x] = \alpha[\beta(Ax)] = (\alpha\beta)(Ax) = [(\alpha\beta) A]\, x;$$

$$[\alpha(A \hat{+} B)]\, x = \alpha[(A \hat{+} B)\, x] = \alpha(Ax \oplus Bx) =$$
$$= \alpha Ax \oplus \alpha Bx = (\alpha A)\, x \oplus (\alpha B)\, x =$$
$$= (\alpha A \hat{+} \alpha B)\, x;$$
$$[(\alpha + \beta) A]\, x = (\alpha + \beta)(Ax) = \alpha(Ax) \oplus \beta(Ax) =$$
$$= (\alpha A)\, x \oplus (\beta A)\, x = (\alpha A \hat{+} \beta A)\, x;$$
$$(1A)\, x = 1\,(Ax) = Ax.$$

Na osnovu uslova jednakosti dva operatora (10.10), odavde izlazi

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A, \tag{10.18}$$

$$\alpha(A \hat{+} B) = \alpha A \hat{+} \alpha B, \tag{10.19}$$

$$(\alpha + \beta) A = \alpha A \hat{+} \beta A, \tag{10.20}$$

$$1A = A, \tag{10.21}$$

čime je tvrđenje dokazano. Imajući u vidu relacije (10.12) – (10.16) i (10.18) – (10.21) zaključujemo da *linearni operatori istog domena objekata sa sabiranjem definisanim jednačinom* (10.11) *i množenjem skalarom definisanim jednačinom* (10.17) *obrazuju jedan linearni vektorski prostor*.

Prostor linearnih operatora se može snabdeti još bogatijom algebarskom strukturom, uvođenjem *proizvoda operatora*. On se definiše na isti način kao i kod klasičnih tenzora [v. jednačinu (4.34)]:

$$(AB)\, x = A\,(Bx). \tag{10.22}$$

Lako je videti da su AB i BA linearni operatori, ako su to A i B. Zaista,

$$(AB)\,(\alpha x \oplus \beta y) = A\,[B\,(\alpha x \oplus \beta y)] = A\,[\alpha(Bx) \oplus \beta(By)] =$$
$$= \alpha A\,(Bx) \oplus \beta A\,(By) = \alpha\,(AB)\, x \oplus \beta\,(AB)\, y;$$

i slično za BA. Kao i kod množenja tenzora, operacija (10.22) je *asocijativna ali nije komutativna*. Za mnoge primene je od interesa uvesti *komutator* $[A, B] = AB \hat{-} BA$ i *antikomutator* $\{A, B\} = AB \hat{+} BA$ dva posmatrana linearna operatora A i B. *Jedinični operator* (10.4) *komutira sa svakim operatorom*, kao što se vidi iz

$$(AI)\, x = A\,(Ix) = Ax; \qquad (IA)\, x = I\,(Ax) = Ax,$$

tako da, po analogiji sa jednačinom (4.39) kod klasičnih tenzora, za operatore uopšte imamo:

$$AI = IA = A. \tag{10.23}$$

Jedinični operator je, dakle, neutralni element za operaciju množenja operatora.

Dati linearni operator A imaće *inverzni operator* A^{-1}, čiji se domen objekata poklapa sa domenom likova operatora A ako su jednačine:

$$y = Ax \Leftrightarrow x = A^{-1}y \tag{10.24}$$

ekvivalentne za svako x iz domena operatora A. Operatori koji nemaju inverzni operator zovu se *singularni*. *Ako je A nesingularan linearan operator, onda je i A^{-1} linearan operator*. To sledi iz činjenice da relacije $y_1 = Ax_1$ i $y_2 = Ax_2$ imaju, zbog linearnosti operatora A, kao posledicu $\alpha_1 y_1 \oplus \alpha_2 y_2 = A(\alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2)$. Kako je A nesingularan operator, iz ove poslednje jednakosti izlazi takođe i $\alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 \oplus \alpha_2 y_2)$. S druge strane, polazne jednačine se mogu na osnovu (10.24) napisati i kao $x_1 = A^{-1}y_1$, $x_2 = A^{-1}y_2$ tako da se odatle nalazi $\alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1} y_1 \oplus \alpha_2 A^{-1} y_2$. Upoređivanjem dobijenih relacija izlazi $A^{-1}(\alpha_1 y_1 \oplus \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 \oplus \alpha_2 A^{-1} y_2$, što dokazuje linearnost operatora A^{-1}.

Lako je pokazati da kod nesingularnih operatora važe sledeći odnosi:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I, \tag{10.25}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A, \tag{10.26}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \tag{10.27}$$

u potpunoj analogiji sa jednačinama (4.42), (4.44) i (4.45). Ovde je I suženje identičnog operatora na presek domena objekata operatora A i A^{-1}. Dokažimo radi ilustracije, važenje (10.27), pošto su prve dve relacije skoro trivijalne posledice definicije (10.24). Neka je $z = (AB)x$, što ima za posledicu $x = (AB)^{-1}z$. S druge strane, množenjem relacije $z = (AB)x$ operatorom A^{-1} dobijamo $A^{-1}z = A^{-1}(AB)x$, pa ako sad pomnožimo i sa B^{-1} izlazi dalje $B^{-1}(A^{-1}z) = B^{-1}[A^{-1}(AB)x]$. Na osnovu asocijativnosti množenja operatora, zadnju relaciju možemo pisati i kao $(B^{-1}A^{-1})z = [B^{-1}(A^{-1}A)B]x$ odnosno, uzimajući u obzir (10.25), $(B^{-1}A^{-1})z = B^{-1}Bx = Ix = x$. Upoređivanjem tako dobijenih jednačina $x = (AB)^{-1}z$ i $x = (B^{-1}A^{-1})z$ dobijamo $(AB)^{-1}z = (B^{-1}A^{-1})z$, a odatle, na osnovu (10.10), izlazi (10.27).

Neprekidnost i ograničenost linearnih operatora. Neka je A linearni operator u datom unitarnom ili Hilbertovom prostoru. On će, po definiciji, biti *neprekidan* u smislu metrike (9.11) generirane skalarnim proizvodom, ako konvergentnom nizu elemenata $x_n \to x_0$ korespondira isto tako konvergentan niz elemenata $Ax_n \to Ax_0$. Drugim rečima, za svaki neprekidan linearni operator u unitarnom ili Hilbertovom prostoru važi uslov:

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = A \lim_{n\to\infty} x_n, \tag{10.28}$$

ma kakav bio konvergentan niz elemenata $x_n \in H$.

Linearni operator A će, po definiciji, biti *ograničen* ako postoji pozitivan broj M, takav da relacija

$$\| Ax \| < M \| x \| \tag{10.29}$$

važi za svako $x \in D_A$ (D_A je domen objekata operatora A), pri čemu je norm elemenata definisana relacijom (9.10) u skladu sa skalarnim proizvodom uvedenim u posmatranom prostoru. Infimum svih brojeva M za koje važi (10.2 se zove *norma operatora* A i označava se sa $\| A \|$. Dakle, umesto (10.2 možemo pisati

$$\| Ax \| \leq \| A \| \, \| x \|, \tag{10.3}$$

čime je podvučena analogija sa Schwarz-ovom nejednačinom (9.8). Odavde može pokazati da za normu operatora imamo

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \quad \text{ili} \quad \|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \tag{10.3}$$

pri čemu je značenje simbola *sup* objašnjeno u komentaru jednačine (8.25 Dokazivanje navedenih formula za $\| A \|$ je jednostavno. Naime, iz uslova (10.3 izlazi $\| A \| > \frac{\| Ax \|}{\| x \|}$ što se može napisati i kao $\| A \| = \sup_{x \subset X} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}$. Uzmemo li s u obzir homogenost norme elemenata prostora X i linearnost operatora imaćemo dalje $\| A \| = \sup_{x \in X} \left\| \frac{1}{\| x \|} Ax \right\| = \sup_{x \in X} \left\| A \frac{x}{\| x \|} \right\|$, odakle sledi prva od rel cija (10.31), ukoliko se još zapazi da element $\frac{x}{\| x \|}$ ima jediničnu normu. Sl no se dokazuje i druga od ovih relacija. Zaista, prema Schwarz-ovoj nejedn čini (9.8) i uslovu (10.30) imamo $|(Ax, x)| < \| Ax \| \, \| x \| < \| A \| \, \| x \|^2$,

$$\| A \| > \frac{|(Ax, x)|}{\| x \|^2}, \text{ tako da je } \| A \| = \sup_{x \in X} \frac{|(Ax, x)|}{\| x \|^2} = \sup_{x \in X} \left| \left(A \frac{x}{\| x \|}, \frac{x}{\| x \|} \right) \right|.$$

Poslednja jednakost sledi opet iz linearnosti operatora A i iz osobine asoc tivnosti skalarnog množenja, i poklapa se sa drugom od relacije (10.31)

Sledeći stavovi ilustruju vezu između osobine neprekidnosti i ograničen sti linearnih operatora.

Ograničeni linearni operator ograničenom skupu elemenata pridružuje tak ograničeni skup. To se vidi neposredno iz (10.30), ako se uoči da svi eleme nekog ograničenog skupa moraju imati normu manju od neke vrednosti γ ($\|x\| <$ što ima za posledicu da će i norme njima pridruženih elemenata Ax biti ma od neke vrednosti ($\| Ax \| < \gamma \| A \|$), tako da je Ax ograničen skup. Može pokazati da važi i obrnuto tvrđenje. *Svaki operator koji ograničenom skupa k ordinira ograničen skup je ograničen*. Formalan dokaz nećemo navoditi, upućuj zainteresovanog čitaoca na matematičku literaturu*.

Linearni operator je neprekidan tada i samo tada ako je ograničen. Zais ako je A ograničen linearni operator i $x_n \to x_0$ ma koji konvergentan niz e menata u H, imaćemo prema (10.30)

$$\| Ax_n \ominus Ax_0 \| = \| A(x_n \ominus x_0) \| < \| A \| \, \| x_n \ominus x_0 \|,$$

odakle, zbog $\| x_n \ominus x_0 \| \to 0$, sledi i $\| Ax_n \ominus Ax_0 \| \to 0$, tj. konvergencija niza A a samim tim i neprekidnost operatora A. Pretpostavimo sada da operator nije ograničen. Prema (10.31), on onda neće biti ograničen ni na jedinič sferi u H (tako nazivamo skup elemenata u H za koje je $\| x \| = 1$), što zn da će na jediničnoj sferi postojati neki niz elemenata $x_n \in H$, $\| x_n \| = 1$,

* V. npr, knjigu navedenu u spisku literature pod rednim brojem 1, str. 211 (stav

osobinom da njima pridruženi elementi nemaju ograničenu normu, $\|Ax_n\| > \delta_n \to \infty$. No, tada niz elemenata $y_n = \frac{x_n}{\delta_n}$ teži nultom elementu θ, dok $\|Ay_n\|$ ostaje veća od jedinice za svako n. Operator nije, dakle, neprekidan za $x = \theta$.

Radi ilustracije navedenih pojmova razmotrimo dva primera. Za operator sličnosti (10.5) nalazimo da ima konačnu normu, jer prva od relacija (10.31) daje

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha x\| \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \, \|x\| = |\alpha|.$$

To znači da je pomenuti operator ograničen, a samim tim i neprekidan. Kao drugi primer uzmimo operator diferenciranja $\frac{d}{dt}$ u prostoru $L_2(-1, 1)$. Taj operator nije ograničen, jer on, na primer, ograničen skup funkcija $x_n(t) = \sqrt{n + \frac{1}{2}}\, t^n$ (ma za koje n norma je jednaka jedinici, što je lako proveriti) prevodi u neograničeni skup, što se vidi iz:

$$\left\|\frac{d}{dt} x_n\right\| = \left\|n\sqrt{n+\frac{1}{2}}\, t^{n-1}\right\| = \left[n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{+1} t^{2n-2}\, dt\right]^{\frac{1}{2}} = n\sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}}$$

Nađeni skup brojeva uopšte nema supremum, jer se izborom dovoljno velikog broja n može postići da $\left\|\frac{d}{dt} x_n\right\|$ bude proizvoljno veliko. Pošto nije ograničen, operator $\frac{d}{dt}$ nije ni neprekidan.

U našim razmatranjima važnu ulogu će igrati pojam *potpuno neprekidnog* (ili *kompaktnog*) *operatora*. To je, po definiciji, linearan operator koji ima osobinu da svakom ograničenom nizu elemenata $x_n \in H$ ($\|x_n\| < \gamma$) korespondira niz Ax_n iz koga je moguće izvući jedan konvergentan podniz.

Na osnovu ove definicije zaključujemo da *potpuno neprekidni operator mora biti ograničen* (*pa, prema tome, i neprekidan*).

Neka je H unitaran (konačno dimenzioni ermitski) prostor. Ako je A ograničen (i neprekidan) linearni operator u tom prostoru, onda on ograničenom nizu elemenata x_n korespondira ograničen niz Ax_n. Pošto je unitaran prostor uvek kompaktan (svaki unitaran prostor je kongruentan sa kompaktnim prostorom $E_k^{(2)}$), iz ograničenog niza Ax_n će biti moguće izdvojiti konvergentan podniz, što znači da je operator A i potpuno neprekidan. Dakle, *u unitarnom prostoru su osobine neprekidnosti i potpune neprekidnosti istovetne*, jer je svaki neprekidan operator istovremeno i potpuno neprekidan.

Situacija je drukčija kod Hilbertovih prostora, jer oni nisu kompaktni, već samo kompletni i separabilni. Podsećamo da je u primeru (8.31) pokazano da prostor l_2 nije kompaktan, a prema (9.55) je svaki drugi Hilbertov prostor sa njim kongruentan i ima iste metričke osobine. Zbog odsustva kompaktnosti, *potpuno neprekidni operatori u Hilbertovim prostorima obrazuju klasu užu od klase neprekidnih operatora*.

Sledeći primeri koji se odnose na prostor l_2 pokazaće da u beskonačno dimenzionim ermitskim prostorima treba praviti razliku između neprekidnih (ograničenih) i potpuno neprekidnih operatora. Jedinični operator (10.4) je

sigurno neprekidan (njegova norma je očevidno jednaka jedinici, tj. on je ograničen). Međutim, taj operator nije potpuno neprekidan, jer on skupu elemenata (8.31) u l_2 pridružuje isti taj skup, a za njega je u Glavi 8. pokazano da nije kompaktan. Dakle, *jedinični operator u l_2 je neprekidan, ali ne i potpuno neprekidan*. S druge strane, ako sa $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ označimo ma koji element prostora l_2, onda će operator A definisan uslovom

$$Ax = (\xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \ldots, \frac{1}{n}\xi_n, \ldots)$$

biti *ne samo ograničen* (što je očevidno, zbog $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\xi_\nu|^2}{\nu^2} < \sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^2$, tj. $\|Ax\| < \|x\|$), *već i potpuno neprekidan*. Dokaz da je njegov domen likova kompaktan je u opštem slučaju dosta složen i ovde ćemo ga izostaviti, upućujući zainteresovanog čitaoca na specijalnu literaturu posvećenu pitanjima Funkcionalne analize*. Na ovom mestu ćemo samo istaći da posmatrani operator prevodi skup elemenata (8.31) u jedan konvergentan niz sa tačkom nagomilavanja $x = \theta$.

Svojstveni problem linearnog operatora. Po analogiji sa jednačinom (5.41) u prostoru klasičnih tenzora, definisaćemo *svojstveni problem* datog linearnog operatora A u unitarnom ili Hilbertovom prostoru kao problem nalaženja svih elemenata $x \in H$ različitih od nultog elementa 0 i svih skalara λ za koje jednačina

$$Ax = \lambda x \tag{10.32}$$

ima rešenja. Skalari λ se zovu *svojstvene vrednosti* linearnog operatora A. Elementi x koji su rešenja jednačine (10.32) zovu se *svojstveni elementi* posmatranog operatora (ponekad i *svojstveni vektori*, jer se elementi unitarnog i Hilbertovog prostora dosta često zovu vektori, zbog algebarske strukture linearnog vektorskog prostora). Naglasimo da je često potrebno imati na umu da sva formalno nađena rešenja jednačine (10.32) ne moraju obavezno pripadati posmatranom prostoru H. Stoga je potrebno naknadno razmotriti koja rešenja su elementi tog prostora, i ovo naknadno odabiranje se obično označava kao izdvajanje elemenata (recimo funkcija) koji se „dobro ponašaju". Na primer, ako u prostoru $\bar{L}_2(-\pi, \pi)$ posmatramo operator $A = -i\frac{d}{dt}$, jednačina (10.32) glasi $-i\frac{d}{dt}x(t) = \lambda x(t)$. To je obična diferencijalna jednačina prvog reda i ima rešenje $x_\lambda(t) = Ce^{i\lambda t}$, gde je C integraciona konstanta, za svaku realnu ili kompleksnu vrednost parmetra λ. Međutim, samo neke od nađenih funkcija $x_\lambda(t)$ pripadaju navedenom prostoru, i to, kako se lako vidi, one za koje je $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (jedino su to periodične funkcije sa periodom 2π), dok se sve ostale funkcije $x_\lambda(t)$ moraju odbaciti, jer uopšte nisu elementi prostora o kome je reč. Svojstvene vrednosti datog operatora nisu, dakle, ma kakvi realni

* V. npr. knjigu navedenu u spisku literature pod rednim brojem 28, str. 223 (primer 3).

ili kompleksni brojevi λ, već samo celi realni brojevi. Analogo rasuđivanje bi pokazalo da isti operator u prostoru $L_2(0,\infty)$ ima za svojstvene vrednosti sve moguće kompleksne brojeve sa $Jm\,\lambda>0$.

Slično kao i kod tenzora, ako je x_1 jedan svojstveni element koji pripada svojstvenoj vrednosti λ_1, onda će i αx_1 (α ma kakav skalar) takođe biti svojstveni element tog operatora koji pripada istoj svojstvenoj vrednosti. To je očevidna posledica linearnosti operatora A:

$$A x_1 = \lambda_1 x_1 \;\Rightarrow\; \alpha(A x_1) = \alpha(\lambda_1 x_1),$$

$$A(\alpha x_1) = \lambda_1(\alpha x_1).$$

Pri pisanju ovih jednakosti vodilo se računa o osobini (8.5). Stoga se u daljim razmatranjima možemo ograničiti na svojstvene elemente normirane na jedinicu $\|x_1\|=1$ (ovo odgovara uzimanju jediničnih vektora svojstvenih pravaca kod klasičnih tenzora.)

Uočena svojstvena vrednost operatora A biće *nedegenerisana* (*jednostruka*) ako joj pripada samo jedan svojstveni element jedinične norme, a *degenerisana* (*višestruka*) ako takvih elemenata ima više. Broj linearno nezavisnih svojstvenih elemenata jedinične norme koji pripadaju istoj svojstvenoj vrednosti određuje *multiplicitet* degeneracije. Neka je λ_1 jedna n-struko degenerisana svojstvena vrednost i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linearno nezavisni svojstveni elementi jedinične norme koji joj pripadaju, tj.

$$Ax_1=\lambda_1 x_1,\quad Ax_2=\lambda_1 x_2,\;\ldots,\quad Ax_n=\lambda_1 x_n.$$

Množenjem svake od ovih relacija skalarom α_i, i sabiranjem dobijamo:

$$A(\alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \cdots \oplus \alpha_n x_n) = \lambda_1(\alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \cdots \oplus \alpha_n x_n),$$

odakle se vidi da je u tom slučaju *ma koji element linela nad svojstvenim elementima koji pripadaju istoj svojstvenoj vrednosti takođe svojstveni element koji pripada toj svojstvenoj vrednosti.*

U teorijskoj fizici se skup svojstvenih vrednosti datog linearnog operatora zove *spektar svojstvenih vrednosti operatora*, *C* često kraće *spektar operatora*). Iz jednačine (10.32) neposredno vidimo da *ako λ pripada spektru operatora A onda operator $A'=A-\lambda I$ nema inverzni operator*. Da bismo se u to uverili, posmatrajmo jednu svojstvenu vrednost λ_1 datog operatora i njoj pripadajući svojstveni element $x_1 \neq \theta$, pa (10.32) napišimo u obliku $(A-\lambda_1 I)x_1=\theta$. Odatle izlazi, ako pretpostavimo da $A-\lambda_1 I$ ima inverzni operator,

$$x_1=(A-\lambda_1 I)^{-1}\theta. \tag{10.33}$$

Međutim, ako linearni operator ima inverzni operator, onda je i ovaj takođe linearan, kao što je dokazano u komentaru jednačine (10.24). S druge strane, ma za koji linearni operator mora važiti $B\theta=\theta$, jer se može pisati

$$B\theta = B(x\ominus x) = Bx \ominus Bx.$$

Stoga jednačina (10.33) daje $x_1=\theta$, u suprotnosti sa pretpostavkom da je $x_1\neq\theta$. Dakle, inverzni operator $(A-\lambda_1 I)^{-1}$ ne postoji, ako je λ_1 svojstvena vrednost operatora A.

U matematičkoj literaturi se spektar operatora obično definiše šire, i p. njim se podrazumeva skup skalara λ za koje ne samo da operator $A-\lambda I$ ne inverzni operator, već i takve vrednosti λ za koje inverzni operator postoji . nije ograničen, ili postoji i ograničen je ali skup elemenata $(A-\lambda I)x$ n svuda gust u posmatranom prostoru. Ovo samo napominjemo potpunosti ra da bismo upozorili čitaoca pri korišćenju matematičke literature.

U okviru razmatranja u ovoj knjizi, spektar ćemo shvatiti u gornj smislu, tj. kao skup svojstvenih vrednosti, odnosno kao skup skalara λ za k operator $A-\lambda I$ uopšte nema inverzni operator. Spektar operatora može b *diskretan* (konačan ili prebrojiv) ili *kontinuiran* (neprebrojiv). Kao što će docnije videti, *slučaj kontinuiranog spektra se može javiti samo u beskonač dimenzionalnim prostorima.*

Na osnovu jednačine (10.32) možemo pisati $\|Ax\|=\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ (uk liko su λ i x respektivno svojstvena vrednost i svojstveni element operatora . a odatle kombinovanjem sa (10.30) za ograničene operatore dobiti uslov $|\lambda|<\|A$ Dakle, kod ograničenih operatora nijedna svojstvena vrednost ne može apsolutnoj vrednosti biti veća od njegove norme. Drugim rečima, *ceo spek svojstvenih vrednosti ograničenog operatora se nalazi (u kompleksnoj ravni) na krugu poluprečnika $\|A\|$ sa centrom u nuli.*

10.3. PRIKAZIVANJE LINEARNIH OPERATORA POMOĆU MATRICA

Operatori u unitarnom prostoru. Ako je $x_1, x_2, \ldots, x_k$ jedna ortonormira baza u k-dimenzionom unitarnom prostoru, onda se na osnovu (9.25) sv element x tog prostora može prikazati kao:

$$x = \circ\sum_{\nu=1}^{k}(x_\nu, x)\,x_\nu = \circ\sum_{\nu=1}^{k} f_\nu x_\nu,$$

gde su sa f_ν označeni, kratkoće radi, njegovi Fourier-ovi koeficijenti, pa je A dati linearni operator u tom prostoru, imamo:

$$y = Ax = A\Big(\circ\sum_{\nu=1}^{k} f_\nu x_\nu\Big) = \circ\sum_{\nu=1}^{k} f_\nu (Ax_\nu),$$

jer se osobina (10.2) lako generališe na proizvoljan *konačan* broj sabirka. bismo, dakle, našli rezultat dejstva linearnog operatora A na ma koji elem unitarnog prostora, dovoljno je da utvrdimo kako taj operator deluje na ba tj. da nađemo elemente Ax_ν. Ovi elementi takođe pripadaju posmatranom u tarnom prostoru i mogu se prikazati u obliku Fourier-ovih razvoja (9.25), k će biti oblika:

$$Ax_\nu = \circ\sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\mu\nu}\, x_\mu. \tag{10.3}$$

Skalari $\alpha_{\mu\nu}$ su specifični za dati operator A. Imamo dalje:

$$y = Ax = \circ\sum_{\nu=1}^{k} f_\nu (Ax_\nu) = \sum_{\nu=1}^{k} f_\nu\Big(\circ\sum_{\mu=1}^{k}\alpha_{\mu\nu}x_\mu\Big) = \circ\sum_{\mu=1}^{k}\Big(\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_{\mu\nu}f_\nu\Big)x_\mu. \tag{10.3}$$

Odavde čitamo da su Fourier-ovi koeficijenti elementa $y = \circ\sum_{\mu=1}^{k} F_\mu x_\mu$ dati izrazom $F_\mu = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_{\mu\nu} f_\nu$, tako da dobijeni rezultat dozvoljava da se jednačini $y = Ax$ pridruži matrična relacija:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \alpha_{3k} & \cdots & \alpha_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} \tag{10.36}$$

na osnovu koje se Fourier-ovi koeficijenti elementa Ax nalaze iz Fourier-ovih koeficijenata elementa x u skladu sa pravilom matričnog množenja (5.7). Pri tom se, u potpunoj analogiji sa prvom od formula (5.37), elementima x i Ax pridružuju matrice-kolone sastavljene od njihovih Fourier-ovih koeficijenata, dok se *operatoru A pridružuje jedna kvadratna matrica k-tog reda*. Njene matrične elemente nalazimo iz relacije (10.34), skalarnim množenjem sa x_σ:

$$(x_\sigma, Ax_\nu) = (x_\sigma, \circ\sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\mu\nu} x_\mu) = \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\mu\nu} (x_\sigma, x_\mu) = \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\mu\nu} \delta_{\sigma\mu} = \alpha_{\sigma\nu},$$

pri čemu je uzeta u obzir ortonormiranost elemenata x_ν baze. Dakle:

$$\alpha_{\mu\nu} = (x_\mu, Ax_\nu), \tag{10.37}$$

što predstavlja generalizaciju formule (5.30) za klasične tenzore.

Matrični elementi (10.37) pripadaju operatoru A u odnosu na datu ortonormiranu bazu. Ako se za bazu uzme neki drugi skup od k ortonormiranih elemenata, dobiće se, za isti operator, druga matrica. Obrnuto, sa istom ortonormiranom bazom različitim operatorima pripadaju različite matrice.

Uzmimo kao primer operator sličnosti (10.5) i operator normalnog oblika (10.6) u unitarnom k-dimenzionom prostoru. Za prvi od njih je $A_1 x_\nu = \alpha x_\nu$, a za drugi $A_2 x_\nu = \lambda_\nu x_\nu$. Stoga formula (10.37) daje $\alpha_{\mu\nu} = \alpha\delta_{\mu\nu}$ u prvom slučaju, i $\alpha_{\mu\nu} = \lambda_\nu \delta_{\mu\nu}$ u drugom. Dakle, njihove matrice su:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Nije teško videti da pridruživanje matrica linearnim operatorima u skladu sa pravilom (10.37) *preslikava i algebru operatora u algebru matrica*. Zbiru dva linearna operatora odgovara matrica jednaka zbiru matrica pridruženih pojedinim operatorima:

$$(A \hat{+} B)_{\mu\nu} = (x_\mu, (A \hat{+} B) x_\nu) = (x_\mu, Ax_\nu \oplus Bx_\nu) = (x_\mu, Ax_\nu) + (x_\mu, Bx_\nu) = (A)_{\mu\nu} + (B)_{\mu\nu}, \tag{10.38}$$

što je direktna posledica relacije (9.6) koja izražava distributivnost skalarnog množenja u unitarnom prostoru, a oznake $(A)_{\mu\nu}$ i $(B)_{\mu\nu}$ imaju očevidan smisao matričnih elemenata. Na osnovu osobine (9.2) nalazimo takođe

$$(\alpha A)_{\mu\nu} = (x_\mu, \alpha Ax_\nu) = \alpha (x_\mu, Ax_\nu) = \alpha (A)_{\mu\nu}, \tag{10.39}$$

tj. proizvodu operatora i skalara pridružuje se matrica jednaka proizvodu istog skalara i matrice pridružene posmatranom operatoru. Da se proizvodu operatora pridružuje matrica koja je jednaka proizvodu matrica pridruženih pojedinim operatorima, vidi se iz sledećih jednakosti:

$$\begin{aligned} (AB)_{\mu\nu} &= (x_\mu, (AB) x_\nu) = (x_\mu, A(Bx_\nu)) = \\ &= (x_\mu, A\left(\circ\sum_{\sigma=1}^{k} (B)_{\sigma\nu} x_\sigma\right)) = (x_\mu, \circ\sum_{\sigma=1}^{k} (B)_{\sigma\nu} Ax_\sigma) = \\ &= \sum_{\sigma=1}^{k} (B)_{\sigma\nu} (x_\mu, Ax_\sigma) = \sum_{\sigma=1}^{k} (A)_{\mu\sigma} (B)_{\sigma\nu}, \end{aligned} \tag{10.40}$$

što je istovetno sa relacijom (5.7) za matrično množenje. Ovi rezultati su potpuno analogi onima kod klasičnih tenzora. To se jasno uočava poređenjem sa (5.32), (5.33) i (5.34).

Matrična formulacija svojstvenog problema linearnog operatora u unitarnom prostoru. Za linearni operator u unitarnom k-dimenzionom prostoru se jednačina svojstvenog problema (10.32) prepisana u obliku $(A - \lambda I)x = \theta$ u skladu sa (10.36), svodi na sledeću matričnu jednačinu:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \lambda & \cdots & \alpha_{3k} \\ \cdots & & & \cdots & \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \alpha_{k3} & \cdots & \alpha_{kk} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10.41}$$

Nakon izvršenog matričnog množenja dobija se jedan sistem od k linearnih i homogenih jednačina za određivanje Fourier-ovih koeficijenata $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ svojstvenog elementa x u odnosu na datu ortonormiranu bazu. One su potpuno analogne jednačinama (5.42) za klasične tenzore, pa ih ovde nećemo eksplicitno ni pisati. Kao i u slučaju klasičnih tenzora, netrivijalna rešenja po $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ postojaće samo ako je determinanta sistema jednaka nuli:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \lambda & \cdots & \alpha_{3k} \\ \cdots & & & \cdots & \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \alpha_{k3} & \cdots & \alpha_{kk} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{10.42}$$

što je analogno jednačini (5.44). Zapazimo uzgred da (10.42) izražava uslov da operator $A - \lambda I$ bude singularan.

Nakon razvijanja determinante (10.42), dobija se jedna algebarska jednačina k-tog stepena sa nepoznatom λ, koju ćemo takođe zvati *karakteristična jednačina*. Pošto se ona reši, iz (10.41) se nalaze svojstveni elementi koji pri-

padaju pojedinim svojstvenim vrednostima. Detalji ovog postupka si identični sa onima kod klasičnih tenzora, tako da se ovde nećemo ponovo na njima zadržavati. Dakle, u k-dimenzionom unitarnom prostoru svaki linearan operator ima k svojstvenih vrednosti, tj. ima *diskretan spektar*.

Operatori u Hilbertovom prostoru. Prelaz na beskonačan broj dimenzija izmeniće samo neke detalje prethodnog razmatranja. Matrični elementi operatora A će i ovde biti određeni formulom (10.37), samo će pripadajuća matrica imati beskonačan broj vrsta i kolona. Iz relacije analoge jednačini (10.34) u beskonačno dimenzionom slučaju imamo

$$\| A x_\nu \|^2 = \sum_{\mu=1}^{\infty} |\alpha_{\mu\nu}|^2,$$

odakle zaključujemo da mora biti $\sum_{\mu=1}^{\infty} |\alpha_{\mu\nu}|^2 < +\infty$, tj. svaka kolona u matrici pridruženoj operatoru predstavljaće jedan niz koji pripada prostoru l_2.

Osnovna razlika između konačno i beskonačno dimenzionog slučaja je svakako u tome, što se svojstveni problem u Hilbertovom prostoru ne može rešavati pomoću prelaska na matričnu formulaciju, jer ne postoji način da se razvije beskonačna determinanta, analoga (10.42). Svojstveni problem se ovde rešava sasvim drukčijim postupkom.

10.4. ADJUNGOVANI OPERATOR

Definicija adjungovanog operatora. Zahvaljujući postojanju operacije skalarnog množenja unitarnim i Hilbertovim prostorima, svakom linearnom operatoru A možemo pridružiti *adjungovani operator* A^+, definisan relacijom:

$$(A x, y) = (x, A^+ y), \tag{10.43}$$

koja mora biti ispunjena za svako x, y iz domena operatora A. Domen operatora A^+ se ne mora poklapati sa domenom operatora A. U matematičkoj literaturi se detaljnije obrazlaže da će operator A^+ biti relacijom (10.43) *jednoznačno* određen samo ako je domen operatora A svuda gust u posmatranom prostoru. Da bismo izbegli nepotrebne komplikacije vezane za razmatranja domena, *ograničićemo se u ovom odeljku na linearne operatore čiji je domen objekata ceo posmatrani prostor.*

Upoređivanjem navedene definicione jednačine sa relacijom (4.31) zaključujemo da je konjugovani tenzor zapravo adjungovani operator u prostoru klasičnih vektora.

Osnovne osobine. Zapazimo najpre da *adjungovanom operatoru odgovara adjungovana matrica*, kao što se vidi iz:

$$(A^+)_{\mu\nu} = (x_\mu, A^+ x_\nu) = (A x_\mu, x_\nu) = (\overline{x_\nu, A x_\mu}) = (\overline{A})_{\nu\mu}. \tag{10.44}$$

Ova osobina odgovara relaciji (5.36) kod klasičnih tenzora. Sledeće dve osobine su skoro potpuno očevidne, pa ih navodimo bez dokaza:

$$(A^+)^+ = A, \tag{10.45}$$

$$(AB)^+ = B^+ A^+. \tag{10.46}$$

One su ekvivalentne relacijama (4.29) i (4.38) kod klasičnih tenzora. Za adjungovani tenzor važi i relacija:

$$(A^+)^{-1} = (A^{-1})^+ \tag{10.47}$$

(analoga osobina kod tenzora je pokazona u zadatku 4.10.). Da bismo je dokazali zapazimo najpre da je jedinični operator I sam sebi adjungovan, $I^+ = I$. Ako, dakle, pođemo od (10.25) i obrazujemo adjungovani operator,

$$A A^{-1} = I \Rightarrow (A A^{-1})^+ = I^+ = I,$$

pa zatim primenimo relaciju (10.46), nalazimo:

$$(A^{-1})^+ A^+ = I,$$

odnosno, množenjem sa operatorom $(A^+)^{-1}$ i korišćenjem asocijativnosti množenja operatora

$$[(A^{-1})^+ A^+](A^+)^{-1} = (A^{-1})^+ [A^+ (A^+)^{-1}] = I (A^+)^{-1},$$

dolazimo do (10.47).

Navedimo, najzad, i jednu osobinu adjungovanog operatora za koju nismo navodili neposredni analogon kod klasičnih tenzora. *Ako je A ograničen linearni operator, biće i A^+ ograničen, i norme oba operatora su jednake.* To sledi neposredno iz definicije norme operatora (10.31). Druga od tamo navedenih alternativnih relacija daje:

$$\| A^+ \| = \sup_{\|x\|=1} |(A^+ x, x)| = \sup_{\|x\|=1} |(x, A x)| = \sup_{\|x\|=1} |(\overline{A x, x})| = \sup_{\|x\|=1} |(A x, x)|.$$

Primenjene transformacije su zasnovane na osnovnim osobinama skalarnog proizvoda i na činjenici da su moduli dva konjugovano-kompleksna broja jednaki. Dakle,

$$\| A^+ \| = \| A \|, \tag{10.48}$$

što je trebalo dokazati.

Primeri adjungovanih operatora. Za linearne operatore navedene u odeljku 10.2. lako nalazimo adjungovane operatore, imajući u vidu (10.43).

(1) Nulti operator (10.3) i jedinični operator (10.4) imaju adjungovane operatore jednake njima samima, $O^+ = O$, $I^+ = I$. Ovo se neposredno može videti

(2) Operator sličnosti (10.5) ima adjungovani operator određen relacijom $A^+ x = \overline{\alpha} x$. Naime, na osnovu elementarnih osobina skalarnog proizvoda možemo pisati:

$$(A x, y) = (\alpha x, y) = \overline{\alpha} (x, y) = (x, \alpha y),$$

odakle upoređivanjem sa (10,43) izlazi $A^+ y = \overline{\alpha} y$, što se i tvrdilo.

(3) Operator normalnog oblika (10.6) ima adjungovani operator, koji je takođe normalnog oblika i čiji su koeficijenti jednaki konjugovano-kompleksnim vrednostima koeficijenata $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Za konačno dimenzioni (unitarni) prostor dokaz za ovo se dobija iz relacija:

$$(A x, y) = \left(A \left(\circ\sum_{\nu=1}^{k} f_\nu x_\nu \right), \ \sum_{\mu=1}^{k} g_\mu x_\mu \right) = \left(\circ\sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu f_\nu x_\nu, \ \circ\sum_{\mu=1}^{k} g_\mu x_\mu \right) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{k} \overline{(\lambda_\nu f_\nu)} g_\nu = \sum_{\nu=1}^{k} \overline{f_\nu} (\overline{\lambda_\nu} g_\nu) = \left(\circ\sum_{\nu=1}^{k} f_\nu x_\nu, \ \circ\sum_{\mu=1}^{k} \overline{\lambda_\mu} g_\mu x_\mu \right) = (x, A^+ y). \tag{10.49}$$

Pri dobijanju ovog rezultata najpre su elementi x i y prikazani u obliku svojih Fourier-ovih razvoja (sa f_ν i g_ν su označeni odgovarajući Fourier-ovi koeficijenti) zatim je primenjena relacija (10.6) i Parseval-ova jednačina (9.28), i to jednom

u direktnom, a drugi put u obrnutom smeru. Iz ovoga sledi da je zaista $A^+ y = \sum_{\nu=1}^{k} \overline{\lambda}_\nu (x_\nu, y)\, x_\nu$, čime je tvrđenje dokazano. Ako se radi o beskonačno dimenzionom (Hilbertovom) prostoru, dokaz će biti formalno potpuno isti jer se, zbog osobine neprekidnosti skalarnog proizvoda, distributivnost (9.3) i (9.6) može proširiti i na beskonačne sume.

(4) Operator diferenciranja ima adjungovani operator $-\dfrac{d}{dt}$, kao što se vidi iz sledećih jednakosti napisanih na osnovu definicije (9.16) skalarnog proizvoda u $L_2(a, b)$ i primene parcijalne integracije:

$$(Ax, y) = \int_a^b \overline{\frac{dx(t)}{dt}}\, y(t)\, dt = \overline{x(t)}\, y(t)\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \overline{x(t)}\, \frac{dy(t)}{dt}\, dt. \tag{10.50}$$

Da bi se rezultat mogao interpretirati kao skalarni proizvod i iz njega pročitati adjungovani operator, prointegrirani deo mora biti jednak nuli. To znači da domen operatora $\dfrac{d}{dt}$ treba suziti tako da on obuhvata ne sve diferencijabilne funkcije koje zajedno sa svojim prvim izvodom pripadaju prostoru $L_2(a, b)$, već samo one za koje važi $x(a) = x(b)$, $y(a) = y(b)$. Pod tim uslovom iz (10.50) izlazi $\left(\dfrac{d}{dt}\right)^+ = -\dfrac{d}{dt}$, što je trebalo pokazati. Ukoliko se posmatra prostor $L_2(-\infty, +\infty)$, domen operatora $\dfrac{d}{dt}$ se ne mora sužavati, jer ako funkcije $x(t)$ i $y(t)$ pripadaju ovom domenu, one moraju težiti dovoljno brzo nuli kad $t \to \pm\infty$ da bi im kvadrati modula bili integrabilni. Isti je slučaj i sa prostorom $\tilde{L}_2(a, b)$ periodičnih funkcija, gde su uslovi $x(a) = x(b)$, $y(a) = y(b)$, obezbeđeni za svaku funkciju zbog periodičnosti. Iz relacije analoge (10.50) lako nalazimo da je uopšte

$$\left(\alpha \frac{d}{dt}\right)^+ = -\overline{\alpha} \frac{d}{dt}, \tag{10.51}$$

gd je α neki (kompleksan) skalar.

(5) Fredholm-ov integralni operator u $L_2(a, b)$, definisan jednačinom (10.8), ima adjungovani operator koji nalazimo iz sledećih jednačina:

$$(Ax, y) = \int_a^b \overline{[Ax(t)]}\, y(t)\, dt = \int_a^b \overline{\left[\int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds\right]}\, y(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b \overline{K(t, s)}\; \overline{x(s)}\, ds\right] y(t)\, dt = \int_a^b \overline{x(s)} \left[\int_a^b \overline{K(t, s)}\, y(t)\, dt\right] ds = \int_a^b \overline{x(s)}\, [A^+ y(s)]\, ds.$$

U napisanim transformacijama najvažnija je izmena redosleda integriranja u poslednjoj jednakosti. Uz izmenu oznaka integracionih promenljivih, čitamo neposredno:

$$A^+ y(t) = \int_a^b \overline{K(s, t)}\, y(s)\, ds, \tag{10.52}$$

i odatle zaključujemo da je adjungovani operator Fredholm-ovog integralnog operatora sa jezgrom $K(t, s)$ takođe Fredholm-ov integralni operator i ima jezgro $\overline{K(s, t)}$.

Za primene u Teorijskoj fizici su od velike važnosti linearni operatori kod kojih je adjungovani operator jednak samom operatoru, $A^+ = A$ (tzv. *ermitski operatori*), kao i oni kod kojih je adjungovani operator jednak inverznom, $A^+ = A^{-1}$, a domen operatora A je ceo posmatrani prostor. (tzv. *unitarni operatori*). Stoga ćemo se u naredna dva odeljka detaljnije pozabaviti njihovim osobinama.

10.5. ERMITSKI (AUTOADJUNGOVANI) OPERATORI

Osnovne osobine i primeri. Linearni operator A koji je *jednak svom adjungovanom operatoru*

$$A^+ = A, \tag{10.53}$$

je *ermitski (autoadjungovan)**. U ovom odeljku ćemo kao što je već napomenuto, razmatrati samo operatore čiji je domen ceo posmatrani prostor. Iz jednačina (4.46) i (5.22) se vidi da ermitski operator predstavlja generalizaciju simetričnog tenzora i ermitske matrice. Štaviše, lako je pokazati da se, prema pravilu (10.37), *ermitskom operatoru pridružuje ermitska matrica*. Zaista, ako je $A^+ = A$, onda je i $(A^+)_{\mu\nu} = (A)_{\mu\nu}$, tj. matrični elementi matrica pridruženih operatorima A^+ i A su jednaki. Na osnovu (10.44) onda nalazimo dalje $(A^+)_{\mu\nu} = \overline{(A)}_{\nu\mu} = (A)_{\mu\nu}$, što dokazuje izneto tvrđenje, jer je $\overline{(A)}_{\nu\mu} = (A)_{\mu\nu}$ osobina elemenata ermitske matrice (5.22).

Sledeće dve osobine ermitskih operatora su od važnosti u primenama i analoge su već dokazanim osobinama simetričnih tenzora.

Sve svojstvene vrednosti ermitskog operatora su realne. Naime, ako je x svojstveni element koji pripada svojstvenoj vrednosti λ, tj. ako je $Ax = \lambda x$, imaćemo, s jedne strane

$$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \overline{\lambda} (x, x),$$

i s druge strane, zbog (10.43) i (10.53),

$$(Ax, x) = (x, A^+ x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \lambda (x, x),$$

pa upoređivanjem krajnjih izraza zaključujemo da mora biti $\overline{\lambda} = \lambda$, što je osobina realnih brojeva.

Svojstveni elementi ermitskog operatora koji odgovaraju različitim svojstvenim vrednostima su uzajamno ortogonalni. Zaista, ako je $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ i $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, imaćemo

$$(Ax_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \overline{\lambda}_1 (x_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2),$$

a takođe i:

$$(Ax_1, x_2) = (x_1, A^+ x_2) = (x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2);$$

pri pisanju ovih jednakosti je uzeto u obzir da su svojstvene vrednosti realne. Izjednačavanjem krajnjih izraza nalazimo

$$\lambda_1 (x_1, x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2), \text{ tj. } (\lambda_1 - \lambda_2)\, (x_1, x_2) = 0.$$

Ukoliko je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, odavde onda izlazi $(x_1, x_2) = 0$, što je i trebalo pokazati.

* U matematičkoj literaturi se pravi izvesna razlika između ermitskih i autoadjungovanih operatora, ukoliko se radi o neograničenim operatorima. U fizičkoj literaturi su termini „ermitski" i „autoadjungovan" sinonimi, i u ovoj knjizi ćemo ih tako koristiti.

Navedimo sad nekoliko primera ermitskih operatora.

(1) Nulti operator (10.3), jedinični operator (10.4) i operator normalnog oblika (10.6) sa *realnim* koeficijentima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ su ermitski. Za prva dva je to očevidno, a za treći proizilazi iz (10.49).

(2) Operator $\alpha \frac{d}{dt}$, gde je α *čisto imaginaran broj*, je ermitski, kao što se vidi iz (10.51). U kvantnoj mehanici se, specijalno, koristi operator $-i\frac{d}{dt}$.

(3) Fredholm-ov integralni operator sa jezgrom $K(t, s)$ biće ermitski ako je $K(t, s) = \overline{K(s, t)}$, kao što se vidi iz (10.52). Posebno, ako je jezgro realna funkcija simetrična u odnosu na zamenu mesta promenljivih, Fredholm-ov operator će biti autoadjungovan.

(4) Operator sličnosti (10.5) je ermitski, ako je α *realan* skalar, jer je u prethodnom odeljku pokazano da za taj operator važi $A^+ x = \bar{\alpha} x$.

Ermitski operatori u unitarnim (konačno dimenzionim) prostorima. U k-dimenzionom ermitskom prostoru svaki ermitski operator ima, kao i ma koji linearan operator, tačno k svojstvenih vrednosti koje se dobijaju kao rešenja jednačine (10.42). Prema malo pre dokazanom stavu, sve ove vrednosti moraju biti realne, a svojstveni elementi koji odgovaraju različitim svojstvenim vrednostima su uzajamno ortogonalni. Ako je, za dati ermitski operator, neka svojstvena vrednost višestruka (degenerirana) i ima nekoliko linearno nezavisnih svojstvenih elemenata, ovi se uvek mogu zameniti skupom od istog broja ortogonalnih elemenata (Schmidt-ov postupak).

Prema tome, bilo da postoje ili ne postoje višestruke svojstvene vrednosti, datom ermitskom operatoru se može pridružiti tačno k uzajamno ortogonalnih svojstvenih elemenata. Ovi se elementi mogu uvek tako odabrati da im norme budu jednake jedinici, i tako *svakom ermitskom operatoru u k-dimenzionom ermitskom prostoru pridružiti skup ortonormiranih svojstvenih elemenata koji se mogu uzeti za bazu prostora.* Neka su, za dati operator A, ti svojstveni elementi $x_1, x_2, \ldots, x_k$, a odgovarajuće svojstvene vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ (među njima može biti i jednakih). Ma koji drugi element x prostora se može prikazati u obliku $x = \circ\sum_{v=1}^{k} f_v x_v$, kao što sledi iz (9.25). Ovde su $f_v = (x_v, x)$ Fourier-ovi koeficijenti tog elementa u odnosu na ortonormirani sistem svojstvenih vektora posmatranog ermitskog operatora A. Prema tome,

$$Ax = A\left(\circ\sum_{v=1}^{k} f_v x_v\right) = \circ\sum_{v=1}^{k} f_v (Ax_v) = \circ\sum_{v=1}^{k} \lambda_v f_v x_v .$$

Poslednja jednakost je posledica činjenice da su λ_v svajstvene vrednosti koje pripadaju svojstvenim elementima x_v. Upoređivanjem sa (10.6) odavde vidimo da se ermitski operator A o kome je reč u tom slučaju pojavljuje kao *operator normalnog oblika*. To znači da će matrica pridružena tom operatoru, ako se za elemente baze uzmu njegovi ortonormirani svojstveni elementi, biti *dijagonalna* i elementi na dijagonali će biti jednaki svojstvenim vrednostima operatora. To je pokazano u primeru uz jednačinu (10.37) i predstavlja generalizaciju analogog zaključka kod simetričnih tenzora, što se vidi iz (5.49).

Ermitski operatori u Hilbertovom prostoru. Slučaj diskretnog spektra svojstvenih vrednosti. Važan zaključak, izveden u prethodnom odeljku, da svaki ermitski operator u unitarnom prostoru ima tačno onoliko ortonormiranih

svojstvenih elemenata koliko je potrebno za bazu, tako da se bilo koji element može razložiti prema formuli (9.25) po tim svojstvenim elementima, prestaje da bezuslovno važi pri prelasku na prostore sa beskonačnim brojem dimenzija. U Hilbertovom prostoru nije moguće pokazati da svojstveni elementi *ma kog* ermitskog operatora obrazuju jedan *potpun* ortonormiran sistem. Pošto je ovo pitanje od velike važnosti za primene u Teorijskoj fizici, postoji opravdan interes da se utvrde osobine koje bi morao imati jedan ermitski operator koji deluje u Hilbertovom prostoru, da bi se *bilo koji element tog prostora mogao prikazati pomoću njegovih ortonormiranih svojstvenih elemenata u obliku Fourier-ovog razvoja* (9.52). Ermitski operatori koji imaju tu osobinu obrazuju posebnu klasu i u Kvantnoj mehanici se zovu *observable*. Taj termin ćemo i mi ovde upotrebljavati radi kratkoće. Ispitivanje da li je zadani ermitski operator u Hilbertovom prostoru observabla spada u veoma delikatne matematičke probleme. Ne mogu se ukazati neka opšta pravila i razmatranje se vrši za svaki operator pojedinačno.

Jednostavnim primerima se lako može pokazati da ograničenost ermitskog operatora nije ni potrebna ni dovoljna za to da on bude observabla. U zadacima 10.1. i 10.2. razmotrena su dva ograničena ermitska operatora, čiji svojstveni elementi sigurno ne mogu obrazovati bazu prostora (ti operatori imaju samo po jedan svojstveni element jedinične norme). S druge strane, operator $A = -i\frac{d}{dt}$ u Hilbertovom prostoru $\tilde{L}_2(-\pi, \pi)$ periodičnih funkcija sa integrabilnim kvadratom nije ograničen, što je eksciplitno pokazano u odeljku o neprekidnosti i ograničenosti linearnih operatora, ali je ermitski prema jednačini (10.51). Rešavanjem jednačine svojstvenog problema $-i\frac{d}{dt}(t) = \lambda x(t)$ se lako nalazi da ovaj operator ima spektar svojstvenih vrednosti $\lambda_n = n, (n = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots)$, i da korespondentno svojstvene funkcije $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ obrazuju potpun ortonormiran sistem (9.69), tako da se svaka periodična funkcija iz $\tilde{L}_2(-\pi, \pi)$ može razviti u Fourier-ov red po njima. Slična situacija je i sa operatorom $A = -\frac{d^2}{dt^2} + t^2$ u prostoru $L_2(-\infty, +\infty)$, koji takođe nije ograničen (zbog toga što sadrži operator diferenciranja) i za koji se može pokazati da je ermitski. Ovaj operator se sreće u kvantnomehaničkoj teoriji harmonijskog oscilatora. On ima čisto diskretan spektar $\lambda_n = 2n + 1, (n = 0, 1, 2, \ldots)$, i pripadajuće svojstvene funkcije su upravo Hermite-ove funkcije (9.65), čija potpunost sledi iz opšteg stava iznetog u prethodnoj Glavi. Da je zaista $\left(-\frac{d^2}{dt^2} + t^2\right)\varphi_n(t) = (2n+1)\varphi_n(t)$, može se lako proveriti neposredaim izračunavanjem, ako se uoči da su funkcije $\varphi_n(t)$ vezane sa Hermite-ovim polinomima relacijama:

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2}t^2} Hn(t),$$

i ako se za ove polinome iskoriste poznate rekurzivne formula

$$H_{n+1}(t) = 2t H_n(t) - 2n H_{n-1}(t),$$

$$H_n'(t) = 2n H_{n-1}(t),$$

koje se detaljnije razmatraju u teoriji specijalnih funkcija. Dakle, postoje ograničeni ermitski operatori koji nisu observable i neograničeni ermitski operatori koji to jesu.

Pošto ortonormirana baza u Hilbertovom prostoru mora u svakom slučaju biti prebrojiva (zbog osobine separabilnosti prostora), intuitivno je jasno da observable treba u prvom redu tražiti među operatorima sa diskretnim spektrom svojstvenih vrednosti, jer jedino kod njih svojstveni elementi mogu obrazovati prebrojiv skup. To, razume se *ne znači* da operator se kontinuiranim (ili delom diskretnim i delom kontinuiranim) spektrom svojstvenih vrednosti treba bez daljnjeg eliminisati iz razmatranja, i u narednom odeljku ćemo videti da i oni zaista zaslužuju pažnju, posebno u kvantnoj mehanici.

Postoji jedna važna klasa ermitskih operatora u Hilbertovom prostoru, sa osobinama da sigurno spadaju u observable i obavezno imaju diskretan spektar svojstvenih vrednosti. To su ***potpuno neprekidni ermitski operatori***, koje smo definisali kao operatore sa osobinom da svakom ograničenom nizu elemenata korespondiraju niz koji ima bar jednu tačku nagomilavanja (tj. iz koga je moguće izvući konvergentan podniz). Dokazaćemo da oni zaista imaju gore navedene osobine.

Najpre ćemo se uveriti da potpuno neprekidni ermitski operator u Hilbertovom prostoru obavezno ima diskretan spektar. Tačnije, ***svaki potpun neprekidni ermitski operator ima najviše prebrojivo mnogo svojstvenih vrednosti i svaka od njih ima samo konačan multiplicitet degeneracije, osim svojstvene vrednosti*** $\lambda=0$ (ukoliko posmatrani operator uopšte ima takvu svojstvenu vrednost) ***kojoj može odgovarati i beskonačno mnogo ortonormiranih svojstvenih elemenata*** (tj. beskonačan multiplicitet degeneracije). Dokazaćemo najpre tvrđenje da svakoj svojstvenoj vrednosti $\lambda \neq 0$ odgovara konačan broj ortonormiranih svojstvenih elemenata. Neka je λ_1 jedna svojstvena vrednost različita od nule datog potpuno neprekidnog ermitskog operatora A u Hilbertovom prostoru, i neka je $\{x\}$ skup ortonormiranih svojstvenih elemenata koji joj pripadaju. Pretpostavimo da je taj skup beskonačan. Operator A mu pridružuje onda takođe beskonačan skup elemenata $\{Ax\}$. Zbog potpune neprekidnosti operatora A, u ovom poslednjem skupu bi morale postojati tačke nagomilavanja. Međutim, rastojanje između ma koja dva njegova elementa, Ax_p i Ax_q, je

$$\begin{aligned}\rho(Ax_p, Ax_q) &= \| Ax_p \ominus Ax_q \| = \| \lambda_1 x_p \ominus \lambda_1 x_q \| = \\ &= |\lambda_1| \, \| x_p \ominus x_q \| = |\lambda_1| \sqrt{(x_p \ominus x_q, x_p \ominus x_q)} = \\ &= |\lambda_1| \sqrt{(\| x_p \|^2 + \| x_q \|^2)} = |\lambda_1| \sqrt{2}. \end{aligned} \tag{10.54}$$

Pri dobijanju ovog rezultata bile su iskorišćene relacije (9.10) i (9.11) koje daju vezu između rastojanja i skalarnog proizvoda, zatim je bila uzeta u obzir činjenica da su x_p i x_q po pretpostavci svojstveni elementi koji odgovaraju istoj svojstvenoj vrednosti λ_1, a skalarni proizvod u $\| x_p \ominus x_q \|$ je izmnožen član po član vodeći računa o ortonormiranosti ovih elemenata. Jednakosti (10.54) pokazuju da su rastojanja među elementima skupa $\{Ax\}$ međusobno jednaka, te da u tom skupu ne može biti tačaka nagomilavanja. To onda znači da taj skup ne može biti beskonačan, pošto je A potpuno neprekidan operator. Dakle, svojstvenoj vrednosti $\lambda_1 \neq 0$ potpuno neprekidnog operatora A odgovara samo konačan broj ortonormiranih svojstvenih elemenata. Lako se vidi da gornje rezonovanje ne važi za $\lambda_1=0$. Naime, u tom slučaju se (10.54) svodi na $\rho(Ax_p, Ax_q)=0$, tj. nulti element θ je sigurno tačka nagomilavanja skupa $\{Ax\}=\{\theta\}$ (i jedini njegov element), pa pretpostavka o beskonačnosti skupa $\{x\}$

nije u protivrečnosti sa potpunom neprekidnošću operatora A. Prema tome, svojstvenoj vrednosti $\lambda_1=0$ bi mogao odgovarati i beskonačan broj ortonormiranih svojstvenih elemenata.

Sada možemo dokazati i preostali deo formulisanog stava. Označimo sa $\{x\}$ skup svih ortonormiranih svojstvenih elemenata koji (za dati potpuno neprekidni ermitski operator A) pripadaju svojstvenim vrednostima koje po apsolutnoj vrednosti nisu manje od zadanog pozitivnog broja $K(|\lambda| > K)$. Postupajući kao gore, pokazaćemo da ovaj skup mora biti konačan, jer pretpostavka o njegovoj beskonačnosti protivreči potpunoj neprekidnosti operatora A. Zaista, neka su x_p i x_q dva ortonormirana svojstvena elemenata iz $\{x\}$ a λ_p i λ_q pripadajuće svojstvene vrednosti, obe po apsolutnoj vrednosti veće od K. Potpuno analogno (10.54) imaćemo onda:

$$\begin{aligned}\rho(Ax_p, Ax_q) &= \| Ax_p \ominus Ax_q \| = \| \lambda_p x_p \ominus \lambda_q x_q \| = \\ &= \sqrt{(\lambda_p x_p \ominus \lambda_q x_q, \lambda_p x_p \ominus \lambda_q x_q)} = \\ &= \sqrt{\| \lambda_p x_p \|^2 + \| \lambda_q x_q \|^2} = \\ &= \sqrt{|\lambda_p|^2 \| x_p \|^2 + |\lambda_q|^2 \| x_q \|^2} = \\ &= \sqrt{|\lambda_p|^2 + |\lambda_q|^2} > K\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{10.55}$$

Poslednja nejednakost proizilazi iz činjenice da su obe svojstvene vrednosti, po pretpostavci, po apsolutnoj vrednosti veće od K. Nađeni rezultat pokazuje da u skupu $\{Ax\}$ ne može biti tačaka nagomilavanja, jer su rastojanja između njegovih elemenata uvek veća ili najviše jednaka nekom konačnom broju. Prema tome, ako je A potpuno neprekidan operator, skup $\{Ax\}$ ne može biti beskonačan, pa to ne može biti ni $\{x\}$. Drugim rečima, potpuno neprekidnom operatoru odgovara *konačan* skup ortonormiranih svojstvenih elemenata sa svojstvenim vrednostima $|\lambda| > K$. Onda je, utoliko pre, i sam skup svojstvenih vrednosti sa osobinom $|\lambda| > K$ konačan (svakoj svojstvenoj vrednosti posmatranog operatora može odgovarati više nego jedan svojstveni element, ali ni jednoj od njih ne više nego konačno mnogo ovih). Odatle sledi da je ceo skup svojstvenih vrednosti operatora A ili konačan ili obrazuje nula-niz, dakle u svakom slučaju ***spektar svojstvenih vrednosti je diskretan***. Ne zaboravimo, pri tom, da ceo spektar leži na realnoj pravoj, jer je operator A ermitski, pa su mu sve svojstvene vrednosti sigurno realne, i to na segmentu $[-\|A\|, +\|A\|]$, pošto je potpuno neprekidan operator obavezno i ograničen, a kod ograničenih operatora za sve svojstvene vrednosti važi $|\lambda| \leq \|A\|$, kao što je već ranije pokazano.

Posle ovoga prelazimo na dokaz druge navedene osobine, tj. da ***svojstveni elementi ma kog potpuno neprekidnog ermitskog operatora u Hilbertovom prostoru obrazuju potpun sistem***. Formulisani stav znači da je svaki potpuno neprekidan ermitski operator u Hilbertovom prostoru observabla, tj da se proizvoljan element Hilbertovog prostora može prikazati pomoću njegovih svojstvenih elemenata u obliku Fourier-ovog razvoja (9.52). Ovo je u matematičkoj literaturi poznato kao ***Hilbertova teorema***.

Dokaz Hilbertove teoreme moramo razdvojiti na nekoliko etapa. Najpre uočimo da je skup svih ortonormiranih svojstvenih elemenata potpuno neprekidnog ermitskog operatora A koji pripadaju svojstvenim vrednostima različitim od nule najviše *prebrojiv*. To sledi iz gore dokazanog stava da je skup svojstvenih vrednosti različitih od nule konačan ili prebrojiv, a svakoj od njih pripada

najviše konačan broj ortonormiranih svojstvenih elemenata. Dakle, svojstveni elementi sa $\lambda \neq 0$ se mogu poređati u jedan niz. Označimo ga sa $x_1', x_2', \ldots, x_k', \ldots$ ili kraće sa $\{x_\nu'\}$. Neka je x ma koji element Hilbertovog prostora. Prema teoremi o konvergenciji Fourier-ovih razvoja [jednačine (9.38) i (9.39)] suma $x' = \circ\sum_{\nu=1}^{\infty} (x_\nu', x)\, x_\nu'$ sigurno konvergira, tj. x' je element Hilbertovog prostora. Onda je i $x'' = x \ominus x'$ takođe element Hilbertovog prostora. Dakle:

$$x = x' \oplus x'' = \circ\sum_{\nu=1}^{\infty} (x_\nu', x)\, x_\nu' \oplus x'', \tag{10.56}$$

pri čemu je element x'' ortogonalan na x'. Naime, on je ortogonalan na svako x_ν' ponaosob, što se lako može dokazati relacijama analogim (9.42).

Razlaganje (10.56) pokazuje da je celishodno posmatrani Hilbertov prostor razdvojiti na dva uzajamno ortogonalna potprostora, H' i H'', tako da u H' ulaze svi oni elementi koji se mogu prikazati sumama oblika $z' = \circ\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x_\nu'$ pomoću izdvojenih sopstvenih elemenata $\{x_\nu'\}$, a u H'' svi elementi ortogonalni na njih. Zapazimo da operator A prevodi elemente iz H', opet u elemente iz H', jer je očevidno

$$Az' = A\left(\circ\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x_\nu'\right) = \circ\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu (A x_\nu') = \circ\sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_\nu \alpha_\nu)\, x_\nu',$$

pošto su x_ν' njegovi svojstveni elementi ($A x_\nu' = \lambda_\nu x_\nu'$). Kažemo da je potprostor *H' invarijantan u odnosu na operator A*. Lako je videti da će onda i H'' biti invarijantan potprostor. Naime, pošto je A ermitski operator, biće $(Az'', z') = (z'', Az') = 0$, ako z'' ma koji element potprostora H''.

U Funkcionalnoj analizi se dokazuje da je u svakom potprostoru Hilbertovog prostora norma potpuno neprekidnog ermitskog operatora jednaka apsolutnoj vrednosti njegove najveće svojstvene vrednosti u tom potprostoru. Dokaz za ovo nećemo navoditi, upućujući zainteresovanog čitaoca na specijalnu literaturu*. Jedan ilustrativni primer ovog tvrđenja dat je u zadatku 10.5. Imajući u vidu da u potprostoru H' ortonormiranu bazu čine svi svojstveni elementi posmatranog operatora sa svojstvenim vrednostima $\lambda \neq 0$ i da je taj potprostor invarijantan u odnosu na njega, vidimo da u potprostoru H'', prema samom načinu njegovog konstruisanja, operator može imati samo svojstvenu vrednost $\lambda = 0$. Prema gore navednom tvrđenju, odatle sledi da je i norma operatora u H'' jednaka nuli, što u skladu sa (10.30) ima za posledicu da za svaki element $z'' \in H''$ mora biti $\|Az''\| = 0$. Zbog nenegativnosti norme, ova jednakost povlači za sobom i važenje uslova $Az'' = \theta$, odnosno *ma koji element iz H'' je svojstveni element operatora A sa svojstvenom vrednošću $\lambda = 0$*. Pošto je H separabilan prostor, tu osobinu će imati i H'', tako da ćemo moći u njemu naći (konačan ili prebrojiv) potpun ortonormiran skup $\{z_\mu''\}$, i (10.56) definitivno pisati u obliku

$$x = x' \oplus x'' = \circ\sum_{\nu=1}^{\infty} (x_\nu', x)\, x_\nu' + \circ\sum_{\mu=1}^{\infty} (z_\mu'', x)\, z_\mu''. \tag{10.57}$$

---

* V. npr. knjigu navedenu u spisku literature pod rednim brojem 1, str. 317 (stav 25), ili knjigu navedenu pod rednim brojem 32, str. 211 — 216 (posebno šema 2).

Ova jednačina pokazuje da unija skupova $\{x_\nu'\}$ i $\{z_\mu''\}$ obrazuje ortonormiranu bazu (potpun ortonormirani skup) u Hilbertovom prostoru o kome je reč, jer se proizvoljan element prostora x mogao prikazati pomoću njih u obliku Fourier-ovog razvoja (9.52). Pri tom su x_ν' ortonormirani svojstveni elementi koji odgovaraju svojstvenim vrednostima datog potpuno neprekidnog ermitskog operatora različitim od nule, a z_μ'' su svojstveni elementi koji pripadaju $\lambda = 0$. Hilbertova teorema je ovim dokazana.

Neka je, na primer, u prostoru $l_2 \ni x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ dat operator A definisan relacijom

$$Ax = \left(\xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \ldots, \frac{1}{n}\xi_n, \ldots\right).$$

Za ovaj operator smo videli da je potpuno neprekidan u odeljku o neprekidnosti i ograničenosti linearnih operatora. Lako možemo pokazati i da je on ermitski. Naime, imajući u vidu definiciju (9.14) skalarnog proizvoda u l_2 i stavljajući $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots)$, imamo:

$$(Ax, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)} \eta_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{\xi}_\nu \left(\frac{\eta_\nu}{\nu}\right) = (x, Ay),$$

što odgovara uslovima (10.43) i (10.53). Jednačina (10.32) svojstvenog problema ovog operatora ima oblik

$$\left(\xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \ldots, \frac{1}{n}\xi_n, \ldots\right) = \lambda(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots),$$

i očevidno može biti zadovoljena samo za elemente čije su sve komponente jednake nuli osim r-te koja ostaje proizvoljna, i to pod uslovom da je $\lambda_r = \frac{1}{r}$. Ako proizvoljnu komponentu različitu od nule odredimo tako da svojstveni element bude normiran, dobićemo tačno niz elemenata (8.31), za koje je očevidno da predstavljaju jednu ortonormiranu bazu posmatranog prostora. Zapazimo uzgred da, u saglasnosti sa dokazanim stavovima, svojstvene vrednosti zaista obrazuju jedan nula-niz i svakoj odgovara samo jedan (dakle, konačan broj) svojstveni element.

Ermitski operatori sa kontinuiranim spektrom svojstvenih vrednosti. Kontinuirani spektar svojstvenih vrednosti se može pojaviti samo kod operatora koji dejstvuju na elemente beskonačno dimenzionog prostora. U konačno dimenzionim prostorima spektar svojstvenih vrednosti je uvek konačan, kako se vidi iz jednačina (10.41) i (10.42). Na ovom mestu ne možemo razmatrati opšte uslove pod kojima bi spektar svojstvenih vrednosti nekog ermitskog operatora u Hilbertovom prostoru mogao biti kontinuiran (ili delom kontinuiran a delom diskretan), jer to pitanje izlazi iz okvira ove knjige.* Uz to, ograničićemo sva razmatranja na prostor $L_2(-\infty, +\infty)$, koji je u primenama najvažniji. Ovo nije neko suštinsko ograničenje, pošto su svi Hilbertovi prostori međusobno kongruentni, i uvodi se samo radi konkretnosti daljih izvođenja.

---

* Operatori sa kontinuiranim spektrom se opširno i matematički strogo razmatraju u knjizi navedenoj u spisku literature pod rednim brojem 31, Glava V, paragraf 3.

Da bismo se lakše snašli u složenom pitanju ermitskih operatora sa kontinuiranim spektrom svojstvenih vrednosti, posmatraćemo najpre jedan konkretan primer. Operator diferenciranja $A = -i\frac{d}{dt}$ je u prostoru $L_2(-\infty, +\infty)$ ermitski, kao što se vidi iz jednačina (10.50) i (10.51). Taj operator je, uz to, neograničen, što je takođe već ranije pokazano. Svojstvene funkcije posmatranog operatora se nalaze kao rešenja diferencijalne jednačine $-i\frac{d}{dt}x(t) = \lambda x(t)$, u kojoj je λ realan parametar, jer ako je operator ermitski njegove svojstvene vrednosti su nužno realne. Rešenja napisane diferencijalne jednačine su oblika $x_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\lambda t}$ (faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ je uveden po analogiji sa malo pre razmotrenim slučajem kad isti operator deluje u prostoru periodičnih funkcija) i definisana su za svaku vrednost λ (što je naglašeno stavljanjem indeksa), ali ni za jednu od njih $x_\lambda(t)$ *ne pripada* prostoru $L_2(-\infty, +\infty)$, jer integral $\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{x}_\lambda(t)x_\lambda(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda t}e^{i\lambda t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dt$ očevidno *divergira*. Pri strogom rezonovanju bismo odavde morali zaključiti da operator A uopšte nema svojstvenih funkcija u $L_2(-\infty, +\infty)$. Ispostavlja se, međutim, da je celishodno tretirati funkcije $x_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\lambda t}$ kao svojstvene funkcije posmatranog operatora u nekom generalisanom smislu. Naime, za funkciju $x(t)$ iz $L_2(-\infty, +\infty)$, mogu se formalno izračunati njeni Fourier-ovi koeficijenti (9.24)

$$\xi(\lambda) = (x_\lambda, x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\bar{x}_\lambda(t)\,x(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt, \tag{10.58}$$

i pomoću njih takođe formalno napisati Fourier-ov razvoj

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\xi(\lambda)\,x_\lambda(t)\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi(\lambda)\,e^{i\lambda t}\,dt, \tag{10.59}$$

zamenjujući sumu u formuli (9.52) integralom da bi se uzela u obzir kontinuiranost indeksa λ. Napisane relacije, naravno, imaju uopšte smisla samo za takve funkcije $x(t) \in L_2(-\infty, +\infty)$ kod kojih će navedeni integrali konvergirati. No, u tom slučaju se ove relacije poklapaju sa poznatim formulama iz teorije Fourier-ovih transformacija, *za koje je poznato da su tačne* i stoga nisu više samo formalne. Objektivnosti radi, naglasimo da do sada *nije definitivno dokazano* da integrali u (10.58) i (10.59) konvergiraju za *svaku* funkciju iz $L_2(-\infty, +\infty)$. Pitanje da li Fourier-ov integral (10.59) zaista konvergira za

svaku funkciju iz L_2 je u matematičkoj literaturi poznato kao *Luzinov problem** (Luzin, 1915. god.). Međutim, za sve funkcije iz L_2 koje su od praktičnog interesa pomenuti integral konvergira, jer te funkcije ne samo da pripadaju prostoru L_2 već zadovoljavaju i strože uslove koji se detaljnije razmatraju u teoriji Fourier-ovih transformacija i na kojima se ovde ne možemo zadržavati. Prema tome, svaka funkcija od interesa se može prikazati kao $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x_\lambda, x)\,x_\lambda(t)\,d\lambda$, što nam daje za pravo da skup funkcija $x_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\lambda t}$ smatramo *potpunim*, a operator $A = -i\frac{d}{dt}$ observablom u prostoru $L_2(-\infty, +\infty)$. Podsetimo se da je u prethodnom odeljku bilo pokazano da je taj operator bez daljnjega observabla u $\tilde{L}_2(-\pi, \pi)$.

Generališimo sad dobijene zaključke. Neka je A ermitski operator koji ima kontinuirani spektar svojstvenih vrednosti. Označimo ponovo sa $x_\lambda(t)$ svojstvene funkcije koje im pripadaju. Za ove funkcije *nećemo zahtevati da imaju konačnu normu*, tj. integral $\int_{-\infty}^{+\infty}|x_\lambda(t)|^2\,dt$ može i da divergira. Međutim, ovo ne isključuje mogućnost da za izvesnu užu ili širu klasu funkcija iz $L_2(-\infty, +\infty)$ integrali

$$\xi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty}\bar{x}_\lambda(t)\,x(t)\,dt \quad \text{i} \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\xi(\lambda)\,x_\lambda(t)\,d\lambda, \tag{10.60}$$

analogi (10.58) i (10. 59), konvergiraju. Drugi od ovih integrala pokazuje da je onda operator A observabla. Ako, dakle, pretpostavimo da su relacije (10.60) ispravne, njihovim kombinovanjem lako dolazimo do:

$$\xi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty}\bar{x}_\lambda(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\xi(\lambda')\,x_{\lambda'}(t)\,d\lambda'\right]dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\xi(\lambda')\,d\lambda'\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{x}_\lambda(t)\,x_{\lambda'}(t)\,dt. \tag{10.61}$$

U drugoj jednakosti je izmenjen redosled integracije, što nije sasvim opravdano, jer integral po t divergira pri $\lambda = \lambda'$. Ipak pretpostavka da je operator A observabla znači da obe formule (10.61) treba da budu tačne, što nameće izvesna ograničenja na prirodu divergencije pomenutog integrala.

Zadržimo se detaljnije na ovom pitanju. U primenama je uobičajeno, mada ne i matematički sasvim korektno, da se u ovakvim slučajevima operiše sa tzv. *Dirac-ovom δ-funkcijom*. Ona po definiciji ima sledeće osobine:

$$\delta(\lambda - \lambda') = \begin{cases} 0, & \lambda' \neq \lambda \\ \infty, & \lambda' = \lambda, \end{cases} \tag{10.62}$$

i to tako da bude

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\lambda - \lambda')\,d\lambda' = 1. \tag{10.63}$$

Ovakve osobine su odabrane sa očevidnom namerom da δ-funkcija bude neka generalizacija Kronecker-ovog simbola (1.8). Ovu funkciju možemo zamisliti

* Nešto detaljnije o ovome se može naći u knjizi navedenoj u spisku literature pod rednim brojem 28, str. 385, kao i u knjizi pod rednim brojem 32, str. 338.

kao graničnu vrednost (u smislu konvergencije tačka po tačka) nekog niza funkcija koje su svugde jednake nuli osim u malom intervalu oko $\lambda'=\lambda$, gde imaju uzan i visok maksimum, takav da površina ispod svake od njih uvek ostaje jednaka jedinici kad se pomenuti interval sužava, zbog (10.63). To, na primer, mogu biti funkcije

$$g(\lambda', h)=\begin{cases} 0, & -\infty<\lambda'<\lambda-\frac{1}{2}h, \\ \frac{1}{h}, & \lambda-\frac{1}{2}h<\lambda'<\lambda+\frac{1}{2}h, \\ 0, & \lambda+\frac{1}{2}h<\lambda'<+\infty \end{cases}$$

i δ-funkcija nastaje u graničnom prelazu $h\to 0$. Kao posledica definicija (10.62) i (10.63) dobija se relacija:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda')\,\delta(\lambda-\lambda')\,d\lambda'=f(\lambda) \quad (10.65), \qquad (10.64)$$

i ako se ona uporedi sa (10.8) vidi se da se δ-funkcija može smatrati kao jezgro jediničnog integralnog operatora. Ispravnost napisane jednakosti (10.64) se može proveriti tako što će se uočiti da je integrand sa leve strane jednak nuli svugde osim u beskonačno malom intervalu oko $\lambda'=\lambda$, u kome se može smatrati da je $f(\lambda')\approx f(\lambda)$ i zatim iskoristiti (10.63).

Uporedimo (10.61) i (10.64). Ukoliko je ermitski operator A sa kontinuiranim spektrom svojstvenih vrednosti observabla, tj. ukoliko je relacija (10.61) ispravna, vidimo da svojstvene funkcije $x_\lambda(t)$ moraju zadovoljiti uslov:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}_\lambda(t)\,x_{\lambda'}(t)\,dt=\delta(\lambda'-\lambda) \qquad (10.65)$$

koji očevidno predstavlja *generalizaciju osobina ortonormiranosti* (9.18). Napisanom uslovu se može dati i nešto drukčiji oblik, ako se prva od relacija (10.60) uvrsti u drugu i izvrši izmena redosleda integracije:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x_\lambda(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{x}_\lambda(t')\,x(t')\,dt'\right]d\lambda=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\,dt'\int_{-\infty}^{+\infty} x_\lambda(t)\,\bar{x}_\lambda(t')\,d\lambda. \qquad (10.66)$$

Ukoliko je A observabla, i ove jednakosti moraju biti tačne. Upoređivanjem sa (10.64) konstatujemo da onda važi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}_\lambda(t')\,x_\lambda(t)\,d\lambda=\delta(t'-t). \qquad (10.67)$$

U literaturi se ova jednačina, koju moraju zadovoljavati svojstvene funkcije ermitskog operatora da bi on bio observabla, zove *uslov zatvorenosti*. Ona je vrlo podesna za brzo i efektivno utvrđivanje da li je skup svojstvenih funkcija $x_\lambda(t)$ nekog ermitskog operatora potpun.

Napomenimo na kraju da, strogo govoreći, funkcija sa osobinama (10.62) i (10.63) ne može postojati, jer su te osobine protivrečne. Zaista, integrandi u (10.63) i (10.64) se razlikuju od funkcije $F(\lambda')\equiv 0$ samo u jednoj tački, pa vrednosti integrala moraju biti jednaki nuli, kao što je već rečeno na kraju prethodne Glave u kratkom pregledu osobina Lebesgue-ovog integrala. Stoga treba voditi računa da se δ-„funkcija" može koristiti samo kao podesan instrument za brzo dobijanje rezultata, ali se ovi naknadno moraju strože proveriti. Za ovo proveravanje stoji na raspolaganju niz formalizama u kojima se na ovaj ili onaj način zaobilazi matematički nekorektna δ-funkcija. Među njima najznačajnije mesto zauzimaju Schwartz-ova *teorija distribucija* i von Neumann-ova *spektralna teorija operatora* pomoću kojih se rezultati ovog odeljka mogu strogo izvesti. U okviru ove knjige se ne možemo zadržavati na detaljnijem izlaganju ovih pojmova*.

Osnovna pravila za računanje sa δ-funkcijom se lako izvode na osnovu (10.63) i (10.64) i neka od njih su navedena u zadatku 10.15. Čitaocu se preporučuje da se sa njima upozna.

10.6. UNITARNI OPERATORI

Definicija i osnovne osobine. Kao što je već pomenuto, unitarni operatori su *linearni nesingularni operatori koji imaju osobinu da su im adjungovani i inverzni operator međusobno jednaki*,

$$U^+=U^{-1}, \qquad (10.68)$$

a da im se domen poklapa sa celim posmatranim prostorom. Odavde se neposredno vidi, imajući u vidu relaciju (10.25), da unitarni operator ima osobinu da *komutira sa svojim adjungovanim operatorom i proizvod ta dva operatora jednak je jediničnom operatoru*.

$$UU^+=U^+U=I. \qquad (10.69)$$

Napisana jednačina omogućava da utvrdimo da *unitarnom operatoru odgovara unitarna matrica*. Zaista, na osnovu relacija (10.40) i (10.44) za matrične elemente proizvoda operatora UU^+ imamo:

$$(UU^+)_{\mu\nu}=\sum_{\sigma=1}^{k}(U^+)_{\mu\sigma}(U^+)_{\sigma\nu}=\sum_{\sigma=1}^{k}(U)_{\mu\sigma}(\overline{U})_{\nu\sigma},$$

dok (10.69) tvrdi da mora biti

$$(UU^+)_{\mu\nu}=(I)_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}.$$

Kombinovanjem ovih rezultata nalazimo

$$\sum_{\sigma=1}^{k}(U)_{\mu\sigma}(\overline{U})_{\nu\sigma}=\delta_{\mu\nu}, \qquad (10.70)$$

što je identično sa jednačinom (5.26) za unitarne matrice. Treba zapaziti da je u navedenom dokazu bilo uzeto da operator U deluje u konačno dimenzionom prostoru (pri sumiranju indeks σ uzima vrednosti od 1 do k). Za beskonačno dimenzioni (Hilbertov) prostor dokaz je potpuno isti.

---

* Teorija distribucija je detaljno izložena u knjizi navedenoj u spisku literature pod rednim brojem 23, a spektralna teorija operatora se može naći u knjigama pod rednim brojem 19 i 31.

Istaknimo sledeće dve važne osobine unitarnih operatora.

Svaki unitarni operator je ograničen i norma mu je jednaka jedinici. To se neposredno vidi ako se napiše:

$$\|Ux\|^2=(Ux,Ux)=(x,U^+Ux)=(x,Ix)=(x,x)=\|x\|^2,$$

jer iz tih jednakosti proizilazi:

$$\|Ux\|=\|x\|. \tag{10.71}$$

Upoređivanjem sa (10.30) zaista nalazimo $\|U\|=1$. Pošto je linearan i ograničen, *unitarni operator je i neprekidan* (svaki linearni i ograničen operator je neprekidan), tako da se osnovna osobina linearnosti operatora (10.2) može proširiti i na beskonačne sume kod je u pitanju unitaran operator.

Sve svojstvene vrednosti unitarnog operatora su po modulu jednake jedinici. Zaista, ako je x svojstveni element unitarnog operatora U koji pripada svojstvenoj vrednosti λ, $Ux=\lambda x$, imaćemo, vodeći računa o osobini (9.7) skalarnog proizvoda,

$$(Ux,Ux)=(\lambda x,\lambda x)=|\lambda|^2(x,x), \tag{10.72}$$

dok iz (10.71) sledi da je $(Ux,Ux)=(x,x)$. Upoređivanjem ta dva izraza odmah nalazimo da mora biti $|\lambda|^2=1$ tj. $|\lambda|=1$, što je trebalo pokazati.

Unitarne transformacije. Neka je U dat unitarni operator koji deluje u posmatranom unitarnom ili Hilbertovom prostoru. Kažemo da smo u tom prostoru izvršili *unitarnu transformaciju*, ako svakom elementu x prostora koordiniramo element Ux.

Unitarne transformacije imaju izvesne interesantne osobine koje opravdavaju njihovo detaljnije proučavanje. Tako, recimo, jednačina (10.71) pokazuje da *pri unitarnim transformacijama norma elementa ostaje nepromenjena.* Ovaj se zaključak može generalisati, ako se uzme u obzir da je uopšte:

$$(Ux,Uy)=(x,U^+Uy)=(x,Iy)=(x,y), \tag{10.73}$$

tako da *pri unitarnim transformacijama skalarni proizvod ostaje invarijantan.* Specijalno, dva uzajamno ortogonalna elementa posmatranog prostora unitarnom transformacijom prelaze u uzajamno ortogonalne elemente. To znači da *elementi jedne ortonormirane baze prostora* $\{x_\nu\}$ *unitarnom transformacijom prelaze u elemente neke druge ortonormirane baze,* $\{x'_\nu\}$ odnosno $\{Ux_\nu\}$. Lako se dokazuje i obrnuto tvrđenje: transformacija $x'_\nu=Bx_\nu$ kojom se elementi $\{x_\nu\}$ jedne ortonormirane baze prevode u elemente druge baze $\{x'_\nu\}$ mora biti unitarna (v. zadatak 9.10). Nađene osobine unitarnih transformacija pokazuju da one imaju sličnosti sa ranije razmatranim rotacijama pravouglih koordinatnih sistema u trodimenzionom prostoru, jer i pri ovim transformacijama dužine vektora i uglova među njima ostaju nepromenjeni.

Neka je A dati linearni operator koji se može primeniti na elemente posmatranog prostora (unitarnog ili Hilbertovog), i neka je $\{x_\nu\}$ jedna ortonormirana baza u tom prostoru. Unitarnim operatorom U možemo uvesti nove elemente baze, $x'_\nu=Ux_\nu$. Nađimo, prema (10.37), matrične elemente operatora A u staroj i u novoj bazi:

$$(A)_{\mu\nu}=(x_\mu,Ax_\nu),\quad (A)_{\mu'\nu'}=(x'_\mu,Ax'_\nu)=(Ux_\mu,AUx_\nu)=(x_\mu,U^+AUx_\nu). \tag{10.74}$$

Odavde se vidi da su *matrični elementi operatora A u novoj bazi istovetni sa matričnim elementima operatora U^+AU u staroj bazi.* To omogućuje nalaženje matričnih elemenata datog operatora u bilo kojoj bazi, ako su poznati matrični elementi tog operatora u jednoj bazi i operator U kojim se ostvaruje prelaz iz jedne baze u drugu. Nije teško videti da je ovaj rezultat neposredna generalizacija formule (4.10) za izračunavanje komponenata tenzora pri rotacijama koordinatnog sistema.

Relacija (10.74) pruža takođe mogućnost za efektivno određivanje svojstvenih elemenata i svojstvenih vrednosti datog *potpuno neprekidnog ermitskog* operatora A. Prema ranije rečenom, njegovi svojstveni elementi se mogu uzeti za bazu (ortonormiranu) prostora, i njegova matrica će u toj bazi biti dijagonalna i imaće svojstvene vrednosti na glavnoj dijagonali. Zaista, ako potpun i ortonormiran skup svojstvenih elemenata datog potpuno neprekidnog ermitskog operatora označimo sa $\{x''_\nu\}$, imaćemo:

$$(A)_{\mu''\nu''}=(x''_\mu,Ax''_\nu)=(x''_\mu,\lambda_\nu x''_\nu)=\lambda_\nu(x''_\mu,x''_\nu)=\lambda_\nu\delta_{\mu\nu}. \tag{10.75}$$

Prema jednačini (10.74), matrica operatora U^+AU će onda imati dijagonalan oblik u bilo kojoj bazi, ako je U unitarni operator koji će tu proizvoljno odabranu bazu prevesti u svojstvenu bazu posmatranog operatora. Da bi se, dakle, našli svojstveni elementi i svojstvene vrednosti operatora A, treba najpre proizvoljno odabrati jednu potpunu i ortonormiranu bazu $\{x_\nu\}$, a zatim naći unitaran operator U takav da operator U^+AU ima u toj bazi dijagonalnu matricu. Elementi na dijagonali će onda predstavljati svojstvene vrednosti operatora A, a svojstveni elementi će biti $x''_\nu=Ux_\nu$. Taj postupak je poznat kao *dijagonalizacija matrice* operatora. U beskonačno dimenzionalnim prostorima, gde se svojstveni problem ne može rešavati pomoću jednačine analoge (10.42), ovaj postupak se u praksi često primenjuje.

Izlaganje vezano sa unitarne transformacije završićemo napomenom o izmenama koje ova transformacija unosi u osnovnu operatorsku jednačinu (10.1), $y=Ax$. U praksi se pri tom obično zauzimaju dva stanovišta, zavisno od konkretnih ciljeva. U jednom slučaju uzima se da unitarni operator U vrši *transformaciju celog prostora*, tj. svakom elementu x pridružuje element $x'=Ux$. U tom slučaju, iz (10.1) i (10.69) dobijamo:

$$\begin{aligned} y'=Uy=U(Ax)=(UA)x=(UA)(U^+U)x=(UAU^+)(Ux)=\\ =(UAU^+)x', \end{aligned} \tag{10.76}$$

odakle čitamo da se operator A pri ovakvoj transformaciji zamenjuje operatorom $A'=UAU^+$. Kažemo da su operatori A i $A'=UAU^+$ *unitarno ekvivalentni.* Operator A' ima iste komponente u odnosu na bazu $\{x'_\nu\}$ tj. $\{Ux_\nu\}$, kao i operator A u odnosu na bazu $\{x_\nu\}$. Zaista,

$$(UAU^+)_{\mu'\nu'}=(x_{\mu'},UAU^+x'_\nu)=(Ux_\mu,(UAU^+)Ux_\nu)=(x_\mu,Ax_\nu)=(A)_{\mu\nu}.$$

Drugi u praksi često primenjivani aspekt unitarne transformacije je da se operatorom U izvrši *samo transformacija baze* $\{x_\nu\}\to\{Ux_\nu\}$. Zapazimo da se jednačina (10.36) koja prikazuje relaciju $y=Ax$ u matričnom obliku može prepisati kao

$$F_\mu=\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_{\mu\nu}f_\nu \quad \text{tj.} \quad (x_\mu,y)=\sum_{\nu=1}^{\infty}(x_\mu,Ax_\nu)(x_\nu,x),$$

jer su F_ν i f_ν Fourier-ovi koeficijenti elemenata y i x, pa za njih važi definicija (9.24) dok za matrične elemente možemo iskoristiti (10.37). Očevidno je je da ćemo analogu relaciju moći pisati i u transformisanoj bazi,

$$(x'_\mu, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(x'_\mu, Ax'_\nu)(x'_\nu, x), \tag{10.77}$$

pri čemu će matrični elementi operatora biti određeni iz (10.74). Izvedena relacija pokazuje, dakle, da u ovom slučaju operator A treba zameniti operatorom $A'' = U^+AU$, u skladu sa (10.77).

U literaturi se ova dva stanovišta često označavaju kao *„aktivni"* i *„pasivni"* *aspekt* unitarne transformacije, ili aspekt *„alibi"* i *„alias"*. Prvi od njih odgovara transformaciji celog prostora zajedno sa bazom, a drugi transformaciji samo baze, pri čemu svi ostali elementi prostora ostaju nepromenjeni, ali dobijaju nove komponente (tj. nove Fourier-ove koeficijente). Na primer pri razmatranju transformacionih svojstava vektora i tenzora u Glavama 1. i 4. bio je korišćen pasivni aspekt.

10.7. DIRAC-OVA NOTACIJA KVANTNOMEHANIČKIH VELIČINA

„Bra" i „ket" vektori. Radi upotpunjavanja sadržaja poslednje dve Glave, opisaćemo ukratko jedan alternativni sistem notacije elemenata i operatora u Hilbertovom (ili u unitarnom) prostoru, koji je predložio Dirac*. Dirac-ove oznake su veoma uobičajene u kvantnomehaničkoj literaturi, i zbog toga su nam na ovom mestu od interesa. One imaju tu prednost da veoma naglašavaju analogiju između prostora klasičnih vektora sa tenzorima kao linearnim operatorima i ma kog drugog unitarnog ili Hilbertovog prostora. Konkretnosti radi, u ovom odeljku ćemo uvek govoriti o Hilbertovom prostoru i sve jednačine pisati za beskonačno dimenzioni slučaj. Dobijanje analogih jednačina za unitarne (konačno dimenzione) prostore je trivijalno.

Neka je H jedan Hilbertov prostor i $\{x_\nu\}$ jedan *potpun* skup ortonormiranih elemenata (ortonormirana baza) u njemu. Ma koji element $x \in H$ se, na osnovu rezultata Glave 9, može pisati u obliku $x = \circ\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu x_\nu$, gde su $f_\nu = (x_\nu, x)$ njegovi Fourier-ovi koeficijenti u odnosu na ukazanu ortonormiranu bazu. Prema Dirac-ovom predlogu, elementu x pridružujemo jednu *matricu-kolonu* čiji se elementi poklapaju sa njegovim Fourier-ovim koeficijentima [ovakvo pridruživanje je već bilo primenjeno u jednačini (10.36)] i jednu *matricu-vrstu*, sastavljenu od konjugovano-kompleksnih vrednosti ovih koeficijenata. Pri ovome, za matricu-vrstu Dirac predlaže naziv *„bra"-vektor* i oznaku $\langle x|$, a za matricu kolonu naziv *„ket-vektor* i oznaku $|x\rangle$ (i ranije smo u nekoliko navrata istakli da se elementi ma kog Hilbertovog prostora često zovu vektori). Dakle:

$$\langle x| = (\bar{f}_1\,\bar{f}_2\ldots), \qquad |x\rangle = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{10.78}$$

* V. knjigu P. A. M. Dirac, THE PRINCIPLES OF QUANTUM MECHANICS, izd. „The Clarendon Press", Oxford, 1958, paragrafi 6—8.

Obično se kraće kaže samo „bra" ili „ket" elementa $x \in H$ (u odnosu na ortonormiranu bazu $\{x_\nu\}$). Nazivi potiču od prvog i drugog sloga engleske reči „bracket" (zagrada). Relacije (10.78) su neposredna generalizacija formula (5.27) kod običnih vektora.

Skalarni proizvod. Ako se „bra" jednog elementa $x \in H$ pomnoži, prema pravilima matričnog množenja, sa „ketom" nekog drugog elementa $y \in H$, dobija se:

$$\langle x|y\rangle = (\bar{f}_1\,\bar{f}_2\ldots)\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \bar{f}_1 g_1 + \bar{f}_2 g_2 + \cdots = (x, y). \tag{10.79}$$

U potpunoj saglasnosti sa relacijom (5.28) kod klasičnih vektora i sa Parseval-ovom jednačinom (9.54) opisano množenje daje skalarni proizvod (x, y). Naglasimo da se za skalarni proizvod u Dirac-ovim oznakama piše $\langle x|y\rangle$, tj. ne stavljaju se dve vertikalne crte u sredini.

Neka je A neki linearni operator u H. U Dirac-ovim oznakama se dosta često stavlja $|A|$, naglašavajući sa dve vertikalne crte da je napisana veličina operator. Uopšte, svaki izraz bilo kakve strukture će biti operator, ako mu sa obe strane stoje vertikalne crte. Ako se izraz nalazi između znakova $\langle\ \rangle$, on je obavezno skalar, dok $\langle\,|$ ili $|\,\rangle$ označava da se radi o vektoru. Na primer, za Ax se piše $|A|x\rangle$, i iz ove oznake se vidi da je taj izraz jedan „ket"-vektor. Slično, izraz (x, Ay) se označava $\langle x|A|y\rangle$, i znaci $\langle\ \rangle$ pokazuju da se radi o skalaru. Čitaocu neće biti teško da u relaciji

$$\langle x|A|y\rangle = \overline{\langle y|A^+|x\rangle} \tag{10.80}$$

prepozna jednu varijantu jednačine (10.43), a u $\alpha_{\mu\nu} = \langle x_\mu|A|x_\nu\rangle$ vidi drukčije notiranu jednačinu (10.37).

Dijadski proizvod. Posmatrajmo sad izraz oblika $|x\rangle\langle y|$, tj. proizvod u kome je, nasuprot skalarnom proizvodu, prvi element prikazan kao „ket", a drugi kao „bra". Prema pravilima matričnog množenja, ovakav proizvod ima smisla (dok proizvod dva „bra"-vektora ili dva „ket"-vektora, očevidno, nema) i eksplicitnog je oblika:

$$|x\rangle\langle y| = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \end{pmatrix}(\bar{g}_1\,\bar{g}_2\cdots) = \begin{pmatrix} f_1\bar{g}_1 & f_1\bar{g}_2 & \cdots \\ f_2\bar{g}_1 & f_2\bar{g}_2 & \cdots \\ \cdots & & \cdots \end{pmatrix}, \tag{10.81}$$

tj. predstavlja jednu beskonačnu matricu, koju treba shvatiti kao reprezentaciju (10.37) jednog operatora u ortonormiranoj bazi $\{x_\nu\}$, kako se vidi i po tome što je izraz ograničen dvema vertikalnim crtama. U zadatku 5.26. je pokazano da analogi postupak kod klasičnih vektora daje dijadski proizvod. Zbog toga ćemo i u Hilbertovom prostoru izraz $|x\rangle\langle y|$ zvati *dijadski proizvod*. Zaista, osnovna osobina dijadskog proizvoda kod običnih vektora, izražena jednačinom (4.11), postoji i kod ovde posmatranog dijadskog proizvoda. Zbog asocijativnosti matričnog množenja, imamo:

$$\begin{aligned} (|x\rangle\langle y|)|z\rangle &= |x\rangle(\langle y|z\rangle), \\ \langle z|(|x\rangle\langle y|) &= (\langle z|x\rangle)\langle y|. \end{aligned} \tag{10.82}$$

Zapazimo da su izrazi u zagradi sa desne strane skalari, tako da je prvi rezultat „ket", a drugi „bra".

Prikazivanje operatora. Ako je $\{X_\nu\}$ dati skup elemenata Hilbertovog prostora, kojih ima tačno onoliko koliko i u skupu $\{x_\nu\}$ (ortonormiranoj bazi) i koji ne moraju nužno biti ortonormirani ili uopšte linearno nezavisni, onda pomoću njih možemo obrazovati sumu (u smislu matričnog sabiranja) oblika $\sum_{\nu=1}^{\infty} |X_\nu\rangle\langle x_\nu|$. Taj izraz predstavlja jednu beskonačnu matricu kod koje se u μ-toj koloni nalaze Fourier-ovi koeficijenti elementa X_μ. To je lako videti, jer jedan izdvojen sabirak napisane sume (na primer za $\nu=2$) ima eksplicitan oblik:

$$|X_2\rangle\langle x_2| = \begin{pmatrix} f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \\ \vdots \end{pmatrix} (0\ 1\ 0\ \cdots) = \begin{pmatrix} 0 & f_{21} & 0 & \cdots \\ 0 & f_{22} & 0 & \cdots \\ 0 & f_{23} & 0 & \cdots \\ \cdots & & & \cdots \end{pmatrix},$$

pa se sabiranjem ovakvih matrica očevidno dobija beskonačna matrica sa navedenom osobinom. Poređenjem sa jednačinom (10.36) možemo zaključiti da $\sum_{\nu=1}^{\infty} |X_\nu\rangle\langle x_\nu|$ predstavlja jedan linearan operator:

$$|A| = \sum_{\nu=1}^{\infty} |X_\nu\rangle\langle x_\nu|. \tag{10.83}$$

Napisana relacija je neposredni analogon formule (4.14) koja prikazuje tenzore u obliku sume tri dijadska proizvoda (tri zato što je prostor trodimenzioni), u kojima su konsekventi jedinični vektori koordinatnih osa. Štaviše, zbog ortonormiranosti elemenata baze $\{x_\nu\}$, imaćemo:

$$\begin{aligned} |A|x_\mu\rangle &= \Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} |X_\nu\rangle\langle x_\nu|\Big)|x_\mu\rangle = \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} |X_\nu\rangle(\langle x_\nu|x_\mu\rangle) = \sum_{\nu=1}^{\infty} |X_\nu\rangle\,\delta_{\nu\mu} = \\ &= |X_\mu\rangle, \end{aligned} \tag{10.84}$$

što bi se u standardnim oznakama korišćenim u ovoj knjizi pisalo kao $Ax_\mu = X_\mu$, tako da su $\{X_\nu\}$ *elementi Hilbertovog prostora koje operator A pridružuje elementima baza*. Ovo je potpuno analogo koordinatnim vektorima $\mathbf{T}_k$ kod tenzora. Na osnovu ove analogije zaključujemo dalje da ako su elementi skupa $\{X_\nu\}$ *linearno nezavisni* (tj. ako bi se Schmidt-ovim postupkom ortogonalizacije taj skup mogao zameniti jednim *potpunim* ortonormiranim skupom), onda operator (10.83) *ceo* prostor H preslikava u *ceo* prostor H. Ako su, pak, pomenuti elementi linearno zavisni, onda operator preslikava prostor H u jedan njegov potprostor, i to onaj koji je određen linearno nezavisnim elementima iz $\{X_\nu\}$. Situacija je potpuno ista kao kod linearnih i planarnih afinora, a gornje tvrđenje se formalno vidi iz:

$$\begin{aligned} |A|x\rangle &= \Big(\sum_{\mu=1}^{\infty} |X_\mu\rangle\langle x_\mu|\Big)\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu|x_\nu\rangle\Big) = \\ &= \sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} f_\nu|X_\mu\rangle\langle x_\mu|x_\nu\rangle = \sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} f_\nu|X_\mu\rangle\,\delta_{\mu\nu} = \\ &= \sum_{\mu=1}^{\infty} f_\mu|X_\mu\rangle, \end{aligned}$$

gde su f_ν Fourier-ovi koeficijenti elementa $|x\rangle$, a krajnji rezultat se dobija u obliku linearne kombinacije elemenata $\{X_\nu\}$. Ako su oni linearno nezavisni i ekvivalentni (u smislu Schmidt-ovog postupka) jednom *potpunom* ortonormiranom sistemu elemenata, onda se skup elemenata $|A|x\rangle$ poklapa sa celim Hilbertovim prostorom.

Relacija (10.83) navodi nas na zaključak da će *adjungovani operator* biti oblika

$$|A^+| = \sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu\rangle\langle X_\nu|, \tag{10.85}$$

jer to sasvim doslovno odgovara relaciji (4.27). Ispravnost ovog zaključka se vidi iz sledećih transformacija:

$$\begin{aligned} \langle x|A|y\rangle &= \langle x|\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} |X_\nu\rangle\langle x_\nu|\Big)|y\rangle = \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty}\langle x|X_\nu\rangle\langle x_\nu|y\rangle = \sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{\langle y|x_\nu\rangle}\,\overline{\langle X_\nu|x\rangle} = \\ &= \overline{\langle y|\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu\rangle\langle X_\nu|\Big)|x\rangle}, \end{aligned} \tag{10.86}$$

dok bismo iste transformacije u standardnim oznakama pisali

$$(x, Ay) = (A^+x, y) = \overline{(y, A^+x)},$$

pa upoređivanjem dvaju krajnjih izraza vidimo da je jednačina (10.85) zaista tačna.

Jedinični operator u Dirac-ovim oznakama ima oblik:

$$|I| = \sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu\rangle\langle x_\nu|, \tag{10.87}$$

koji odgovara relaciji (4.40) kod tenzora. Naime, očevidno je:

$$\begin{aligned} |I|x\rangle &= \Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu\rangle\langle x_\nu|\Big)|x\rangle = \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu\rangle(\langle x_\nu|x\rangle) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\langle x_\nu|x\rangle)|x_\nu\rangle = \\ &= |x\rangle, \end{aligned} \tag{10.88}$$

pošto se poslednja suma lako identifikuje kao Fourier-ov razvoj (9.52) u Dirac-ovim oznakama.

Unitaran operator se piše kao

$$|U| = \sum_{\nu=1}^{\infty} |x'_\nu\rangle\langle x_\nu| \tag{10.89}$$

gde je $\{x'_\nu\}$ potpun ortonormiran skup elemenata iz H. Prema (10.84), napisani operator vrši unitarnu transformaciju baze $\{x_\nu\}$ u bazu $\{x'_\nu\}$. Da bismo proverili da je (10.89) zaista obavezno unitaran operator, posmatraćemo proizvod:

$$|U^+U| = \sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu\rangle\langle x'_\nu| \sum_{\mu=1}^{\infty} |x'_\mu\rangle\langle x_\mu| =$$

$$= \sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} |x_\nu\rangle\langle x'_\nu | x'_\mu\rangle\langle x_\mu| = \sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} |x_\nu\rangle\delta_{\nu\mu}\langle x_\mu| =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu\rangle\langle x_\nu| = |I|, \tag{10.90}$$

(i analogo $|UU^+| = |I|$), što je istovetno sa (10.69) i predstavlja potreban i dovoljan uslov da posmatrani operator bude unitaran. Analogija sa unitarnim tenzorima oblika (4.54), gde koordinatni vektori takođe moraju biti ortonormirani, potpuno je očevidna. Razume se, postoje i neke manje razlike. Kod klasičnih tenzora smo razlikovali *verzore* (koji opisuju samo rotaciju koordinatnog sistema) i *perverzore* (koji opisuju složeniju unitarnu transformaciju, kombinovanu od rotacije koordinatnog sistema i ogledanja jedne ili sve tri koordinatne ose pri čemu desni koordinatni trijedar prelazi u levi). U Hilbertovom prostoru nema potrebe za ovakvim razlikovanjima, i ***sve unitarne transformacije su „rotacije"***.

Detaljnije razmatranje svih odnosa kod operatora u Hilbertovom prostoru pomoću Dirac-ovih oznaka neće biti neophodno. Gornji primeri su dovoljni da pomognu čitaocu u korišćenju monografija i udžbenika čiji autori koriste Dirac-ovu notaciju.

Naglasimo, na kraju, da Dirac-ov način pisanja odgovara onome što smo u Glavi I. nazvali simboličkim metodom računanja sa matematičkim veličinama, dok prikazivanje elemenata prostora i operatora matricama odgovara koordinatnom metodu.

Z A D A C I

10.1. Neka su $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ i $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ elementi prostora l_2. Pokazati da relacije

(a) $\displaystyle \eta_k = \frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\xi_j,$ (b) $\displaystyle \eta_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\xi_j$

definišu linearne ograničene operatore u ovom prostoru.

10.2. Pokazati da su operatori iz prethodnog zadatka ermitski i da im se spektar svojstvenih vrednosti sastoji od samo po jedne tačke.

10.3. U prostoru $L_2(-1, 1)$ dati su Fredholm-ov integralni operator A sa jezgrom $K(t, s) = t^2 - st + 2s^2$ i *operator inverzije* B definisan uslovom $Bx(t) = x(-t)$. Naći njihov komutator i antikomutator i pokazati da su oni ograničeni.

10.4. Ako su A i B ograničeni operatori, onda su $C = A \hat{+} B$ i $D = AB$ takođe ograničeni operatori za koje važe uslovi $\|C\| \le \|A\| + \|B\|$, $\|D\| \le \|A\| \, \|B\|$. Dokazati.

10.5. Naći normu klasičnog tenzora

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

shvatajući ga kao operator u prostoru klasičnih vektora. Kako bi se dobijeni rezultat mogao generalisati kod potpuno neprekidnih linearnih operatora u Hilbertovom prostoru?

10.6. Proveriti jednakosti (10.45) i (10.46) kod adjungovanih operatora.

10.7. Neka su A i A^+ dva uzajamno adjungovana operatora u k-dimenzionom unitarnom prostoru. Označimo sa $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ i $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_k$ njihove svojstvene vrednosti, a sa $x_1, x_2, \ldots, x_k$ i $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k$ pripadajuće svojstvene elemente.
(a) Dokazati da su korespondentne svojstvene vrednosti uzajamno konjugovano-kompleksne, tj. da za svako $\nu = 1, 2, \ldots, k$ važi $\lambda'_\nu = \bar{\lambda}_\nu$.

(b) Svaki svojstveni element jednog od tih operatora je ortogonalan na sve svojstvene elemente drugog, osim na element (ili elemente) koji odgovara konjugovano-kompleksnoj svojstvenoj vrednosti.

10.8. Ako je A ma kakav linearni operator, proizvodi AA^+ i A^+A su ermitski operatori, čije su sve svojstvene vrednosti pozitivne. Ako je, uz to, A ograničen operator, onda su i operatori AA^+ i A^+A takođe ograničeni i za njih važi $\|AA^+\| = \|A^+A\| = \|A\|^2$. Dokazati ova tvrđenja.

10.9. Proveriti relacije (10.25) i (10.26) kod inverznih operatora.

10.10. U kakvom su međusobnom odnosu svojstvene vrednosti linearnih operatora A i A^{-1}?

10.11. Dokazati da inverznom operatoru u unitarnom prostoru odgovara inverzna matrica.

10.12. U prostoru matrica tipa 2×2 dati su *operator transpozicije* $\mathcal{M}$ i *operator zamene vrsta* Z, definisani relacijama:

$$\mathcal{M}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad Z\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}.$$

Pokazati da su oni ermitski i ograničeni operatori i naći njihove svojstvene vrednosti i svojstvene matrice. Prikazati zatim svaki od ovih operatora u potpunoj ortonormiranoj bazi koju obrazuju svojstveni elementi drugog operatora.

10.13. U prostoru $L_2(-1, 1)$ dat je Fredholm-ov integralni operator sa jezgrom $K(t, s) = t^2 + 3ts + s^2$. Naći njegove svojstvene vrednosti i svojstvene funkcije.

10.14. U prostoru $L_2(0, 1)$ dat je linearni operator A definisan relacijom $\displaystyle Ax(t) = t^2\frac{d^2x}{dt^2} + 3t\frac{dx}{dt} + x.$ Naći njegove svojstvene vrednosti i svojstvene funkcije.

14*

10.15. Pri računanju sa Dirac-ovom δ-funkcijom mogu se primenjivati sledeća pravila:

(a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-t)\,\delta(s-t)\,dt = \delta(x-s),$

(b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{d}{dt}\,\delta(x-t)\,dt = -f'(x),$

(c) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{d}{dx}\,\delta(x-t)\,dt = f'(x),$

(d) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta\,[x-F(t)]\,dt = \left[\frac{f(\xi)}{F'(\xi)}\right]_{F(\xi)=x}.$

Proveriti da se ova pravila mogu smatrati posledicama definicionih relacija δ-funkcije (10.62) i (10.63)

REŠENJA ZADATAKA

REŠENJA ZADATAKA

1. VEKTORSKA ALGEBRA

1.1. Označimo sa φ_1 i φ_2 uglove koje vektor $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ zaklapa sa $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ respektivno, tako da imamo:

$$\cos\varphi_1=\frac{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})}{|\mathbf{A}||\mathbf{A}+\mathbf{B}|}, \qquad \cos\varphi_2=\frac{\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})}{|\mathbf{B}||\mathbf{A}+\mathbf{B}|}.$$

Pošto prema uslovu zadatka treba da bude $\cos\varphi_1=\cos\varphi_2$, imaćemo

$$\frac{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})}{|\mathbf{A}||\mathbf{A}+\mathbf{B}|}=\frac{\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})}{|\mathbf{B}||\mathbf{A}+\mathbf{B}|},$$

odnosno:

$$\frac{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})}{|\mathbf{A}|}=\frac{\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})}{|\mathbf{B}|}.$$

Oslobađanjem od razlomka i sređivanjem nalazimo:

$$|\mathbf{A}||\mathbf{B}|(|\mathbf{A}|-|\mathbf{B}|)=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})(|\mathbf{A}|-|\mathbf{B}|).$$

Poslednja jednakost može biti zadovoljena u dva slučaja. Prvo, ako je $|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|$ (vektori jednakih intenziteta), i, drugo, ako je $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, tj. $\cos(\mathbf{A},\mathbf{B})=1$ (vektori kolinearni i istog smera). Oba slučaja su geometrijski očevidna. Naime, ako su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ vektori jednakog intenziteta, oni obrazuju paralelogram sa jednakim stranama (kvadrat ili romb), a za svaki takav paralelogram se u elementarnoj planimetriji dokazuje da su dijagonale bisektrise uglova čija temena spajaju. Ako su, pak, $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ kolinearni i istog smera, ugao između njih je nula, a toliki je i ugao koji svaki od njih zaklapa sa $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

1.2. Kvadriramo li zadatu jednakost, dobijamo

$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}|^2=|\mathbf{A}-\mathbf{B}|^2,$$

što se može prikazati pomoću skalarnog proizvoda kao:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2,$$

odnosno:

$$A^2+2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+B^2=A^2-2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+B^2,$$

tako da se neposredno nalazi

$$4\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0.$$

Dakle, da bi intenzitet zbira dva vektora bio jednak intenzitetu njihove razlike, oni moraju biti ortogonalni. I ovaj rezultat je geometrijski očevidan, jer kod paralelograma sa pravim uglovima (kvadrat, pravougaonik) obe dijagonale su jednake dužine.

1.3. Prema formuli (1.24) možemo pisati:

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}=$$

$$=\frac{(P\cos\varphi\,\mathbf{e}_1+P\sin\varphi\,\mathbf{e}_2)(S\cos\varphi\,\mathbf{e}_1-S\sin\varphi\,\mathbf{e}_2)}{\sqrt{P^2\cos^2\varphi+P^2\sin^2\varphi}\,\sqrt{S^2\cos^2\varphi+S^2\sin^2\varphi}}=\frac{PS(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}{PS}=\cos 2\varphi.$$

(Kakva je geometrijska interpretacija ovog rezultata ?). Označimo li površinu paralelograma nad $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ sa Q, možemo na osnovu definicije vektorskog proizvoda pisati $Q=|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$. Izračunajmo najpre

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ P\cos\varphi & P\sin\varphi & 0\\ S\cos\varphi & -S\sin\varphi & 0\end{vmatrix}=-2\,PS\sin\varphi\cos\varphi\,\mathbf{e}_3.$$

Odavde je, onda,

$$Q=2\,PS\sin\varphi\cos\varphi=PS\sin 2\varphi.$$

1.4. Uslovi zadatka se svode na jednačine $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$ i $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=0$, koji se prema (1.27) mogu eksplicitno napisati kao:

$$-2+4\lambda+2\mu=0,$$

$$6-3\lambda-\mu=0.$$

Rešenja ovog sistema su, kao što je lako proveriti,

$$\lambda=5,\qquad \mu=-9,$$

što znači da je traženi vektor $\mathbf{A}=(2,\ 5,\ -9)$. Njegov intenzitet je:

$$|\mathbf{A}|=\sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}=\sqrt{4+25+81}=\sqrt{110}.$$

Traženi uglovi se mogu naći kao u prethodnom zadatku, uzimajući u obzir da je $\mathbf{B}+\mathbf{C}=(2,\ 1,\ 1)$ i $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=(4,\ 6,\ -8)$. Rezultati su

$$\cos\varphi_1=0,\qquad \cos\varphi_2=\sqrt{\frac{110}{116}}.$$

1.5. Zadati uslovi ortogonalnosti se pomoću skalarnog proizvoda mogu napisati u obliku:

$$(2\,\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=0,$$

$$(\mathbf{A}-2\,\mathbf{B})\cdot(2\,\mathbf{A}+\mathbf{B})=0.$$

Nakon množenja i sređivanja (koristeći distributivnost i komutativnost skalarnog proizvoda), imaćemo:

$$2\,A^2-B^2+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0,$$

$$2\,A^2-2\,B^2-3\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0.$$

Podelimo obe jednačine sa proizvodom intenziteta vektora $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, i uvedimo oznaku $\frac{A}{B}=x$. Tako dobijamo:

$$2\,x-\frac{1}{x}+\cos\theta=0,$$

$$2\,x-2\cdot\frac{1}{x}-3\cos\theta=0,$$

gde je $\cos\theta=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}$ upravo veličina koja nas interesuje u zadatku. Eliminišimo, stoga, iz gornje dve jednačine veličinu x. Najpodesnije je, u tom cilju, drugu jednačinu oduzeti od prve, nakon čega se dobija $x=-\frac{1}{4\cos\theta}$, pa ovaj rezultat uvrstiti u bilo koju od dve jednačine. Tako se dobija $\cos^2\theta=\frac{1}{10}$ tj. $\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$. U obzir dolazi samo rešenje sa negativnim predznakom, jer veličina $x=-\frac{1}{4\cos\theta}$ mora biti pozitivna. Dakle, definitivno, $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$.

1.6. Da bi $\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$ bilo normalno na $\mathbf{C}$, treba da bude ispunjen uslov

$$(\mathbf{A}+\lambda\,\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=0,$$

odakle se, nakon skalarnog množenja, dobija

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}-\lambda\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}=0.$$

Ako vektori $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ nisu uzajamno ortogonalni, zadatak ima jednoznačno rešenje

$$\lambda=-\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}}.$$

Ukoliko su ova dva vektora uzajamno ortogonalna, zadatak ili nema rešenja (ako $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C}$ nisu ortogonalni), ili ima beskonačno mnogo rešenja (ako ova dva poslednja vektora zaklapaju pravi ugao).

Da bi $\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$ bilo kolinearno sa $\mathbf{C}$, treba da bude:

$$(\mathbf{A}+\lambda\,\mathbf{B})\times\mathbf{C}=0,$$

tj.

$$\mathbf{A}\times\mathbf{C}=-\lambda\,\mathbf{B}\times\mathbf{C}. \qquad (R.\ 1.1)$$

Dobijena relacija među trima vektorima može postojati samo ako su oni komplanarni, što se može lako dokazati skalarnim množenjem leve i desne strane sa $\mathbf{B}$. Tako se, naime, dobija

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{B}=-\lambda(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{B}=0,$$

pri čemu je desna strana identički jednaka nuli, jer su dva vektora u mešovitom proizvodu jednaka, pa se posmatrana relacija svodi samo na $(\mathbf{A}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{B}=0$, što je uslov komplanarnosti.

Neka su, dakle, **A**, **B** i **C** komplanarni. Skalarnim množenjem jednačine (*R.* 1.1) sa $(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ nalazimo:

$$\lambda=-\frac{(\mathbf{A}\times\mathbf{C})\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})}{(\mathbf{B}\times\mathbf{C})^2},$$

a množenjem sa $(\mathbf{A}\times\mathbf{C})$ slično dobijamo:

$$\lambda=-\frac{(\mathbf{A}\times\mathbf{C})^2}{(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C})}.$$

Obe dobijene vrednosti za λ su jednake upravo zbog komplanarnosti vektora **A**, **B** i **C**, što nije teško proveriti.

1.7. Tri vektora su linearno zavisni ukoliko su komplanarni, tj. ukoliko je njihov mešoviti proizvod jednak nuli. Na osnovu (1.38) možemo, dakle, pisati:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 1 & \alpha & -1 \\ 3 & 1 & \dfrac{\alpha}{2} \end{vmatrix}=0.$$

Razvijanjem ove determinante i sređivanjem, dobija se sledeća kvadratna jednačina za određivanje parametra α:

$$5\alpha^2-3\alpha-8=0.$$

Njena rešenja su, kao što se odmah vidi,

$$\alpha_1=\frac{8}{5},\qquad \alpha_2=-1,$$

tako da postoje sledeće dve mogućnosti:

$$\mathbf{A}'=\left(1,\ -1,\ \frac{8}{5}\right),\quad \mathbf{B}'=\left(1,\ \frac{8}{5},\ -1\right),\quad \mathbf{C}'=\left(3,\ 1,\ \frac{8}{10}\right);$$

$$\mathbf{A}''=(1,\ -1,\ -1),\quad \mathbf{B}''=(1,\ -1,\ -1),\quad \mathbf{C}''=\left(3,\ 1,\ -\frac{1}{2}\right).$$

U prvom slučaju je $19\,\mathbf{A}'+20\,\mathbf{B}'-13\,\mathbf{C}'=0$, a u drugom $\mathbf{A}''-\mathbf{B}''=0$ (kako se mogu naći ovi koeficijenti?), što pokazuje da su ovi vektori zaista linearno zavisni. Uglovi među njima se mogu naći po analogiji sa zadacima 1.3 i 1.4, tako da se na ovome nećemo zadržavati.

1.8. Koristeći zakone distribucije i alternacije vektorskog proizvoda nalazimo:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}&=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{B}\times\mathbf{C}+\mathbf{C}\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\mathbf{B}-\mathbf{C}\times\mathbf{B}+\mathbf{C}\times\mathbf{A}=\\&=(\mathbf{A}-\mathbf{C})\times\mathbf{B}+\mathbf{C}\times\mathbf{A}-(\mathbf{A}-\mathbf{C})\times\mathbf{B}+\mathbf{C}\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\mathbf{A}=\\&=(\mathbf{A}-\mathbf{C})\times\mathbf{B}-(\mathbf{A}-\mathbf{C})\times\mathbf{A}=(\mathbf{A}-\mathbf{C})\times(\mathbf{B}-\mathbf{A}).\end{aligned}$$

Pri izvođenju ovog rezultata je bila iskorišćena relacija $\mathbf{A}\times\mathbf{A}=0$.

1.9. Dokazivanje zadate relacije je neposredno:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}-\mathbf{B})\times(\mathbf{A}+\mathbf{B})&=\mathbf{A}\times\mathbf{A}+\mathbf{A}\times\mathbf{B}-\mathbf{B}\times\mathbf{A}-\mathbf{B}\times\mathbf{B}=\\&=\mathbf{A}\times\mathbf{B}-\mathbf{B}\times\mathbf{A}=\\&=2\,\mathbf{A}\times\mathbf{B}.\end{aligned}$$

Geometrijska interpretacija ovog rezultata je sledeća. Pošto su $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ i $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ dijagonale paralelograma konstruisanog nad **A** i **B**, proizvod $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\times(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ je vektor čiji je intenzitet jednak površini paralelograma konstruisanog nad dijagonalama. Prema poznatoj teoremi planimetrije, ova površina je kod svakog paralelograma dvaput veća od njegove površine, a ova poslednja predstavlja intenzitet vektora $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$

1.10. Na oba pitanja postavljena u zadatku možemo odgovoriti ako izračunamo mešoviti proizvod vektora ispitivanog trijedra, vodeći računa da je $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}>0$, jer je trijedar **A**, **B**, **C** desne orijentacije. Dakle:

$$\begin{aligned}M&=[(\mathbf{B}+\mathbf{C})\times(\mathbf{C}+\mathbf{A})]\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\\&=[(\mathbf{B}\times\mathbf{C})+(\mathbf{B}\times\mathbf{A})+(\mathbf{C}\times\mathbf{C})+(\mathbf{C}\times\mathbf{A})]\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\\&=(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{A}+(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}=\\&=2\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}.\end{aligned}$$

Pri izvođenju ovih relacija bile su korišćene osobine mešovitog proizvoda. Dobijeni rezultat pokazuje da je trijedar $\mathbf{B}+\mathbf{C}$, $\mathbf{C}+\mathbf{A}$, $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ iste orijentacije kao **A**, **B**, **C** (desne) i da je zapremina paralelepipeda u drugom slučaju dvaput veća.

1.11. (*a*) Smatramo li u oba člana $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ kao jedan vektor i primenimo formulu (1.40), imaćemo:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}&=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})-\mathbf{C}\times[(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{D}]=\\&=\mathbf{C}\,[(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{D}]-\mathbf{D}\,[(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}]-(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{D})+\mathbf{D}\,[(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C})=\\&=\mathbf{C}\,[(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{D}]-(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}).\end{aligned}$$

Pomoću iste formule (1.40) se dobijeni rezultat može napisati:

$$\mathbf{R}=[(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}]\times\mathbf{D},$$

čime je postignut cilj postavljen zadatkom, tj. dati izraz je napisan u obliku jednog proizvoda.

(*b*) Iskoristimo u drugom članu komutativnost skalarnog proizvoda, mogućnost zamene mesta znakova skalarnog i vektorskog množenja u mešovitom proizvodu i zakon alternacije u vektorskom proizvodu. Tako dolazimo do sledećih jednakosti:

$$\begin{aligned}U&=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})-\mathbf{C}\cdot[(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{D}]=\\&=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})-[(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{D}]\cdot\mathbf{C}=\\&=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})-(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{C})=\\&=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})+(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=\\&=2\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}),\end{aligned}$$

čime je zadatak rešen.

1.12. Smatrajući u sva tri člana prvi vektorski proizvod kao jedan vektor, možemo na osnovu osobina mešovitog proizvoda pisati:

$$Q = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) + (\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{D}) + (\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{D}) =$$
$$= [(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}]\cdot\mathbf{D} + [(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times\mathbf{A}]\cdot\mathbf{D} + [(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\times\mathbf{B}]\cdot\mathbf{D} =$$
$$= [(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} + (\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times\mathbf{A} + (\mathbf{C}\times\mathbf{A})\times\mathbf{B}]\cdot\mathbf{D}.$$

Izraz u srednjoj zagradi je identički jednak nuli, što se može proveriti pomoću formule (1.40). Zaista,

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}),$$
$$(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times\mathbf{A} = \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}),$$
$$(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\times\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}),$$

pa ako sve ove tri relacije saberemo, nalazimo neposredno

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} + (\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times\mathbf{A} + (\mathbf{C}\times\mathbf{A})\times\mathbf{B} = 0, \qquad (R.\ 1.2)$$

čime je dokazano i da je $Q = 0$. Napomenimo, uzgred, da se rezultat (*R.* 1.2) zove *Jacobi-jev identitet*. U njemu figuriše suma triju dvostrukih vektorskih proizvoda sa cikličnim permutacijama vektora.

1.13. Označimo zadane vektore sa **P** i **Q**:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A} = \mathbf{B}A^2 - \mathbf{A}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}); \qquad \mathbf{Q} = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{A}B^2.$$

Ugao među njima možemo naći prema formuli

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}}{|\mathbf{P}||\mathbf{Q}|}$$

(v. zadatak 1.3.). Izračunajmo najpre potrebne veličine:

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = [\mathbf{B}A^2 - \mathbf{A}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})]\cdot[\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{A}B^2] =$$
$$= A^2B^2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - A^2B^2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^3 + A^2B^2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) =$$
$$= A^2B^2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^3 =$$
$$= A^3B^3\cos\theta\,(1 - \cos^2\theta);$$

u poslednjoj jednakosti je iskorišćen identitet $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$, jer je, po zadatku, θ ugao između **A** i **B**. Dalje je:

$$|\mathbf{P}| = \sqrt{\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}} = \sqrt{[\mathbf{B}A^2 - \mathbf{A}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})]^2} =$$
$$= \sqrt{A^4B^2 - 2A^2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 + A(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2} =$$
$$= \sqrt{A^4B^2 - A^4B^2\cos^2\theta} = A^2B\sin\theta,$$

a slično i:

$$|\mathbf{Q}| = \sqrt{\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}} = \sqrt{[\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{A}B^2]^2} = AB^2\sin\theta.$$

Pomoću ovih rezultata za ugao između **P** i **Q** dobijamo:

$$\cos\varphi = \frac{A^3B^3\cos\theta\,(1-\cos^2\theta)}{A^3B^3\sin^2\theta} = \cos\theta,$$

tj. vektori **P** i **Q** zaklapaju isti ugao kao **A** i **B**. Ovaj zaključak je geometrijski očevidan, jer **P** i **Q** leže u istoj ravni kao **A** i **B**, pri čemu je prvi normalan na **A** a drugi na **B**, tako da se radi o uglovima sa normalnim kracima.

1.14. Označimo tražene komponente sa $\mathbf{B}_{\parallel}$ i $\mathbf{B}_{\perp}$, tj. stavimo $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp}$. Skalarnim množenjem ove relacije sa **A** dobijamo:

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = (\mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp})\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}_{\parallel}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{B}_{\perp}\cdot\mathbf{A} = B_{\parallel}A,$$

jer je vektor $\mathbf{B}_{\perp}$ normalan na **A**, a $\mathbf{B}_{\parallel}$ i **A** su kolinearni, pa je drugi skalarni proizvod jednak nuli, a prvi jednak proizvodu intenziteta vektora. Odatle odmah nalazimo

$$B_{\parallel} = \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}}{A},$$

a množenjem sa jediničnim vektorom vektora **A** dobijamo i sam vektor $\mathbf{B}_{\parallel}$:

$$\mathbf{B}_{\parallel} = B_{\parallel}\frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\mathbf{A}}{A^2}.$$

Drugu komponentu nalazimo kao:

$$\mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B} - \frac{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\mathbf{A}}{A^2} =$$
$$= \frac{A^2\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\mathbf{A}}{A^2} = \frac{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A}}{A^2}.$$

Prema tome, traženo razlaganje na komponente, od velike važnosti u mnogim oblastima teorijske fizike, ima oblik:

$$\mathbf{B} = \frac{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}}{A^2} + \frac{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A}}{A^2}. \qquad (R.\ 1.3)$$

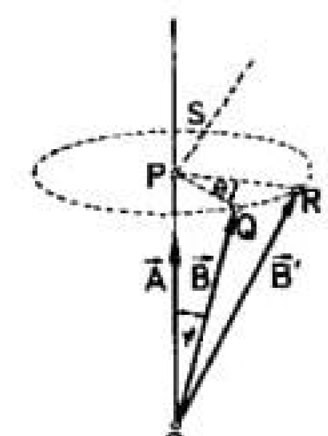
1.15. Neka su vektori **A**, **B** i **B'** kao na slici 1.8. Kao što se vidi, **OP** i **PQ** su upravo $\mathbf{B}_{\parallel}$ i $\mathbf{B}_{\perp}$ iz prethodnog zadatka:

$$\mathbf{OP} = \frac{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}}{A^2},$$

$$\mathbf{PQ} = \frac{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A}}{A^2},$$

dok se za vektor **B'** koji traži zadatak može pisati:

$$\mathbf{B'} = \mathbf{OP} + \mathbf{PR},$$



Sl. 1.8.

tako da je za rešavanje zadatka potrebno uspostaviti vezu između **PR** i **PQ**. Pri tom se polazi od činjenice da je **PR** nastao iz **PQ** rotacijom oko jedne ose normalne na oba ova vektora za ugao θ. Uzimajući pravac vektora **PQ** za x_1-osu jednog koordinatnog

sistema se koordinatnim početkom u P, a pravac vektora **A** (ose rotacije) za x_3-osu (x_2-osa je onda kolinearna sa vektorom $\overrightarrow{PS}$), lako vidimo da je:

$$\mathbf{PR} = \overrightarrow{PQ}(\cos\theta\,\mathbf{e}_1 + \sin\theta\,\mathbf{e}_2) =$$
$$= \overrightarrow{PQ}\cos\theta\,\mathbf{e}_1 + \overrightarrow{PQ}\sin\theta\,(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) =$$
$$= \overrightarrow{PQ}\cos\theta + (\mathbf{e}_3 \times \overrightarrow{PQ})\sin\theta =$$
$$= \overrightarrow{PQ}\cos\theta + \left(\frac{\mathbf{A}}{A} \times \overrightarrow{PQ}\right)\sin\theta.$$

Uzmemo li u obzir da je $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A}}{A^2}$, dobijamo dalje:

$$\overrightarrow{PR} = \frac{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A}}{A^2}\cos\theta + \frac{\mathbf{A}\times[(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A}]}{A^3}\sin\theta.$$

Razvijemo li trostruki vektorski proizvod u drugom članu prema formuli (1.40), smatrajući pri tom $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ kao jedan vektor, dobićemo:

$$\overrightarrow{PR} = \frac{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A}}{A^2}\cos\theta + \frac{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})A^2 - \mathbf{A}[(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{A}]}{A^3}\sin\theta =$$
$$= \frac{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A}}{A^2}\cos\theta + \frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{A}\sin\theta,$$

jer je mešoviti proizvod u članu sa $\sin\theta$ jednak nuli. Prema tome, imamo dalje:

$$\mathbf{B}' = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} =$$
$$= \frac{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}}{A^2} + \frac{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A}}{A^2}\cos\theta + \frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{A}\sin\theta =$$
$$= \frac{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}}{A^2} + \frac{\mathbf{B}A^2 - \mathbf{A}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})}{A^2}\cos\theta + \frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{A}\sin\theta;$$

u poslednjoj jednakosti je razvijen dvostruki vektorski proizvod, u skladu sa (1.40). Pregrupisavanjem članova tako dobijamo sledeći definitivan rezultat:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}\cos\theta + \frac{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}}{A^2}(1-\cos\theta) + \frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{A}\sin\theta. \qquad (R.\ 1.4)$$

Ugao između vektora **B** i **B'** se dobija na osnovu (1.24):

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}'}{|\mathbf{B}||\mathbf{B}'|} = \frac{A^2B^2\cos\theta + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2(1-\cos\theta)}{A^2B^2} =$$
$$= \cos\theta + \frac{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2}{A^2B^2}(1-\cos\theta)$$

(u imeniocu je B' zamenjeno sa B, jer su oba vektora po intenzitetu očevidno jednaka). Ako ugao između **A** i **B** označimo sa φ, moći ćemo, dakle, pisati:

$$\cos\gamma = \cos\theta + \cos^2\varphi\,(1-\cos\theta)$$

ili, definitivno,

$$\cos\gamma = \cos^2\varphi + \cos\theta\sin^2\varphi. \qquad (R.\ 1.5)$$

1.16. Pomnožimo zadatu jednačinu skalarno vektorom **B**. Dobijamo:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \lambda\mathbf{X}\cdot\mathbf{B},$$

jer je mešoviti proizvod $(\mathbf{B}\times\mathbf{X})\cdot\mathbf{B}$ jednak nuli, pošto vektor **B** ulazi u njega dvaput. Dakle:

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{B} = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}). \qquad (R.\ 1.6)$$

Pomnožimo sad zadatu jednačinu vektorski vektorom **B** i razvijmo dvostruki vektorski proizvod $(\mathbf{B}\times\mathbf{X})\times\mathbf{B}$ prema formuli (1.40):

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} + (\mathbf{B}\times\mathbf{X})\times\mathbf{B} = \lambda\mathbf{X}\times\mathbf{B},$$
$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{X}B^2 - \mathbf{B}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{B}) = \lambda\mathbf{X}\times\mathbf{B}. \qquad (R.\ 1.7)$$

Iz same zadate jednačine za vektorski proizvod $\mathbf{X}\times\mathbf{B}$ nalazimo:

$$\mathbf{X}\times\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{X}$$

(uz primenu zakona alternacije), dok skalarni proizvod ta dva vektora možemo izraziti pomoću (*R.* 1.6). Dakle:

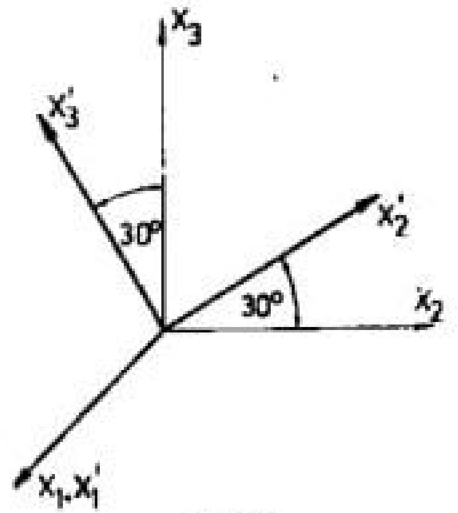
$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{X}B^2 - \frac{1}{\lambda}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{B} - \lambda(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{X}),$$

ili definitivno:

$$\mathbf{X} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + B^2}\left[\mathbf{A} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{B}\times\mathbf{A} + \frac{1}{\lambda^2}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{B}\right]. \qquad (R.\ 1.8)$$

1.17. *(a)* Kao što se vidi (slika 1.9.), ose X_2, X_3, X_2' i X_3', leže u istoj ravni, normalnoj na X_1-osu. Prema tome, šema kosinusa pravaca je:

$$\alpha_{11} = 1, \qquad \alpha_{12} = 0, \qquad \alpha_{13} = 0,$$
$$\alpha_{21} = 0, \qquad \alpha_{22} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \alpha_{23} = \frac{1}{2},$$
$$\alpha_{31} = 0, \qquad \alpha_{32} = -\frac{1}{2}, \qquad \alpha_{33} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$



Sl. 1.9

tako da se na osnovu relacije (1.14) može odmah pisati:

$$A_1' = \alpha_{11}A_1 + \alpha_{12}A_2 + \alpha_{13}A_3 = 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 = 2,$$
$$A_2' = \alpha_{21}A_1 + \alpha_{22}A_2 + \alpha_{23}A_3 = 0\cdot 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2},$$
$$A_3' = \alpha_{31}A_1 + \alpha_{32}A_2 + \alpha_{33}A_3 = 0\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dakle u novom koordinatnom sistemu vektor **A** ima koordinate $\left(2,\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(*b*) Šema kosinusa pravaca pri rotaciji oko X_3-ose za isti ugao biće, očevidno:

$$\alpha_{11}=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \alpha_{12}=\frac{1}{2},\qquad \alpha_{13}=0,$$

$$\alpha_{21}=-\frac{1}{2},\qquad \alpha_{22}=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \alpha_{23}=0,$$

$$\alpha_{31}=0,\qquad \alpha_{32}=0,\qquad \alpha_{33}=1,$$

pa se, radeći kao u prethodnom slučaju, nalazi da vektor **A** ima koordinate $(\sqrt{3},\ -1, 1)$.

1.18. (*a*) Veze između kosinusa pravaca se mogu, prema zadanoj determinanti, formulisati na sledeći način. Ako se članovi bilo koje kolone dignu ne kvadrat i proizvodi saberu, rezultat je jednak jedinici. Ako se, pak, članovi jedne kolone pomnože odgovarajućim članovima neke druge kolone i proizvodi saberu, dobija se kao rezultat nula. Geometrijska interpretacija ovih pravila je jednostavna ako se zapazi da su članovi pojedinih kolona komponente odgovarajućih jediničnih vektora *neprimovanog* sistema izražene u primovanom koordinatnom sistemu. Slično tome se vrste ove determinante mogu dovesti u vezu sa komponentama jediničnih vektora *primovanog* sistema.

(*b*) Vrednost ove determinante jednaka je jedinici. Naime, prema gore rečenom, možemo je shvatiti kao mešoviti proizvod jediničnih vektora $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (ili $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$), koji su uzajamno ortogonalni i čine desni trijedar.

(*c*) Ova osobina posmatrane determinante se može lako dokazati, ako se uzme u obzir da je $\alpha_{pq}=\mathbf{e}'_p\cdot\mathbf{e}_q$. Uočimo jedan element ove determinante, npr. α_{23}, i obrazujmo njegov kofaktor:

$$\begin{aligned}A_{23}&=\alpha_{12}\,\alpha_{31}-\alpha_{11}\,\alpha_{32}=\\&=(\mathbf{e}'_1\cdot\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}'_3\cdot\mathbf{e}_1)-(\mathbf{e}'_1\cdot\mathbf{e}_1)(\mathbf{e}'_3\cdot\mathbf{e}_2)=\\&=\mathbf{e}'_3\cdot[(\mathbf{e}'_1\cdot\mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_1-(\mathbf{e}'_1\cdot\mathbf{e}_1)\,\mathbf{e}_2]=\\&=\mathbf{e}'_3\cdot[(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1)\times\mathbf{e}'_1]=\\&=\mathbf{e}'_3\cdot[-\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}'_1]=\\&=\mathbf{e}'_3\cdot[\mathbf{e}'_1\times\mathbf{e}_3]=\\&=(\mathbf{e}'_3\times\mathbf{e}'_1)\cdot\mathbf{e}_3=\mathbf{e}'_2\cdot\mathbf{e}_3=\alpha_{23}.\end{aligned}\qquad (R.\ 1.9)$$

Sve korišćene transformacije se zasnivaju na formuli (1.40), osobinama mešovitog proizvoda (1.37) i relacijama $\mathbf{e}'_i\times\mathbf{e}'_j=\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{e}'_k$. Dokaz ide analogo i za ostale kofaktore zadate determinante.

1.19. Treba pokazati da važi

$$(\mathbf{A}'\times\mathbf{B}')_1=\alpha_{11}\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_1+\alpha_{12}\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_2+\alpha_{13}\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_3$$

(i još dve analoge relacije), tj. da se komponente vektora $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ zaista transformišu po zakonu (1.14), karakterističnom za vektore. Pođimo od leve strane, uzimajući u obzir da se komponente vektora **A** i **B** transformišu po pomenutom zakonu:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}'\times\mathbf{B}')_1&=A'_2B'_3-A'_3B'_2=\\&=(\alpha_{21}A_1+\alpha_{22}A_2+\alpha_{23}A_3)(\alpha_{31}B_1+\alpha_{32}B_2+\alpha_{33}B_3)-\\&-(\alpha_{31}A_1+\alpha_{32}A_2+\alpha_{33}A_3)(\alpha_{21}B_1+\alpha_{22}B_2+\alpha_{23}B_3).\end{aligned}$$

Nakon množenja član po član i grupisanja anulogih članova, dobija se:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}'\times\mathbf{B}')_1&=(\alpha_{22}\,\alpha_{33}-\alpha_{32}\,\alpha_{23})(A_2B_3-A_3B_2)+\\&+(\alpha_{23}\,\alpha_{31}-\alpha_{21}\,\alpha_{33})(A_3B_1-A_1B_3)+\\&+(\alpha_{21}\,\alpha_{32}-\alpha_{31}\,\alpha_{22})(A_1B_2-A_2B_1).\end{aligned}$$

Može se zapaziti da su izrazi koji sadrže kosinuse pravaca upravo kofaktori elemenata α_{11}, α_{12}, α_{13} determinante iz prethodnog zadatka, i na osnovu rezultata pod (*c*) su im jednaki. S druge strane, izrazi koji sadrže komponente vektora **A** i **B** su upravo komponente vektorskog proizvoda, tako da se gornja relacija može prepisati kao:

$$(\mathbf{A}'\times\mathbf{B}')_1=\alpha_{11}\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_1+\alpha_{12}\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_2+\alpha_{13}\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_3;$$

dokaz ide potpuno analogo i za ostale dve komponente. Ovim je dokazano da se $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ zaista ponaša kao vektor pri *rotaciji* koordinatnog sistema.

1.20. Neka traženi jedinični vektor ima komponente (a_1, a_2, a_3) u sistemu $OX_1X_2X_3$. Iz geometrijskih odnosa je očevidno da će on imati iste komponente i u sistemu $OX'_1X'_2X'_3$, tako da dolazimo do uslova:

$$a'_1=a_1,\quad a'_2=a_2,\quad a'_3=a_3.$$

Na osnovu obrasca (1.14) i zadanih vrednosti kosinusa pravaca, ovi uslovi se svode na:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a_1+\frac{\sqrt{3}}{4}a_2+\frac{1}{4}a_3=a_1,$$

$$-\frac{1}{2}a_1+\frac{3}{4}a_2+\frac{\sqrt{3}}{4}a_3=a_2,$$

$$0\cdot a_1-\frac{1}{2}a_2+\frac{\sqrt{3}}{2}a_3=a_3.$$

Nakon sređivanja se dobija sledeći homogeni sistem od tri linearne jednačine po komponentima a_1, a_2, a_3:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)a_1+\frac{\sqrt{3}}{4}a_2+\frac{1}{4}a_3=0,$$

$$-\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{4}a_2+\frac{\sqrt{3}}{4}a_3=0,$$

$$-\frac{1}{2}a_2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)a_3=0.$$

Njegova determinanta jednaka je nuli (proveriti!), tako da sistem ima netrivijalna rešenja. Deleći drugu i treću jednačinu gornjeg sistema sa a_3, nalazimo

$$\frac{a_1}{a_3}=1, \qquad \frac{a_2}{a_3}=\sqrt{3}-2,$$

što znači da je traženi vektor ove rotacije

$$\mathbf{a}=[a_3,\ (\sqrt{3}-2)\,a_3,\ a_3].$$

Neodređenu konstantu a_3 treba odrediti tako da $\mathbf{a}$ bude jedinični vektor:

$$|\mathbf{a}|=\pm a_3\sqrt{2+(\sqrt{3}-2)^2}=1;$$

za a_3 se dobijaju dva rešenja iste apsolutne vrednosti i različitog znaka. Prema zadatku, vektor $\mathbf{a}$ treba da je orijentisan tako da se rotacija oko njega vrši u pozitivnom smeru. To znači da vektori $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_i'$ i $\mathbf{a}$ moraju za svako $i=1, 2, 3$ obrazovati desni trijedar. Za $i=1$, na primer, nalazimo

$$(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1')\cdot\mathbf{a}=a_3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & \sqrt{3}-2 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}a_3,$$

i ovaj mešoviti proizvod mora biti pozitivan (desni trijedar), tako da za a_3 treba uzeti pozitivno rešenje. Dakle:

$$\mathbf{a}=\frac{\mathbf{e}_1-(2-\sqrt{3})\,\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}{\sqrt{2+(2-\sqrt{3})^2}}.$$

1.21. Iskoristimo relaciju (R. 1.4) iz zadatka 1.15, uzimajući u obzir da je jedinični vektor $\mathbf{e}_1'$ dobijen iz $\mathbf{e}_1$ rotacijom oko vektora $\mathbf{a}$. Dakle, pošto je $\mathbf{a}$ jedinični vektor,

$$\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1\cos\theta+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_1)\,\mathbf{a}\,(1-\cos\theta)+(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_1)\sin\theta.$$

Ova vektorska jednačina ekvivalentna je trima skalarnim, od kojih nam je dovoljna jedna (bilo koja) za određivanje ugla rotacije θ. Projektujmo, stoga, gornju jednačinu na X_1-osu (tj. pomnožimo je skalarno sa $\mathbf{e}_1$). Tako nalazimo:

$$(\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_1)=(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1)\cos\theta+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_1)^2(1-\cos\theta)+(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{e}_1\sin\theta.$$

Poslednji član jednak je nuli, a za preostala tri imamo:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\theta+\frac{1}{9-4\sqrt{3}}(1-\cos\theta).$$

Odavde je:

$$\cos\theta=\frac{4\sqrt{3}-1}{8},$$

čime je ugao rotacije određen.

1.22. Kao što je u zadatku 1.20. obrazloženo, treba naći vektor $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$, koji se pri pomenutoj rotaciji ne menja, tj. za koji u skladu sa (1.14) važi

$$\alpha_{11}a_1+\alpha_{12}a_2+\alpha_{13}a_3=a_1,$$
$$\alpha_{21}a_1+\alpha_{22}a_2+\alpha_{23}a_3=a_2,$$
$$\alpha_{31}a_1+\alpha_{32}a_2+\alpha_{33}a_3=a_3.$$

Nakon sređivanja, dobija se sledeći homogeni sistem:

$$\begin{aligned}(\alpha_{11}-1)\,a_1+\alpha_{12}a_2+\alpha_{13}a_3&=0,\\ \alpha_{21}a_1+(\alpha_{22}-1)\,a_2+\alpha_{23}a_3&=0,\\ \alpha_{31}a_1+\alpha_{32}a_2+(\alpha_{33}-1)\,a_3&=0.\end{aligned} \qquad (R.\ 1.10)$$

Može se pokazati, na osnovu rezultata zadatka 1.18, da je determinanta ovog sistema:

$$\Delta^*=\begin{vmatrix} \alpha_{11}-1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-1 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}-1 \end{vmatrix}$$

uvek jednaka nuli, tako da on ima netrivijalna rešenja. Da bismo se u ovo uverili, razvijmo determinantu Δ^* po elementima prve kolone i sredimo:

$$\begin{aligned}\Delta^*&=(\alpha_{11}-1)\,[(\alpha_{22}-1)(\alpha_{33}-1)-\alpha_{23}\alpha_{32}]-\alpha_{21}[\alpha_{12}(\alpha_{33}-1)-\alpha_{13}\alpha_{32}]+\\ &\quad+\alpha_{31}[\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}(\alpha_{22}-1)]=\\ &=(\alpha_{11}-1)(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32}-\alpha_{22}-\alpha_{33}+1)-\\ &\quad-\alpha_{21}(\alpha_{12}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{32}-\alpha_{12})+\\ &\quad+\alpha_{31}(\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{22}+\alpha_{13}).\end{aligned}$$

Uočimo da se članovi koji sadrže proizvode dvaju kosinusa pravaca pojavljuju u kombinacijama koje predstavljaju kofaktore pojedinih elemenata determinante Δ iz zadatka 1.18, tako da prema osobini (c) tog zadatka možemo dalje pisati:

$$\begin{aligned}\Delta^*&=(\alpha_{11}-1)(\alpha_{11}-\alpha_{22}-\alpha_{33}+1)+\alpha_{21}(\alpha_{21}+\alpha_{12})+\alpha_{31}(\alpha_{31}+\alpha_{13})=\\ &=\alpha_{11}^2-\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{11}\alpha_{33}+\alpha_{11}-\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}-1+\alpha_{21}^2+\alpha_{21}\alpha_{12}+\\ &\quad+\alpha_{31}^2+\alpha_{13}\alpha_{31}=\alpha_{21}\alpha_{12}-\alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{13}\alpha_{31}-\alpha_{11}\alpha_{33}+\alpha_{22}+\alpha_{33};\end{aligned}$$

tri člana sa kvadratima kosinusa pravaca daju jedinicu, prema (1.9), tako da se izvestan broj članova potire. Prva dva preostala člana daju $-\alpha_{33}$ (kofaktor ovog člana sa suprotnim znakom), a slično treći i četvrti daju $-\alpha_{22}$, tako da se dobija $\Delta^*=0$, što je i trebalo pokazati.

Pošto, dakle, sistem (R. 1.10) ima uvek netrivijalna rešenja, možemo uzeti bilo koje dve jednačine, podeliti sa a_3 i rešiti po $\frac{a_1}{a_3}$ i $\frac{a_2}{a_3}$. Ceo dalji postupak je isti kao u zadatku 1.20, pa se ostavlja čitaocu za samostalnu vežbu da nađe definitivan izraz za $\mathbf{a}$.

1.23. Sva tri jedinična vektora koordinatnih osa obrnu se oko $\mathbf{A}$ za ugao $\theta=\frac{\pi}{2}$, pa na osnovu relacije (*R.* 1.4) iz zadatka 1.15. imamo:

$$\mathbf{e}_i'=\frac{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_i)\,\mathbf{A}}{A^2}+\frac{\mathbf{A}\times\mathbf{e}_i}{A}.$$

Pošto je vektor $\mathbf{A}=(1,\ 1,\ -1)$, imaćemo za $i=1,2,3$ eksplicitno:

$$\mathbf{e}_1'=\frac{1}{3}\left[\mathbf{e}_1+(1-\sqrt{3})\,\mathbf{e}_2-(1+\sqrt{3})\,\mathbf{e}_3\right],$$

$$\mathbf{e}_2'=\frac{1}{3}\left[(1+\sqrt{3})\,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-(1-\sqrt{3})\,\mathbf{e}_3\right],$$

$$\mathbf{e}_3'=\frac{1}{3}\left[-(1-\sqrt{3})\,\mathbf{e}_1-(1+\sqrt{3})\,\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\right].$$

Odavde se neposredno čitaju kosinusi pravaca $\alpha_{ij}=\mathbf{e}_i'\cdot\mathbf{e}_j$.

1.24. Neka je $\mathbf{A}$ proizvoljan vektor, čije su komponente A_i, A_i' i A_i'' respektivno u zadana tri koordinatna sistema. Po uslovima zadatka možemo pisati:

$$A_i'=\alpha_{ij}A_j,\qquad A_k''=\beta_{kr}A_r',$$

tako da neposredno dobijamo:

$$A_k''=\beta_{kr}A_r'=\beta_{kr}\,\alpha_{rs}A_s,$$

odakle se, upoređivanjem sa relacijom $A_k''=\gamma_{ks}A_s$, može pročitati:

$$\gamma_{ks}=\beta_{kr}\,\alpha_{rs}.$$

Proverimo sad važenje zadane relacije, imajući u vidu da za koeficijente α i β relacije (1.9) sigurno važe. Dakle:

$$\gamma_{pq}\gamma_{pr}=\beta_{pm}\alpha_{mq}\beta_{pn}\alpha_{nr}=\beta_{pm}\beta_{pn}\alpha_{mq}\alpha_{nr}=$$
$$=\delta_{mn}\alpha_{mq}\alpha_{nr}=\alpha_{nq}\alpha_{nr}=\delta_{qr},$$

što je trebalo pokazati.

1.25. (*a*) Obrazujmo mešoviti proizvod vektora $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$ i $\mathbf{C}^{-1}$, koristeći relaciju (1.40) za uprošćavanje:

$$[\mathbf{A}^{-1},\ \mathbf{B}^{-1},\ \mathbf{C}^{-1}]=(\mathbf{A}^{-1}\times\mathbf{B}^{-1})\cdot\mathbf{C}^{-1}=$$
$$=\frac{[(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})]\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{[\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}]^3}=$$
$$=\frac{\{[(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}]\,\mathbf{C}-[(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{C}]\,\mathbf{B}\}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{[\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}]^3}=$$
$$=\frac{[(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}]\,[(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}]}{[\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}]^3}=\frac{1}{[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}]}.$$

Oba mešovita proizvoda su istog znaka (dakle, oba trijedra iste orijentacije) i numerički su uzajamno recipročna, čime je dokazano tvrđenje ovog dela zadatka.

(*b*) Formirajmo, na osnovu definicije, vektor recipročan vektoru $\mathbf{A}^{-1}$:

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\frac{\mathbf{B}^{-1}\times\mathbf{C}^{-1}}{[\mathbf{A}^{-1},\ \mathbf{B}^{-1},\ \mathbf{C}^{-1}]}=[\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}]\,(\mathbf{B}^{-1}\times\mathbf{C}^{-1})=$$
$$=[\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}]\,\frac{(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{[\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}]^2}=$$
$$=\frac{\mathbf{A}\,[(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}]-\mathbf{B}\,[(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{A}]}{[\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}]}=\mathbf{A},$$

i analogo za $(\mathbf{B}^{-1})^{-1}$ i $(\mathbf{C}^{-1})^{-1}$, čime je dokazano tvrđenje ovog dela zadatka.

(*c*) Uočimo najpre da za skalarne proizvode vektora dvaju uzajamno recipročnih trijedara važe relacije:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=1,\qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{-1}=0,\qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}^{-1}=0,$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{-1}=0,\qquad \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{-1}=1,\qquad \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}^{-1}=0,$$
$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}^{-1}=0,\qquad \mathbf{C}\cdot\mathbf{B}^{-1}=0,\qquad \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^{-1}=1.$$

Ako proizvoljan vektor $\mathbf{Q}$ prikažemo u obliku

$$\mathbf{Q}=\lambda_1\mathbf{A}+\lambda_2\mathbf{B}+\lambda_3\mathbf{C},$$

što je sigurno uvek moguće, jer $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ nisu komplanarni, pa tu relaciju pomnožimo redom sa $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$ i $\mathbf{C}^{-1}$ uzimajući u obzir gornje jednačine za skalarne proizvode, neposredno dobijamo:

$$\lambda_1=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}^{-1},\qquad \lambda_2=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}^{-1},\qquad \lambda_3=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{C}^{-1},$$

čime je dokazana prva od navedenih Gibbs-ovih relacija. Slično se, stavljanjem

$$\mathbf{Q}=\mu_1\mathbf{A}^{-1}+\mu_2\mathbf{B}^{-1}+\mu_3\mathbf{C}^{-1}$$

može dokazati i druga.

1.26. Zapazimo da se simbol Levi-Civita može prikazati u obliku mešovitog proizvoda, odnosno determinante:

$$\varepsilon_{ijk}=(\mathbf{e}_i'\times\mathbf{e}_j')\cdot\mathbf{e}_k'=\begin{vmatrix}\alpha_{i1}&\alpha_{i2}&\alpha_{i3}\\ \alpha_{j1}&\alpha_{j2}&\alpha_{j3}\\ \alpha_{k1}&\alpha_{k2}&\alpha_{k3}\end{vmatrix},$$

ako su $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ i $\mathbf{e}_3'$ tri uzajamno ortogonalna jedinična vektora koji čine desni trijedar, a α_{ij} njihove komponente (kosinusi pravaca). Prema tome, proizvod dva takva simbola se može prikazati kao:

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}=\begin{vmatrix}\alpha_{i1}&\alpha_{i2}&\alpha_{i3}\\ \alpha_{j1}&\alpha_{j2}&\alpha_{j3}\\ \alpha_{k1}&\alpha_{k2}&\alpha_{k3}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\alpha_{l1}&\alpha_{m1}&\alpha_{n1}\\ \alpha_{l2}&\alpha_{m2}&\alpha_{n2}\\ \alpha_{l3}&\alpha_{m3}&\alpha_{n3}\end{vmatrix};$$

druga determinanta je napisana u transponovanom obliku, što ne utiče na njenu numeričku vrednost. Izmnožimo li ove determinante po pravilu za množenje determinanata (ovo pravilo je istovetno sa pravilom matričnog množenja, datim u Glavi 5. ove knjige) i iskoristimo relacije (1.9) za kosinuse pravaca, moći ćemo pisati:

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}. \qquad (R.\ 1.11)$$

Ova jednakost će biti polazna tačka za dokazivanje svih triju zadatih relacija.

(*a*) Stavimo $l=i$ i uzmimo u obzir da je $\delta_{ii}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3$ (izjednačavanje dvaju indeksa implicira primenu sumacione konvencije). Tako dolazimo do:

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{imn}=\begin{vmatrix}3 & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}=3\,\delta_{jm}\,\delta_{kn}+\delta_{im}\,\delta_{jn}\,\delta_{ki}+\delta_{in}\,\delta_{ji}\,\delta_{km}-$$

$$-\delta_{in}\,\delta_{jm}\,\delta_{ki}-3\,\delta_{jn}\,\delta_{km}-\delta_{im}\,\delta_{ji}\,\delta_{kn}.$$

Iskoristimo li očevidnu osobinu Kronecker-ove delte, $\delta_{ij}\,\delta_{ik}=\delta_{jk}$, možemo dalje pisati:

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{imn}=3\,\delta_{jm}\,\delta_{kn}+\delta_{km}\,\delta_{jn}+\delta_{km}\,\delta_{jn}-$$

$$-\delta_{kn}\,\delta_{jm}-3\,\delta_{jn}\,\delta_{km}-\delta_{jm}\,\delta_{kn}=\delta_{jm}\,\delta_{kn}-\delta_{jn}\,\delta_{km},$$

što je trebalo dokazati.

(*b*) Stavimo sad u (*R.* 1.11) $l=i$ i $m=j$, nakon čega se dobija:

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijn}=\begin{vmatrix}3 & \delta_{ij} & \delta_{in}\\ \delta_{ij} & 3 & \delta_{jn}\\ \delta_{ik} & \delta_{jk} & \delta_{kn}\end{vmatrix}=2\,\delta_{kn};$$

razvijanje ove determinante i njeno sređivanje su izostavljeni, pošto se samo u neznatnim detaljima razlikuju od onog u prethodnom delu zadatka.

(*c*) Najzad, izjednačimo li sva tri indeksa drugog simbola sa indeksima prvog, dobijamo na isti način kao gore, traženi rezultat. Njegovo izvođenje se ostavlja čitaocu za samostalnu vežbu

Takođe se za samostalnu vežbu preporučuje izvesti formulu (1.40), na osnovu (1.33) i ovde izvedenih relacija među simbolima Levi-Civita.

2. VEKTORSKA ANALIZA

2.1. Označimo li, radi konciznosti, tražene integrale sa J_1, $\mathbf{J}_2$ i $\mathbf{J}_3$ respektivno (prvi je skalar, a druga dva su vektori) i uzmemo u obzir da je $d\mathbf{l}=dx_1\,\mathbf{e}_1+$ $+dx_2\,\mathbf{e}_2+dx_3\,\mathbf{e}_3$, imaćemo:

$$J_1=\int A_1\,dx_1+A_2\,dx_2+A_3\,dx_3=$$

$$=\int (x_1^2-x_2)\,dx_1+(x_2^2-x_3)\,dx_2+(x_3^2-x_1)\,dx_3=$$

$$=\int_0^{2\pi}[(a^2\cos^2\varphi-a\sin\varphi)(-a\sin\varphi\,d\varphi)+(a^2\sin^2\varphi-b\varphi)(a\cos\varphi\,d\varphi)+$$

$$+(b^2\varphi^2-a\cos\varphi)(b\,d\varphi)]=$$

$$=a^2\pi+\frac{8}{3}b^3\pi^3;$$

$$\mathbf{J}_2=\int (A_1\,\mathbf{e}_1+A_2\,\mathbf{e}_2+A_3\,\mathbf{e}_3)\times(dx_1\,\mathbf{e}_1+dx_2\,\mathbf{e}_2+dx_3\,\mathbf{e}_3)=$$

$$=\int[(A_2\,dx_3-A_3\,dx_2)\,\mathbf{e}_1+(A_3\,dx_1-A_1\,dx_3)\,\mathbf{e}_2+(A_1\,dx_2-A_2\,dx_1)\,\mathbf{e}_3]=$$

$$=\mathbf{e}_1\int[(x_2^2-x_3)\,dx_3-(x_3^2-x_1)\,dx_2]+\mathbf{e}_2\int[(x_3^2-x_1)\,dx_1-(x_1^2-x_2)\,dx_3]+$$

$$+\mathbf{e}_3\int[(x_1^2-x_2)\,dx_2-(x_2^2-x_3)\,dx_1];$$

zamenimo li i ovde x_1, x_2 i x_3 kao i njihove diferencijale prema zadanoj jednačini krive i izvršimo integraciju u datim granicama, nalazimo:

$$\mathbf{J}_2=\pi\,(a^2+a^2b-2\pi b^2)\,\mathbf{e}_1-\pi ab\,(a-2\pi b)\,\mathbf{e}_2+2\pi ab\,\mathbf{e}_3.$$

Najzad, za treći integral istim postupkom nalazimo:

$$\mathbf{J}_3=\int (A_1\,\mathbf{e}_1+A_2\,\mathbf{e}_2+A_3\,\mathbf{e}_3)\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2}=$$

$$=\int[(x_1^2-x_2)\,\mathbf{e}_1+(x_2^2-x_3)\,\mathbf{e}_2+(x_3^2-x_1)\,\mathbf{e}_3]\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2}=$$

$$=\pi\sqrt{a^2+b^2}\left[a^2\,\mathbf{e}_1+(a+2\pi b)\,\mathbf{e}_2+\frac{8\pi^2}{3}b^2\,\mathbf{e}_3\right].$$

2.2. Veličina elementa površine se, prema opštoj formuli iz analize, izražava kao $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)^2}\,dx_1\,dx_2$, tako da za sferu imamo:

$$dS=\frac{a\,dx_1\,dx_2}{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}}.$$

S druge strane, jedinični vektor normale na sferu je $\mathbf{n}=\frac{x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3}{a}$ tako da se za usmereni element površine dobija:

$$d\mathbf{S}=dS\,\mathbf{n}=\frac{x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}\,\mathbf{e}_3}{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}}\,dx_1\,dx_2;$$

promenljiva x_3 je eliminisana u skladu sa jednačinom sfere i uslovom $x_3>0$, jer se x_1 i x_2 pojavljuju kao integracione promenljive. Stoga prvi od zadanih integrala postaje:

$$J_1=\int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=$$

$$=\int_{S'}\left[x_2\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}\,\mathbf{e}_1+x_1\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}\,\mathbf{e}_2+x_1x_2\mathbf{e}_3\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}\,\mathbf{e}_3}{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}}\,dx_1\,dx_2=\int_{S'}3\,x_1\,x_2\,dx_1\,dx_2$$

ovde je S' projekcija dela površine po kojoj se integracija vrši na ravan promenljivih integracija, tj. krug poluprečnika a sa centrom u koordinatnom početku u x_1Ox_2 — ravni. Predjemo li u polarne koordinate, imaćemo:

$$J_1=3\int_0^a\int_0^{2\pi}\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\,\rho\,d\rho\,d\varphi=3\int_0^a\rho^3\,d\rho\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=0.$$

Postupajući na sličan način, za drugi integral možemo pisati:

$$\mathbf{J}_2=\int_S\mathbf{A}\times d\mathbf{S}=$$

$$=\int_{S'}\left[x_2\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}\,\mathbf{e}_1+x_1\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}\,\mathbf{e}_2+x_1x_2\mathbf{e}_3\right]\times$$

$$\times\frac{x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}\,\mathbf{e}_3}{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}}\,dx_1\,dx_2=$$

$$=\mathbf{e}_1\int_{S'}\left[x_1(a^2-x_1^2-x_2^2)-x_1x_2^2\right]\frac{dx_1\,dx_2}{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}}+$$

$$+\mathbf{e}_2\int_{S'}\left[x_1^2x_2-x_2(a^2-x_1^2-x_2^2)\right]\frac{dx_1\,dx_2}{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}}+\mathbf{e}_3\int_{S'}(x_2^2-x_1^2)\,dx_1\,dx_2.$$

Prelaskom u polarne koordinate može se proveriti da i ovaj integral daje kao rezultat nulu. Isto tako se može pokazati da je $\mathbf{J}_3=0$.

2.3. Prema obrascu (2.22) imaćemo, u neprimovanom i primovanom koordinatnom sistemu respektivno:

$$\operatorname{grad}U=\left(\frac{\partial U}{\partial x_1},\frac{\partial U}{\partial x_2},\frac{\partial U}{\partial x_3}\right),\quad(\operatorname{grad}U)'=\left(\frac{\partial U}{\partial x_1'},\frac{\partial U}{\partial x_2'},\frac{\partial U}{\partial x_3'}\right)$$

Ako je transformacija kojom se iz neprimovanog prelazi u primovani sistem ogledanje koordinata, biće očevidno $\frac{\partial U}{\partial x_1'}=-\frac{\partial U}{\partial x_1}$, i slično za ostale dve komponente. To znači da pri ogledanju koordinata komponente gradijenta menjaju znak, što je osobina pravih (polarnih) vektora.

Slično se za rotor može pisati

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3},\ \frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right),$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})'=\left(\frac{\partial A_3'}{\partial x_2'}-\frac{\partial A_2'}{\partial x_3'},\ \frac{\partial A_1'}{\partial x_3'}-\frac{\partial A_3'}{\partial x_1'},\ \frac{\partial A_2'}{\partial x_1'}-\frac{\partial A_1'}{\partial x_2'}\right)=$$

$$=\left[-\left(\frac{\partial A_3'}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2'}{\partial x_3}\right),\ -\left(\frac{\partial A_1'}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3'}{\partial x_1}\right),\ -\left(\frac{\partial A_2'}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1'}{\partial x_2}\right)\right],$$

odakle se vidi da će komponente rotora menjati znak pri ogledanju koordinata ukoliko komponente vektora $\mathbf{A}$ pri ovoj transformaciji ostanu nepromenjene. Dakle, da bi rotor nekog vektora bio pravi vektor, treba da taj vektor bude aksijalni (pseudovektor).

2.4. U prvom slučaju primenjujemo relacije (2.44) i (2.46), pa dobijamo:

$$\operatorname{grad}U=\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r})+\operatorname{grad}r=$$

$$=\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{r}+\mathbf{r}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{r}+(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\operatorname{grad}r=$$

$$=(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{r}+\mathbf{e}_r;$$

u poslednjoj jednakosti je uzeto u obzir da je $\operatorname{rot}\mathbf{r}=0$, $\operatorname{grad}r=\mathbf{e}_r$ i da je $\mathbf{A}$ konstantan vektor. Napišimo eksplicitno prvi član dobijenog rezultata

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{r}=\left(A_1\frac{\partial}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial}{\partial x_2}+A_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)(x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3)=$$

$$=A_1\mathbf{e}_1+A_2\mathbf{e}_2+A_3\mathbf{e}_3=\mathbf{A}. \qquad (R.21)$$

Prema tome, zadani izraz definitivno postaje:

(a) $$\operatorname{grad}U=\mathbf{A}+\mathbf{e}_r.$$

U drugom slučaju primenićemo formule (2.45) i (2.46):

(b) $$\operatorname{grad}U=r\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r})+(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r})\operatorname{grad}r=$$

$$=r\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r})\mathbf{e}_r,$$

jer je u prvom delu zadatka pokazano da je $\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r})=\mathbf{A}$.

2.5. Radeći kao u prethodnom zadatku nalazimo:

$$\operatorname{grad} U = \operatorname{grad}[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{r})] + \operatorname{grad}[\mathbf{M}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{N})] =$$
$$= \operatorname{grad}[(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{r}] + \operatorname{grad}[(\mathbf{N}\times\mathbf{M})\cdot\mathbf{r}] =$$
$$= \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{N}\times\mathbf{M}.$$

Gradijent date skalarne funkcije je, dakle, konstantan vektor. Stoga su ekviskalarne površi ravni, normalne na ovaj konstantan vektor.

2.6. Pošto je, prema zadatku,

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)} = F[x_1, x_2, x_3, t)],$$

imaćemo, na osnovu obrasca (2.26),

$$\nabla\varphi = \frac{dF}{dp}\nabla p = \frac{1}{\rho(p)}\nabla p.$$

2.7. Formule koje povezuju sferne koordinate r, ϑ i φ sa Descartesovim x_1, x_2 i x_3 su kao što je poznato iz matematičke analize,

$$x_1 = r\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad x_2 = r\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad x_3 = r\cos\vartheta$$

(v. i obrasce (3.16) u Glavi 3.). Odavde lako nalazimo i obrnute relacije:

$$r = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \qquad \vartheta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{x_3}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1},$$

pa primenom formule (2.22) neposredno dobijamo:

$$\nabla r = \frac{x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}},$$

$$\nabla\vartheta = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\,\frac{x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} - \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\mathbf{e}_3, \qquad (R.2.2)$$

$$\nabla\varphi = \frac{-x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2}{x_1^2+x_2^2}.$$

2.8. Prva od navedenih relacija je dokazana u zadatku 2.4, formula $(R.2.1)$. Zadržimo se, stoga, samo na drugoj. Ona je ekvivalentna sledećim trima skalarnim jednačinama:

$$(\mathbf{r}\cdot\nabla)A_1 = x_1\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial A_1}{\partial x_3} = A_1,$$

$$(\mathbf{r}\cdot\nabla)A_2 = x_1\frac{\partial A_2}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial A_2}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial A_2}{\partial x_3} = A_2,$$

$$(\mathbf{r}\cdot\nabla)A_3 = x_1\frac{\partial A_3}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial A_3}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial A_3}{\partial x_3} = A_3.$$

Prema Euler-ovoj teoremi o homogenim funkcijama, sve tri komponente vektora $\mathbf{A}$ moraju biti homogene funkcije prvog stepena homogenosti.

Napomena: Pod *homogenom funkcijom* promenljivih $x_1, x_2, \ldots x_n$ podrazumeva se funkcija koja ima osobinu da *ma za kakvo k važi*:

$$F(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n) = k^s F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

gde je s konstanta karakteristična za tu funkciju, tzv. stepen (ili red) homogenosti. Za homogene funkcije važi *Euler-ova teorema*:

$$x_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial F}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial F}{\partial x_n} = sF.$$

2.9. Eksplicitno napisan, zadani vektorski diferencijalni operator sa datim vektorom $\mathbf{A}$ ima oblik:

$$\mathbf{A}\times\nabla = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{e}_1\left(A_2\frac{\partial}{\partial x_3} - A_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \mathbf{e}_2\left(A_3\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1\frac{\partial}{\partial x_3}\right) + \mathbf{e}_3\left(A_1\frac{\partial}{\partial x_2} - A_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right).$$

Ovaj se operator može, očevidno, primenjivati na skalarne i vektorske funkcije, i to na sledeće načine:

$$(\mathbf{A}\times\nabla)U, \qquad (\mathbf{A}\times\nabla)\cdot\mathbf{B}, \qquad (\mathbf{A}\times\nabla)\times\mathbf{B}.$$

Prvi i drugi izraz se mogu neposredno transformisati na oblik:

$$(\mathbf{A}\times\nabla)U = \mathbf{A}\times(\nabla U) = \mathbf{A}\times\operatorname{grad} U,$$
$$(\mathbf{A}\times\nabla)\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B},$$

što ćemo simbolički napisati kao:

$$\mathbf{A}\times\nabla \equiv \mathbf{A}\times\operatorname{grad},$$
$$(\mathbf{A}\times\nabla)\cdot \equiv \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}. \qquad (R.\ 2.3)$$

Za treći izraz nalazimo, razvijanjem trostrukog proizvoda po formuli (1.40),

$$(\mathbf{A}\times\nabla)\times\mathbf{B} = \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*) - \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})$$

pri čemu je u prvom članu desne strane morala biti upotrebljena zvezdica, jer u polaznom izrazu Hamilton-ov operator deluje samo na $\mathbf{B}$. Uzmemo li sada u obzir relaciju

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*) = \mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B},$$

iskorišćenu pri izvođenju formule (2.46), imaćemo:

$$(\mathbf{A}\times\nabla)\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B},$$

odnosno simbolički:

$$(\mathbf{A}\times\nabla)\times \equiv \mathbf{A}\times\operatorname{rot} + (\mathbf{A}\cdot\nabla) - \mathbf{A}\operatorname{div}. \qquad (R.\ 2.4)$$

Dakle, zaista se zadani operator uvek može svesti na standardne diferencijalne operatore.

2.10. Najjednostavnije je razviti postavljene izraze i prikazati ih u analitičkom obliku. Tako se u prvom slučaju dobija:

$$\mathbf{m}=\mathbf{r}\times\nabla=\mathbf{e}_1\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+\mathbf{e}_2\left(x_3\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\right)+\mathbf{e}_3\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$$

(v. prethodni zadatak), i

$$\mathbf{m}\times\mathbf{m}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ x_2\frac{\partial}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial}{\partial x_2} & x_3\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3} & x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\\ x_2\frac{\partial}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial}{\partial x_2} & x_3\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3} & x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\end{vmatrix}.$$

Da bismo izbegli glomazne formule, razmotrićemo samo jednu komponentu poslednjeg operatora:

$$(\mathbf{m}\times\mathbf{m})_1=\left(x_3\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)-$$

$$-\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\left(x_3\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\right)=$$

$$=x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right)-x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)-x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+$$

$$+x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\right)+x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\right)+$$

$$+x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\right)-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\right)=$$

$$=\left(x_1x_3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right)-x_2x_3\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-x_1^2\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}+x_1x_2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}-$$

$$-x_1x_3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+x_1^2\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}+x_2x_3\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\left(x_1x_2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}+x_2\frac{\partial}{\partial x_3}\right);$$

članovi u zagradi potiču od prvog i poslednjeg člana prethodnog izraza; u njima se drugo diferenciranje vrši po promenljivoj koja se pojavljuje i u operatoru prvog diferenciranja. Svedemo li poslednji izraz, nalazimo:

$$(\mathbf{m}\times\mathbf{m})_1=x_3\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_3}=-m_1.$$

Očevidno je da se analogi rezultati dobijaju i za druge dve komponente, čime je prva od zadanih relacija dokazana.

Načinimo na ovom mestu dve napomene. (1) Posmatrani operator $\mathbf{m}=\mathbf{r}\times\nabla$ pomnožen sa-*iħ* predstavlja *kvantnomehanički operator (orbitalnog) momenta impulsa*. (2) Rezultat $\mathbf{m}\times\mathbf{m}=-\mathbf{m}$ upozorava takođe da se pri primeni simboličkog računa mora ispoljiti velika obazrivost i *zaključke o osobinama vektorskih proizvoda primenjivati samo na proverene slučajeve.*

Drugi identitet naveden u zadatku se dobija na osnovu izvedene relacije, razvijanjem četvorostrukog proizvoda:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{m})=[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{m}]\cdot\mathbf{m}=$$

$$=[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{m})\,\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\,\mathbf{a}]\cdot\mathbf{m}=$$

$$=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{m})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}),$$

jer se, u polaznom izrazu može $\mathbf{m}\times\mathbf{m}$ zameniti sa $-\mathbf{m}$.

2.11. U prva dva izraza oba Hamilton-ova operatora nisu ekvivalentni, jer se prvi primenjuje na oba vektora, a drugi samo na **B**. Stoga ih u simboličkom računanju moramo razlikovati, što se može postići označavajući ih sa ∇_1 i ∇_2 respektivno.

(a)
$$\mathbf{Q}=[(\nabla_1\times\mathbf{A})\times\nabla_2]\times\mathbf{B}=$$

$$=\nabla_2[(\nabla_1\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}]-(\nabla_1\times\mathbf{A})(\nabla_2\cdot\mathbf{B})=$$

$$=\nabla_2[\nabla_1\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})]-(\nabla_1\times\mathbf{A})\operatorname{div}\mathbf{B}=$$

$$=\nabla_2(\mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B})-\nabla_1\times(\mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B}).$$

Polazni izraz je najpre razvijen prema formuli (1.40), zatim je iskorišćena osobina (1.37) mešovitog proizvoda i definicija divergencije, i na kraju još i relacija (2.49). Dobijeni rezultat se alternativno može pisati u obliku:

$$\mathbf{Q}=\operatorname{grad}(\mathbf{B}^*\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}^*)-\operatorname{rot}(\mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B}),$$

označavajući zvezdicom (umesto indeksom 2) da naznačeni operator deluje samo na **B**. Pomoću (2.46) i (2.51) imamo dalje:

$$\mathbf{Q}=\operatorname{rot}\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}+(\operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}-\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\operatorname{rot}\mathbf{B}-$$

$$-\operatorname{rot}\mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}=$$

$$=\operatorname{rot}\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}+(\operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\Delta\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\operatorname{rot}\mathbf{B}-\operatorname{rot}\mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{B},\quad (R.\ 2.5)$$

imajući u vidu i identitet (2.76).

(b)
$$\mathbf{R}=[(\nabla_1\times\mathbf{A})\times\nabla_2]\cdot\mathbf{B}=(\nabla_1\times\mathbf{A})\cdot(\nabla_2\times\mathbf{B})=$$

$$=(\nabla_1\times\mathbf{A})\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}=\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B});$$

osobina mešovitog proizvoda (1.37) je iskorišćena dvaput i u zadnjem izrazu je izostavljen indeks uz Hamilton-ov operator, jer je isključena mogućnost zabune. Na osnovu (2.49) imamo definitivno:

$$\mathbf{R}=\operatorname{rot}\mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}.\qquad (R.\ 2.6)$$

(c) Ovde su oba Hamilton-ova operatora ravnopravna i primenjuju se na obe vektorske funkcije,

$$S=[\nabla\times(\nabla\cdot\mathbf{A})]\cdot\mathbf{B}=\nabla\cdot[(\nabla\times\mathbf{A})\times\mathbf{B}]=\operatorname{div}[(\nabla\times\mathbf{A})\times\mathbf{B}].$$

Izračunaćemo najpre izraz čija nam je divergencija potrebna:

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{A}^*) \times \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B}^* =$$
$$= \mathbf{A}^* (\mathbf{B} \cdot \nabla) - \nabla (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}^*) - \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^*) =$$
$$= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \operatorname{grad} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) -$$
$$= \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B};$$

u izvođenju ovog rezultata iskorišćena je relacija (2.46.) Uzmemo li sad u obzir formule (2.48) i (2.49), dobićemo:

$$S = \operatorname{div} (\mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B}) - \operatorname{div} (\mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) - \operatorname{div} (\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}) - \operatorname{div} [(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}] =$$
$$= \operatorname{div} \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B} - \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} -$$
$$- \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{div} [(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}] =$$
$$= \operatorname{div} \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot (\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} -$$
$$- 2 \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} - \operatorname{div} [(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}]. \qquad (R.\ 2.7)$$

Poslednji član se može dalje transformisati, polazeći od relacija (2.46) i (2.52), što će biti učinjeno u zadatku 2.24.

2.12. Za vektore položaja tačke P možemo eksplicitno pisati:

$$\mathbf{r}_1 = (x_1 - a_1) \mathbf{e}_1 + (x_2 - a_2) \mathbf{e}_2 + (x_3 - a_3) \mathbf{e}_3 = \mathbf{r} - \mathbf{a},$$
$$\mathbf{r}_2 = (x_1 - b_1) \mathbf{e}_1 + (x_2 - b_2) \mathbf{e}_2 + (x_3 - b_3) \mathbf{e}_3 = \mathbf{r} - \mathbf{b},$$

tako da dobijamo:

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{b}) = \mathbf{b} \times \mathbf{r} - \mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{a} \times \mathbf{b},$$
$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}^2 - (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

i neposredno na osnovu definicije nalazimo:

$$\nabla \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \operatorname{div} (\mathbf{b} \times \mathbf{r}) - \operatorname{div} (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) + \operatorname{div} (\times \mathbf{b}) =$$
$$= (\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{r}) - (\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{r}) =$$
$$= 0,$$
$$\nabla \times (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \operatorname{rot} (\mathbf{b} \times \mathbf{r}) - \operatorname{rot} (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) + \operatorname{rot} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) =$$
$$= [\mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{r} - \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{b}] -$$
$$- [\mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{r} - \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{a}] =$$
$$= 2 (\mathbf{b} - \mathbf{a});$$

pored obrasca (2.52), iskorišćene su ovde i relacije $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$ i (R. 2.1). Dalje imamo:

$$\nabla (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \operatorname{grad} r^2 - \operatorname{grad} [(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{r}] =$$
$$= 2 \mathbf{r} - (\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

2.13. (*a*) Imamo:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} =$$
$$= (3 x_1^2 + x_2^2) + (3 x_2^2 + x_1^2) + 0 = 4 (x_1^2 + x_2^2),$$
$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) \mathbf{e}_3 =$$
$$= (2 x_1 x_2 - 2 x_1 x_2) \mathbf{e}_3 = 0.$$

(*b*) Na osnovu definicije fluksa vektorske funkcije i Gaussove teoreme (2.54), imamo:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV = 4 \int (x_1^2 + x_2^2) \, dV.$$

Pošto je $x_1^2 + x_2^2$ rastojanje tačke (x_1, x_2, x_3) od x_3-ose, integral u poslednjem izrazu nije, dakle, ništa drugo nego moment inercije tela jedinične gustine ograničenog površi S u odnosu na x_3-osu.

2.14. Napišimo najpre zadanu skalarnu funkciju u podesnijem obliku:

$$Q = (\vec{\omega} \times \mathbf{r})^2 - (\vec{\omega} \cdot \mathbf{r}) r^2 =$$
$$= (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) - (\vec{\omega} \cdot \mathbf{r}) r^2 =$$
$$= [(\vec{\omega} \times \mathbf{r}) \times \vec{\omega}] \cdot \mathbf{r} - (\vec{\omega} \cdot \mathbf{r}) r^2 =$$
$$= [\mathbf{r} \omega^2 - \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \mathbf{r})] \cdot \mathbf{r} - (\vec{\omega} \cdot \mathbf{r}) r^2 =$$
$$= \omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \mathbf{r})^2 - (\vec{\omega} \cdot \mathbf{r}) r^2 =$$
$$= (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3)^2 -$$
$$- (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \qquad (R.\ 2.8)$$

Nadjimo sad potrebne parcijalne izvode:

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega_1} = 2 \omega_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2 (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3) x_1 - x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$
$$\frac{\partial Q}{\partial \omega_2} = 2 \omega_2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2 (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3) x_2 - x_2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$
$$\frac{\partial Q}{\partial \omega_3} = 2 \omega_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2 (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3) x_3 - x_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = 2 x_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) - 2 (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3) \omega_1 - \omega_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) -$$
$$- 2 x_1 (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x_2} = 2\,x_2\,(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2) - 2\,(\omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\omega_3 x_3)\,\omega_2 - \omega_2\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2) -$$

$$- 2\,x_2\,(\omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\omega_3 x_3),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x_3} = 2\,x_3\,(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2) - 2\,(\omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\omega_3 x_3)\,\omega_3 - \omega_3\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2) -$$

$$- 2\,x_3\,(\omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\omega_3 x_3).$$

Traženi parcijalni gradijenti će se očevidno moći napisati u konciznom obliku na sledeći način:

$$\frac{\partial Q}{\partial \vec{\omega}} = 2\,\vec{\omega}\,r^2 - 2\,\mathbf{r}\,(\vec{\omega}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{r}\,r^2 = 2\,(\mathbf{r}\times\vec{\omega})\times\mathbf{r} - \mathbf{r}\,r^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{r}} = 2\,\mathbf{r}\,\omega^2 - 2\,\vec{\omega}\,(\vec{\omega}\cdot\mathbf{r}) - \vec{\omega}\,r^2 - 2\,\mathbf{r}\,(\vec{\omega}\cdot\mathbf{r}) = \qquad (R.\ 2.9)$$

$$= 2\,(\vec{\omega}\times\mathbf{r})\times\vec{\omega} - \vec{\omega}\,r^2 - 2\,\mathbf{r}\,(\vec{\omega}\cdot\mathbf{r}).$$

2.15. (*a*) Izračunajmo najpre $\nabla_{r_1}\cdot\mathbf{A}$ i $\nabla_{r_2}\cdot\mathbf{A}$. Imamo:

$$\nabla_{r_1}\cdot\mathbf{A} = \nabla_{r_1}\cdot(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2) = \nabla\cdot(\dot{\mathbf{r}}_1\times\mathbf{r}_2) = \mathbf{r}_2\cdot\operatorname{rot}\mathbf{r}_1 = 0,$$

$$\nabla_{r_2}\cdot\mathbf{A} = \nabla_{r_2}\cdot(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2) = \nabla\cdot(\mathbf{r}_1\times\dot{\mathbf{r}}_2) = -\,\mathbf{r}_1\cdot\operatorname{rot}\mathbf{r}_2 = 0,$$

tako da je:

$$\nabla_{r_1}(\nabla_{r_2}\cdot\mathbf{A}) - \nabla_{r_2}(\nabla_{r_1}\cdot\mathbf{A}) = 0. \qquad (R.\ 2.10)$$

U ovim izvođenjima je korišćena formula za divergenciju vektorskog proizvoda (2.49).

(*b*) Analogo prethodnom slučaju, izračunajmo najpre:

$$\nabla_{r_1}\times\mathbf{A} = \nabla_{r_1}\times(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2) = \operatorname{rot}(\dot{\mathbf{r}}_1\times\mathbf{r}_2) =$$

$$= -\,\mathbf{r}_2\operatorname{div}\dot{\mathbf{r}}_1 + (\mathbf{r}_2\cdot\nabla)\,\mathbf{r}_1 =$$

$$= -\,3\,\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 = -\,2\,\mathbf{r}_2,$$

$$\nabla_{r_2}\times\mathbf{A} = \nabla_{r_2}\times(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2) = \operatorname{rot}(\mathbf{r}_1\times\dot{\mathbf{r}}_2) = 2\,\mathbf{r}_1;$$

ovde je iskorišćen obrazac za rotor vektorskog proizvoda (2.52) kao i relacija (*R.* 2.1). Sada možemo pisati:

$$\nabla_{r_1}\times(\nabla_{r_2}\times\mathbf{A}) - \nabla_{r_2}\times(\nabla_{r_1}\times\mathbf{A}) = \nabla_{r_1}\times(2\,\mathbf{r}_1) + \nabla_{r_2}\times(2\,\mathbf{r}_2) =$$

$$= 2\operatorname{rot}\mathbf{r}_1 + 2\operatorname{rot}\mathbf{r}_2 =$$

$$= 0. \qquad (R.\ 2.11)$$

(*c*) Koristeći gore nadjene izraze imaćemo i:

$$\nabla_{r_1}\cdot(\nabla_{r_2}\times\mathbf{A}) - \nabla_{r_2}\cdot(\nabla_{r_1}\times\mathbf{A}) = \nabla_{r_1}\cdot(2\,\mathbf{r}_1) + \nabla_{r_2}\cdot(2\,\mathbf{r}_2) =$$

$$= 2\,(\operatorname{div}\mathbf{r}_1 + \operatorname{div}\mathbf{r}_2) =$$

$$= 12. \qquad (R.\ 2.12)$$

2.16. (*a*) Pošto je izraz u srednjoj zagradi proizvod vektora i skalara, primenićemo najpre (2.48):

$$\operatorname{div}[\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\,r^n] = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\,r^n\operatorname{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\operatorname{grad}[(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\,r^n] =$$

$$= \mathbf{a}\cdot\operatorname{grad}[(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\,r^n],$$

jer je $\mathbf{a}$, po zadatku, konstantan vektor pa je $\operatorname{div}\mathbf{a}=0$. Primenimo li sad najpre (2.45) za gradijent proizvoda dva skalara, a zatim (2.46) za gradijent skalarnog proizvoda i (2.27) za gradijent funkcije koja zavisi samo od intenziteta vektora položaja, imaćemo:

$$\operatorname{div}[\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\,r^n] = \mathbf{a}\cdot[r^n\operatorname{grad}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}) + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\operatorname{grad}r^n] =$$

$$= \mathbf{a}\cdot[r^n\,\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\,n r^{n-1}\,\mathbf{e}_r] =$$

$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,r^n + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\,n r^{n-2}, \qquad (R.\ 2.13)$$

pošto je $\operatorname{grad}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{b}$.

(*b*) Koristeći potrebne relacije iz odeljka 2.5 dobijamo sledeći niz jednakosti:

$$\operatorname{rot}[\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\,r^n] = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\,r^n\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\times\operatorname{grad}[(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\,r^n] =$$

$$= -\,\mathbf{a}\times\operatorname{grad}[(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\,r^n] =$$

$$= -\,\mathbf{a}\times[r^n\operatorname{grad}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}) + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\operatorname{grad}r^n] =$$

$$= -\,\mathbf{a}\times[r^n\,\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\,n r^{n-2}\,\mathbf{r}] =$$

$$= -\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,r^n - (\mathbf{a}\times\mathbf{r})\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\,n r^{n-2}; \qquad (R.\ 2.14)$$

ako se još uzme u obzir zakon alternacije vektorskog proizvoda, lako se nalazi krajnji rezultat u obliku u kome je naveden u zadatku.

2.17. i **2.18.** Postupak je potpuno istovetan sa onim u prethodnom zadatku, te se stoga dokazivanje tačnosti navedenih relacija ostavlja čitaocu za samostalnu vežbu.

2.19. Prema uslovu zadatka je $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \alpha\,\mathbf{A}$, gde je α neka skalarna funkcija. Uzmemo li divergenciju i rotor ove jednakosti, dolazimo do:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{div}(\alpha\,\mathbf{A}) = \alpha\operatorname{div}\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\operatorname{grad}\alpha = 0,$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}(\alpha\,\mathbf{A}) = \alpha\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\times\operatorname{grad}\alpha.$$

Prva od ovih jednačine daje:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = -\frac{1}{\alpha}\,\mathbf{A}\cdot\operatorname{grad}\alpha,$$

a druga se, s obzirom na identitet (2.76) i vezu između $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}$, može dalje napisati kao:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\,\mathbf{A} = \alpha^2\,\mathbf{A} - \mathbf{A}\times\operatorname{grad}\alpha.$$

Kombinujući ove dve jednačine nalazimo:

$$\operatorname{grad}\left(-\frac{1}{\alpha}\,\mathbf{A}\cdot\operatorname{grad}\alpha\right) - \Delta\,\mathbf{A} = \alpha^2\,\mathbf{A} - \mathbf{A}\times\operatorname{grad}\alpha.$$

Primenjujući na gradijent skalarnog proizvoda (prvi član sleva) formulu (2.46), dobićemo:

$$\mathbf{A}\times \mathrm{rot}\left(-\frac{1}{\alpha}\mathrm{grad}\,\alpha\right)-\frac{1}{\alpha}\mathrm{grad}\,\alpha\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\left(-\frac{1}{\alpha}\mathrm{grad}\,\alpha\right)-\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{grad}\,\alpha\cdot\nabla\right)\mathbf{A}=$$

$$=\nabla\mathbf{A}+\alpha^2\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\mathrm{grad}\,\alpha.$$

Ovo se zbog veze $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}$, može dalje napisati kao:

$$\Delta\mathbf{A}+\alpha^2\mathbf{A}=2\mathbf{A}\times\mathrm{grad}\,\alpha-[(\mathrm{grad}\ln\alpha)\cdot\nabla]\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)(\mathrm{grad}\ln\alpha),$$

uzimajući istovremeno u obzir da je $\frac{1}{\alpha}\mathrm{grad}\,\alpha=\mathrm{grad}\ln\alpha$, prema (2.26), kao i da je $\mathrm{rot\,grad}\equiv 0$.

Kao što se iz gornjeg rezultata vidi, u slučaju kad je α konstantno dobija se $\Delta\mathbf{A}+\alpha^2\mathbf{A}=0$, što je i trebalo pokazati.

2.20. Na osnovu relacije (2.26), za gradijent posredne funkcije nalazimo:

$$\nabla f(\phi)=\frac{df}{d\phi}\nabla\phi,$$

a uzimanjem divergencije ovog izraza, vodeći računa o (2.48), dobijamo:

$$\Delta f(\phi)=\nabla\cdot\left(\frac{df}{d\phi}\nabla\phi\right)=$$

$$=\frac{df}{d\phi}\nabla\cdot(\nabla\phi)+\nabla\phi\cdot\nabla\frac{df}{d\phi}=$$

$$=\frac{df}{d\phi}\Delta\phi+\nabla\phi\cdot\left[\frac{d}{d\phi}\left(\frac{df}{d\phi}\right)\nabla\phi\right]=$$

$$=\frac{df}{d\phi}\Delta\phi+\frac{d^2f}{d\phi^2}(\nabla\phi^2), \qquad (R.\ 2.15)$$

što znači da je ispitivana relacija ispravna.

2.21. Postupak je analog onome iz prethodnog zadatka, samo što kao polazna formula služi relacija za gradijent proizvoda dva skalara (2.45):

$$\nabla(\phi\psi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi;$$

$$\Delta(\phi\psi)=\nabla\cdot(\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi)=$$

$$=\nabla\cdot(\phi\nabla\psi)+\nabla\cdot(\psi\nabla\phi)=$$

$$=\nabla\phi\cdot\nabla\psi+\phi\nabla\cdot(\nabla\psi)+\nabla\psi\cdot\nabla\phi+\psi\nabla\cdot(\nabla\phi)=$$

$$=\phi\Delta\psi+\psi\Delta\phi+2\nabla\phi\cdot\nabla\psi.$$

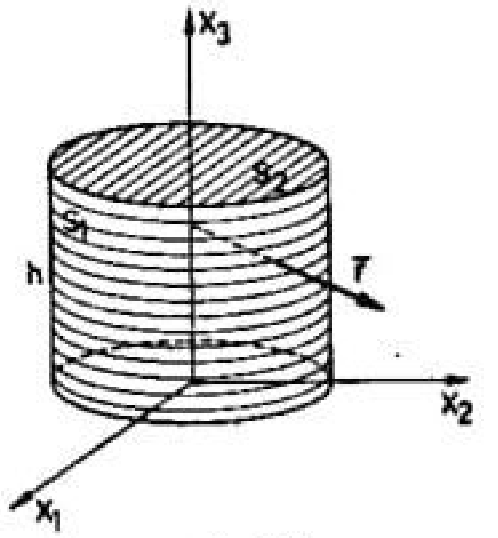
2.22. (*a*) U ovom slučaju (slika 2.17.) zadani integral ćemo posebno računati po omotaču i po gornjoj bazi:

$$\int_S d\mathbf{S}=\int_{S_1}d\mathbf{S}+\int_{S_2}d\mathbf{S}=$$

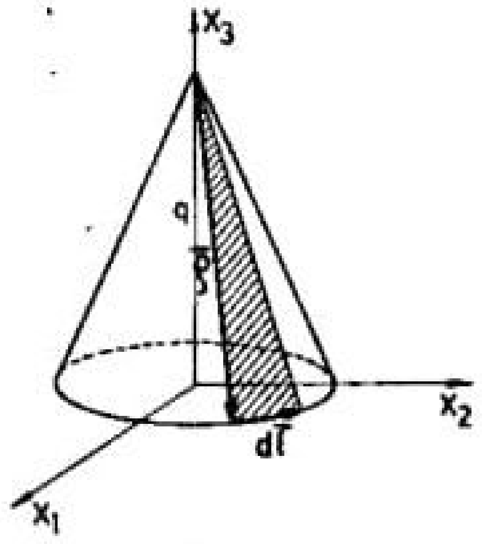
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^h a\,d\varphi\,dz(\cos\varphi\,\mathbf{e}_1+\sin\varphi\,\mathbf{e}_2)+\int_0^a\int_0^{2\pi}\rho\,d\rho\,d\varphi\,\mathbf{e}_3,$$

pošto se jedinični vektor normale na omotaču poklapa sa $\mathbf{e}_\rho=\cos\varphi\,\mathbf{e}_1+\sin\varphi\,\mathbf{e}_2$, a na gornjoj bazi je $\mathbf{e}_3$. Integral po omotaču je jednak nuli, kako je lako proveriti, a za onaj po bazi se nalazi:

$$\int_S d\mathbf{S}=a^2\pi\,\mathbf{e}_3.$$



Sl. 2.17.



Sl. 2.18.

(*b*) Ako za element površine konusa uzmemo infinitezimalni sektor, označen na slici 2.18, moći ćemo usmereni element površine prikazati kao:

$$d\mathbf{S}=\frac{1}{2}\vec{\rho}\times d\mathbf{l},$$

pri čemu je iz geometrijskih odnosa koji se vide na slici,

$$\vec{\rho}=a(\cos\varphi\,\mathbf{e}_1+\sin\varphi\,\mathbf{e}_2)-q\,\mathbf{e}_3,$$

$$d\mathbf{l}=a\,d\varphi(-\sin\varphi\,\mathbf{e}_1+\cos\varphi\,\mathbf{e}_2),$$

tako da će biti:

$$d\mathbf{S}=\frac{1}{2}(a\cos\varphi\,\mathbf{e}_1+a\sin\varphi\,\mathbf{e}_2-q\,\mathbf{e}_3)\times(-\sin\varphi\,\mathbf{e}_1+\cos\varphi\,\mathbf{e}_2)\,a\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}(q\cos\varphi\,\mathbf{e}_1+q\sin\varphi\,\mathbf{e}_2+a\,\mathbf{e}_3)\,a\,d\varphi.$$

Prema tome:

$$\int_S d\mathbf{S}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(q\cos\varphi\,\mathbf{e}_1+q\sin\varphi\,\mathbf{e}_2+a\,\mathbf{e}_3)\,a\,d\varphi=a^2\pi\,\mathbf{e}_3.$$

(c) Za usmereni element površine možemo uzeti već nadjeni izraz u zadatku 2.2. U nešto izmenjenom obliku:

$$d\mathbf{S}=\left(\frac{x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2}{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}}+\mathbf{e}_3\right)dx_1\,dx_2,$$

$$\int_S d\mathbf{S}=\int_{S'}\left(\frac{x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2}{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}}+\mathbf{e}_3\right)dx_1\,dx_2,$$

pri čemu je S' površina samog posmatranog kruga. Integracija je najjednostavnija nakon prelaska u polarne koordinate:

$$\int_S d\mathbf{S}=\int_0^a\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho\cos\varphi\,\mathbf{e}_1+\rho\sin\varphi\,\mathbf{e}_2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}+\mathbf{e}_3\right)\rho\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=\mathbf{e}_3\int_0^a\int_0^{2\pi}\rho\,d\rho\,d\varphi=a^2\pi\,\mathbf{e}_3.$$

Podudaranje vrednosti integrala za sve tri površi "nategnute" na zadanu konturu nije slučajna koincidencija. Naime, $\int_S d\mathbf{S}$ zavisi samo od konture (u posmatranom slučaju krug u x_1Ox_2-ravni). Da bismo to dokazali, posmatraćemo konturni integral

$$\mathbf{J}=\oint_L\frac{1}{2}\mathbf{r}\times d\mathbf{l},$$

gde je $\mathbf{r}$ vektor položaja tačke na konturi u odnosu na proizvoljno odabran pol. Dokaz da posmatrani integral zaista ne zavisi od izbora pola ostavljamo čitaocu za samostalnu vežbu. Transformišimo ovaj integral u površinski. U tom cilju primenjujemo postupak analog onome kod izvođenja jednačina (2.59) i (2.61). Neka je $\mathbf{C}$ proizvoljan vektor, pa imamo:

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{J}=\mathbf{C}\cdot\oint_L\frac{1}{2}\mathbf{r}\times d\mathbf{l}=\frac{1}{2}\oint\mathbf{C}\cdot(\mathbf{r}\times d\mathbf{l})=$$

$$=\frac{1}{2}\oint_L(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r})\cdot d\mathbf{l}=\frac{1}{2}\int_S\operatorname{rot}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_S[\mathbf{C}\operatorname{div}\mathbf{r}-(\mathbf{C}\cdot\nabla)\mathbf{r}]\cdot d\mathbf{S}.$$

Uzmimo sad u obzir da je $\operatorname{div}\mathbf{r}=3$ i primenimo relaciju (*R.* 2.1). Tako nalazimo:

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{J}=\int_S\mathbf{C}\cdot d\mathbf{S},$$

odnosno, zbog proizvoljnosti vektora $\mathbf{C}$,

$$\mathbf{J}=\oint_L\frac{1}{2}\mathbf{r}\times d\mathbf{l}=\int_S d\mathbf{S}. \qquad (R.\,2.16)$$

Pošto je posmatrani integral u sva tri slučaja jednak istom konturnom integralu, jasno je da jednakost rezultata nije slučajna: u smislu Stokes-ove teoreme $\int_S d\mathbf{S}$ imaće istu vrednost ma za kakvu površ "nategnutu" na zadani krug.

Napomenimo još na kraju da je identitet (*R.* 2.16) od interesa u teoriji magnetnih momenata linijskih struja.

2.23. Podesno je najpre zadani integral pretvoriti u zapreminski, koristeći opet skalarno množenje sa proizvoljnim konstantnim vektorom $\mathbf{C}$. Tako se dobija:

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{J}=\mathbf{C}\cdot\oint_S(\mathbf{e}_3\times\mathbf{r})\times d\mathbf{S}=\oint_S\mathbf{C}\cdot[(\mathbf{e}_3\times\mathbf{r})\times d\mathbf{S}]=$$

$$=\oint_S[\mathbf{C}\times(\mathbf{e}_3\times\mathbf{r})]\cdot d\mathbf{S}=\int_V\operatorname{div}[\mathbf{C}\times(\mathbf{e}_3\times\mathbf{r})]\,dV=$$

$$=\int_V[(\mathbf{e}_3\times\mathbf{r})\cdot\operatorname{rot}\mathbf{C}-\mathbf{C}\cdot\operatorname{rot}(\mathbf{e}_3\times\mathbf{r})]\,dV=$$

$$=-\mathbf{C}\cdot\int_V\operatorname{rot}(\mathbf{e}_3\times\mathbf{r})\,dV.$$

Zbog proizvoljnosti vektora $\mathbf{C}$ i relacije (2.52) za rotor vektorskog proizvoda, imaćemo dalje:

$$\mathbf{J}=-\int_V\operatorname{rot}(\mathbf{e}_3\times\mathbf{r})\,dV=$$

$$=-\int_V[\mathbf{e}_3\operatorname{div}\mathbf{r}-\mathbf{r}\operatorname{div}\mathbf{e}_3-(\mathbf{e}_3\cdot\nabla)+(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{e}_3]\,dV=$$

$$=-2\mathbf{e}_3\int_V dV,$$

uzimajući opet u obzir važenje identiteta (*R.* 2.1) i činjenicu da je $\operatorname{div}\mathbf{r}=3$. Potrebno je, dakle, izračunati zapreminu ograničenu zadanim površima (rotacioni paraboloid i ravan normalna na njegovu osu). Prema pravilima za računanje trostrukih integrala, imaćemo:

$$V=\iiint_{D_3}dx_1\,dx_2\,dx_3=\iint_{D_2}dx_1\,dx_2\int_{\frac{x_1^2+x_2^2}{2p}}^{h}dx_3=$$

$$=\iint_D\left(h-\frac{x_1^2+x_2^2}{2p}\right)dx_1\,dx_2,$$

gde je D_2 domen ograničen kružnicom u x_1Ox_2-ravni, sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom $\sqrt{2px}$. Integracija je najjednostavnija u polarnim koordinatama:

$$V=\int_0^{\sqrt{2ph}}\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\left(h-\frac{\rho^2}{2p}\right)=2\pi\int_0^{\sqrt{2ph}}\left(h-\frac{\rho^2}{2p}\right)\rho\,d\rho=\pi ph^2.$$

Traženi integral, prema, tome, ima vrednost:

$$\mathbf{J}=-2\,\mathbf{e}_3V=-2\pi ph^2\,\mathbf{e}_3.$$

2.24. Podjimo od relacija (2.46) i (2.52). Njihovim sabiranjem i oduzimanjem se, uz neznatan razmeštaj članova, dobija:

$$(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}=\frac{1}{2}\{\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})+\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})-\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}-$$
$$-\mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}-\mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B}+\mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A}\},$$
$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}=\frac{1}{2}\{\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})-\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})-\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}-$$
$$-\mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}+\mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B}-\mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A}\}. \qquad (R.\ 2.17)$$

Na osnovu uslova $\operatorname{rot}\mathbf{A}=0$ i $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$, datih zadatkom, gornji izrazi se mogu uprostiti:

$$(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}=\frac{1}{2}\{\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})+\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})-\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}+\operatorname{div}\mathbf{A}\},$$

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}=\frac{1}{2}\{\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})-\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})-\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}-\mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A}\},$$

pa se zadani integrali primenom Gauss-ove teoreme mogu dovesti na oblik:

$$\mathbf{J}_1=\oint_S[(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}]\cdot d\mathbf{S}=\int_V\operatorname{div}[(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}]\,dV=$$
$$=\frac{1}{2}\int_V\operatorname{div}\{\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})-\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})-\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}+\mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A}\}\,dV=$$
$$=\frac{1}{2}\int_V[\Delta(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})-\operatorname{div}(\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B})+\operatorname{div}(\mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A})]\,dV=$$
$$=\frac{1}{2}\int_V[\Delta(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})-\operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}+\operatorname{div}\mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B}+\mathbf{B}\cdot\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}]\,dV;$$

u poslednjem izrazu su primenjene relevantne formule za divergencije složenih izraza. Pošto je, u slučaju koji razmatra zadatak, $\operatorname{rot}\mathbf{A}=0$ i $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$, imaćemo dalje:

$$\mathbf{J}_1=\oint_S[(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}]\cdot d\mathbf{S}=$$
$$=\frac{1}{2}\int_V[\Delta(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})+\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}+\mathbf{B}\cdot\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}]\,dV=$$
$$=\frac{1}{2}\int_V[\Delta(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})+\mathbf{A}\cdot(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}-\Delta\mathbf{B})+\mathbf{B}\cdot(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A})]\,dV=$$
$$=\frac{1}{2}\int_V[\Delta(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})-\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B}+\mathbf{B}\cdot\Delta\mathbf{A}]\,dV. \qquad (R.\ 2.18)$$

Sve transformacije su očevidne. Na potpuno isti način se transformiše i drugi zadati integral. Čitaocu se ostavlja da samostalno pokaže da je rezultat:

$$\mathbf{J}_2=\oint_S[(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}]\cdot d\mathbf{S}=$$
$$=\frac{1}{2}\int_V[\Delta(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})-\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B}-\mathbf{B}\cdot\Delta\mathbf{A}]\,dV. \qquad (R.\ 2.19)$$

2.25. Zapazimo da je, kao što je lako direktno proveriti,

$$\operatorname{grad}U_1\times\operatorname{grad}U_2=\operatorname{rot}\left(\frac{1}{2}U_1\operatorname{grad}U_2-\frac{1}{2}U_2\operatorname{grad}U_1+\operatorname{grad}F\right),$$

gde je $F=F(x_1, x_2, x_3)$ neka proizvoljna funkcija. Prema tome koristeći Stokes-ovu teoremu, nalazimo:

$$\int_S(\operatorname{grad}U_1\times\operatorname{grad}U_2)\cdot d\mathbf{S}=$$
$$=\int_S\operatorname{rot}\left(\frac{1}{2}U_1\operatorname{grad}U_2-\frac{1}{2}U_2\operatorname{grad}U_1+\operatorname{grad}F\right)\cdot d\mathbf{S}=$$
$$=\oint\left(\frac{1}{2}U_1\operatorname{grad}U_2-\frac{1}{2}U_2\operatorname{grad}U_1+\operatorname{grad}F\right)\cdot d\mathbf{l}=$$
$$=\oint_L\left[\frac{1}{2}U_1\operatorname{grad}U_2-\frac{1}{2}\operatorname{grad}(U_1U_2)+\frac{1}{2}U_1\operatorname{grad}U_2+\operatorname{grad}F\right]\cdot d\mathbf{l}=$$
$$=\oint_L(U_1\operatorname{grad}U_2)\cdot d\mathbf{l}+\oint_L\operatorname{grad}\left(F-\frac{1}{2}U_1U_2\right)\cdot d\mathbf{l}.$$

U zadnjoj jednačini je drugi integral jednak nuli (totalni diferencijal) a u prvom možemo staviti $\operatorname{grad}U_2\cdot d\mathbf{l}=dU_2$, čime je prva od zadanih jednakosti dokazana.

Druga jednakost se dokazuje primenom Gauss-ove teoreme, i to na sledeći način:

$$\oint_S (U_1 U_2 \operatorname{grad} U_3)\cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div}(U_1 U_2 \operatorname{grad} U_3)\, dV =$$

$$= \int_V \operatorname{div}[U_1 (U_2 \operatorname{grad} U_3)]\, dV =$$

$$= \int_V [U_1 \operatorname{div}(U_2 \operatorname{grad} U_3) + (U_2 \operatorname{grad} U_3)\cdot \operatorname{grad} U_1]\, dV =$$

$$= \int_V [U_1 \operatorname{div}(U_2 \operatorname{grad} U_3) + U_2 (\operatorname{grad} U_1 \cdot \operatorname{grad} U_3)]\, dV.$$

2.26. Prema uslovima zadatka, za vektorsku funkciju **A** važi rot **A** ≡ 0. Treba ispitati div **B** i rot **B**, da bi se videlo kakvo je polje definisano vektorskom funkcijom **B**. Imaćemo:

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{A}) = \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{A} - \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{a} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{A} =$$

$$= \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{A} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{A} \neq 0,$$

što znači da je polje **B** solenoidalno, kao što je i trebalo pokazati.

Da bismo ispitali kakvo je polje $\mathbf{B} = \mathbf{a}\times\mathbf{A}$ u slučaju kad je **A** solenoidalno polje ($\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{A} \neq 0$), posmatrajmo ponovo:

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A} = -\mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A} \neq 0,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{A} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{A} = -(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{A} \neq 0.$$

Dakle, ako je **A** solenoidalno polje $\mathbf{B} = \mathbf{a}\times\mathbf{A}$ je u opštem slučaju složeno.

2.27. (*a*) Nadjimo najpre:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\operatorname{div}\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) =$$

$$= \frac{3}{r^3} - \mathbf{r}\cdot\left(\frac{3}{r^4}\mathbf{e}_r\right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\operatorname{rot}\mathbf{r} - \mathbf{r}\times\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) =$$

$$= \mathbf{r}\times\frac{3}{r^4}\mathbf{e}_r = 0.$$

Ovi rezultati pokazuju da je polje **A** *Laplace-ovo*, tako da se može uvesti bilo skalarni potencijal ($\mathbf{A} = -\operatorname{grad} U$), bilo vektorski ($\mathbf{A} = \operatorname{rot}\mathbf{W}$ uz uslov $\operatorname{div}\mathbf{W} = 0$, kako je objašnjeno u odeljku 2.8). Lako je proveriti da oba potencijala moraju zadovoljavati jednačine jednake matematičke strukture:

$$\Delta U = 0, \qquad \Delta\mathbf{W} = 0$$

Za njihovo rešavanje je najpodesnije preći u sferne koordinate, o čemu će biti više reči u narednoj Glavi. Uzimajući da je $U = U(r)$, gde je $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, i koristeći rezultate zadatka 3.7, možemo naći:

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = 0,$$

$$U(r) = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

pri čemu konstanta C_2 ostaje proizvoljna, a za C_1 moramo staviti jedinicu, da bi se $-\nabla U$ poklopio sa datom vektorskom funkcijom **A**. Rešavanje jednačine za vektorski potencijal **W** je znatno složenije, jer se ne može pretpostaviti da je on funkcija samo od r. Stoga ćemo ovaj detalj ovde izostaviti.

Napomenimo da je od svih vektorskih funkcija oblika $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}}{r^n}$ slučaj $n = 3$, koji smo ovde razmatrali, izuzetan zbog toga što samo on odgovara Laplace-ovom polju. Za svako drugo n se dobija $\operatorname{rot}\mathbf{A} \equiv 0$ i $\operatorname{div}\mathbf{A} \neq 0$, što znači da su polja koja ovome odgovaraju potencijalna, i skalarni potencijal im se može odrediti iz formule (2.97), dok vektorski potencijal uopšte ne postoji. Međutim, slučaj $n = 3$ je od posebnog interesa kod Coulomb-ovih i gravitacionih polja, što je bio razlog da njega odaberemo za analizu. Vektorski potencijali ovih polja nisu od interesa i obično se i ne razmatraju.

(*b*) U ovom slučaju je:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) + (\mathbf{a}\times\mathbf{r})\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{r^3}(\mathbf{r}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{r}) - \frac{3}{r^4}(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} =$$

$$= 0;$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) - (\mathbf{a}\times\mathbf{r})\times\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{r^3}[\mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{r} - \mathbf{r}\operatorname{div}\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{r} + (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{a}] + \frac{3}{r^4}(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\times\frac{\mathbf{r}}{r} =$$

$$= \frac{2\mathbf{a}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}}{r^5} =$$

$$= \frac{3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{a}}{r^3} \neq 0.$$

Prema tome, ovo polje je čisto solenoidalno, te postoji vektorski potencijal **W**, takav da je $\operatorname{rot}\mathbf{W} = \mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{r}}{r^3}$. Lako je direktnom zamenom proveriti da je

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{a}}{r} + \operatorname{grad}\phi, \qquad (R.\ 2.20)$$

gde je ϕ bilo kakva skalarna funkcija.

Učinimo i ovde jednu napomenu. Nađeni vektorski potencijal zadovoljava uslov $\operatorname{div}\mathbf{W}=0$ samo za neku određenu funkciju ϕ. Sistem jednačina

$$\operatorname{div}\mathbf{W}=0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{W}=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{r}}{r^3},$$

definiše čisto solenoidalno polje, koje bi se moglo odrediti pomoću formule (2.103):

$$\mathbf{W}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi}\int_G\left(\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{r}'}{r'^3}\right)\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^3}d^3r'=\frac{1}{2}\left[\frac{\mathbf{a}}{r}+\frac{\mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^3}\right].$$

Integracija je zametna, ali u principu jednostavna, te se ostavlja za samostalnu vežbu. Rezultat je sadržan u (*R.* 2.20), za posebno ϕ.

2.28. (*a*)

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\operatorname{div}(\vec\omega\times\mathbf{r})=\mathbf{r}\cdot\operatorname{rot}\vec\omega-\vec\omega\cdot\operatorname{rot}\mathbf{r}=0,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\operatorname{rot}(\vec\omega\times\mathbf{r})=\vec\omega\operatorname{div}\mathbf{r}-\mathbf{r}\operatorname{div}\vec\omega-(\vec\omega\cdot\nabla)\mathbf{r}+(\mathbf{r}\cdot\nabla)\vec\omega=$$

$$=2\vec\omega;$$

polje je čisto solenoidalno, te ima vektorski potencijal, $\mathbf{A}=\operatorname{rot}\mathbf{W}$. Međutim, pošto $|\mathbf{A}|$ raste sa $|\mathbf{r}|\to\infty$, nisu ispunjeni uslovi iz odeljka 2.8. i ne mogu se primeniti tamo navedene formule. To naravno, ne znači da vektorski potencijal ne postoji. Pošto i on teži beskonačnosti po modulu kad $|\mathbf{r}|\to\infty$, pokušaćemo da ga nađemo u obliku:

$$\mathbf{W}=f(r)(\mathbf{A}\times\mathbf{r})+\operatorname{grad}\phi; \qquad (R.\ 2.21)$$

poslednji član je analog onome u (*R.* 2.20). Imamo

$$\operatorname{rot}\mathbf{W}=\operatorname{rot}[f(r)(\mathbf{A}\times\mathbf{r})]=f(r)\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{r})-(\mathbf{A}\times\mathbf{r})\times\operatorname{grad}f(r)=$$

$$=f(r)\{\mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{r}-\mathbf{r}\operatorname{div}\mathbf{A}+(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{r}\}-f'(r)\frac{(\mathbf{A}\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}}{r}=$$

$$=f(r)(3\mathbf{A}+\mathbf{A}-\mathbf{A})-f'(r)\frac{(\mathbf{A}\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}}{r}=$$

$$=3f(r)\,\mathbf{A}-\frac{f'(r)}{r}(\mathbf{A}\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}. \qquad (R.\ 2.22)$$

Pošto mora biti $\operatorname{rot}\mathbf{W}=\mathbf{A}$, možemo uzeti, na primer, $f(r)=\frac{1}{3}$ (to je najjednostavniji, mada ne i jedini izbor, što je shvatljivo jer $\mathbf{W}$ nije jednoznačno određen); tako dobijamo:

$$\mathbf{W}=\frac{1}{3}\mathbf{A}\times\mathbf{r}=\frac{1}{3}(\vec\omega\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}.$$

(*b*)

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\operatorname{div}[(\vec\omega\times\mathbf{r})r]=r\operatorname{div}(\vec\omega\times\mathbf{r})+(\vec\omega\times\mathbf{r})\cdot\operatorname{grad}r=$$

$$=(\vec\omega\times\mathbf{r})\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}=0;$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\operatorname{rot}[(\vec\omega\times\mathbf{r})r]=r\operatorname{rot}(\vec\omega\times\mathbf{r})-(\vec\omega\times\mathbf{r})\times\operatorname{grad}r=$$

$$=2\vec\omega r-(\vec\omega\times\mathbf{r})\times\frac{\mathbf{r}}{r}=\frac{3\vec\omega r^2-\mathbf{r}(\vec\omega\times\mathbf{r})}{r}+0;$$

i ovo polje, je dakle, čisto solenoidalno Uz to, ono takođe po modulu teži beskonačnosti kad $|\mathbf{r}|\to\infty$. Pokušajmo, stoga da njegov vektorski potencijal odredimo u obliku (*R.* 2.21). U ovom slučaju je:

$$\operatorname{rot}\mathbf{W}=\operatorname{rot}[f(r)(\mathbf{A}\times\mathbf{r})]=$$

$$=f(r)[\mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{r}-\mathbf{r}\operatorname{div}\mathbf{A}+(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{r}]-f'(r)\frac{(\mathbf{A}\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}}{r}=$$

$$=f(r)[2\mathbf{A}+(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{A}]-\frac{f'(r)}{r}(\mathbf{A}\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}$$

Pošto je:

$$(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{A}=(\mathbf{r}\cdot\nabla)[(\vec\omega\times\mathbf{r})r]=$$

$$=(\vec\omega\times\mathbf{r})[(\mathbf{r}\cdot\nabla)r]+r[(\mathbf{r}\cdot\nabla)(\vec\omega\times\mathbf{r})]=$$

$$=(\vec\omega\times\mathbf{r})r+r(\vec\omega\times\mathbf{r})=2r(\vec\omega\times\mathbf{r})=2\mathbf{A},$$

pri čemu su iskorišćeni rezultati zadatka 2.8, uzimajući u obzir da je $(\vec\omega\times\mathbf{r})$ linearna homogena funkcija vektora položaja. Dakle,

$$\operatorname{rot}\mathbf{W}=4f(r)\mathbf{A}-\frac{f'(r)}{r}(\mathbf{A}\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}, \qquad (R.\ 2.23)$$

što će biti jednako $\mathbf{A}$ ako stavimo $f(r)=\frac{1}{4}$ (najjednostavniji izbor). Dakle,

$$\mathbf{W}=\frac{1}{4}\mathbf{A}\times\mathbf{r}=\frac{1}{4}[(\vec\omega\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}]r.$$

(*c*)

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\operatorname{div}[(\vec\omega\times\mathbf{r})\times\vec\omega]=-2\omega^2,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\operatorname{rot}[(\vec\omega\times\mathbf{r})\times\vec\omega]=0;$$

polje je čisto potencijalno i potencijal je:

$$U=-\frac{1}{2}(\vec\omega\times\mathbf{r})^2.$$

Čitaocu se preporučuje da ove rezultate samostalno proveri.

2.29. Dato vektorsko polje je uvek (ma za kakve funkcije ϕ i ψ) solenoidalno, jer je:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi\times\operatorname{grad}\psi)=$$

$$=\operatorname{grad}\psi\cdot\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\phi)-\operatorname{grad}\phi\cdot\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\psi)=$$

$$=0,$$

$$\text{rot}\,\mathbf{A} = \text{rot}\,(\text{grad}\,\phi \times \text{grad}\,\psi) =$$

$$= \text{grad}\,\phi\,\text{div}\,(\text{grad}\,\psi) - \text{grad}\,\psi\,\text{div}\,(\text{grad}\,\psi) -$$

$$-(\text{grad}\,\phi \cdot \nabla)\,\text{grad}\,\psi + (\text{grad}\,\psi \cdot \nabla)\,\text{grad}\,\phi + 0.$$

Iz samog oblika zadane vektorske funkcije se vidi da je njen vektorski potencijal:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\phi\,\text{grad}\,\psi - \psi\,\text{grad}\,\phi) + \text{grad}\,\Omega,$$

gde je Ω proizvoljna funkcija. Da bi vektor **W** bio ortogonalan na **A**, kako traži zadatak, treba uzeti $\Omega = 0$.

Da jednačine $\phi(x_1, x_2, x_3) = C_1$, $\psi(x_1, x_2\, x_3) = C_2$ zaista određuju vektorske linije, vidi se iz jednostavnog geometrijskog rasuđivanja. Vektor $\nabla\phi$ normalan je na površ $\phi = C_1$, i slično je $\nabla\psi$ normalan na površ $\psi = C_2$, što znači da će njihov vektorski proizvod biti kolinearan sa tangentom linije duž koje se te dve površi seku.

2.30. Prema definiciji prostornog izvoda (2.66), treba da izračunamo sledeću graničnu vrednost:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} d\mathbf{S} \bullet \mathbf{Q}}{\Delta V} =$$

$$= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} (dS_1 Q_2 Q_3 \mathbf{e}_1 + dS_2 Q_3 Q_1 \mathbf{e}_2 + dS_3 Q_1 Q_2 \mathbf{e}_3)}{\Delta V} =$$

$$= \mathbf{e}_1 \lim_{\Delta V \to} \frac{\oint_{\Delta S} Q_2 Q_3\, dS_1}{\Delta V} + \mathbf{e}_2 \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} Q_3 Q_1\, dS_2}{\Delta V} + \mathbf{e}_3 \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} Q_1 Q_2\, dS_3}{\Delta V} =$$

$$= \mathbf{e}_1 \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} Q_2 Q_3 \mathbf{e}_1 \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} + \mathbf{e}_2 \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} Q_3 Q_1 \mathbf{e}_2 \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} + \mathbf{e}_3 \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} Q_1 Q_2 \mathbf{e}_3 \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} =$$

$$= \mathbf{e}_1 \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta V} \text{div}\,(Q_2 Q_3 \mathbf{e}_1)\, dV}{\Delta V} + \mathbf{e}_2 \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta V} \text{div}\,(Q_3 Q_1 \mathbf{e}_2)\, dV}{\Delta V} +$$

$$+ \mathbf{e}_3 \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta V} \text{div}\,(Q_1 Q_2 \mathbf{e}_3)\, dV}{\Delta V};$$

u poslednjoj jednakosti je primenjena Gauss-ova teorema. Izračunamo li još divergencije koje se pojavljuju, naći ćemo:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} d\mathbf{S} \bullet \mathbf{Q}}{\Delta V} =$$

$$= \mathbf{e}_1 \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x_1}(Q_2 Q_3)\, dV}{\Delta V} + \mathbf{e}_2 \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x_2}(Q_3 Q_1)\, dV}{\Delta V} +$$

$$+ \mathbf{e}_3 \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x_3}(Q_1 Q_2)\, dV}{\Delta V} =$$

$$= \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1}(Q_2 Q_3) + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}(Q_3 Q_1) + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}(Q_1 Q_2) =$$

$$= \nabla \bullet \mathbf{Q}.$$

Analogim postupkom se dokazuje i

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta S} d\mathbf{S} \circ \mathbf{Q}}{\Delta V} = \nabla \circ \mathbf{Q},$$

što se ostavlja za samostalnu vežbu.

3. GENERALISANE KOORDINATE

3.1. Formule prelaza iz Descartes-ovih u cilindrične koordinate su date relacijama (3.11), tako da vektor položaja možemo predstaviti u obliku:

$$\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i = \rho \cos\varphi\, \mathbf{e}_1 + \rho \sin\varphi\, \mathbf{e}_2 + z\, \mathbf{e}_3.$$

Odavde se, prema relacijama (3.5), neposredno nalazi:

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}\right|} = \frac{\cos\varphi\, \mathbf{e}_1 + \sin\varphi\, \mathbf{e}_2}{\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}} = \cos\varphi\, \mathbf{e}_1 + \sin\varphi\, \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right|} = \frac{-\rho \sin\varphi\, \mathbf{e}_1 + \rho \cos\varphi\, \mathbf{e}_2}{\sqrt{\rho^2 \sin^2\varphi + \rho^2 \cos^2\varphi}} = -\sin\varphi\, \mathbf{e}_1 + \cos\varphi\, \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{e}_z = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right|} = \mathbf{e}_3.$$

Relacije navedene u zadatku se dobijaju direktno, diferenciranjem po koordinati φ.

3.2. Podesno je najpre izraz $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}$ transformisati pomoću relacije (2.46), koja za $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ daje

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} B^2\right) = \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}.$$

Uzimanjem rotora ove jednačine dobijamo

$$\operatorname{rot}[(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}] = -\operatorname{rot}[\mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}], \qquad (R.\ 3.1)$$

jer je $\operatorname{rot}\operatorname{grad}=0$, kao što je pokazano jednačinom (2.73). Nađimo najpre $\operatorname{rot}\mathbf{B}$. Prema (3.39) imamo:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}[\rho\, B(\rho)]\, \mathbf{e}_z,$$

tako da je:

$$\mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{B} = B(\rho)\,\mathbf{e}_\varphi \times \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\, B(\rho)]\,\mathbf{e}_z = \frac{B(\rho)}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\, B(\rho)]\,\mathbf{e}_\rho,$$

nakon čega relacije (3.39) ponovo daju:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}) = 0,$$

te definitivno izlazi:

$$\operatorname{rot}[(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}] = 0.$$

3.3. Navedena osobina rotora date vektorske funkcije je direktna posledica relacija (3.39). Pošto je $V_z=0$, a V_ρ i V_φ ne zavise od koordinate z, imaćemo:

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = \left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\, V_\varphi(\rho,\varphi)] - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}\right\}\mathbf{e}_z.$$

3.4. Postupajući isto kao u zadatku 3.1, možemo na osnovu relacija (3.16) prikazati vektor položaja ma koje tačke u prostoru preko jediničnih vektora Descartes-ovog trijedra:

$$\mathbf{r} = x_i\,\mathbf{e}_i = r\sin\vartheta\cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + r\sin\vartheta\sin\varphi\,\mathbf{e}_2 + r\cos\vartheta\,\mathbf{e}_3,$$

a zatim, pomoću formula (3.5), neposredno naći:

$$\mathbf{e}_r = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right|} = \frac{\sin\vartheta\cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\vartheta\sin\varphi\,\mathbf{e}_2 + \cos\vartheta\,\mathbf{e}_3}{\sqrt{\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta}} =$$

$$= \sin\vartheta\cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\vartheta\sin\varphi\,\mathbf{e}_2 + \cos\vartheta\,\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{e}_\vartheta = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta}\right|} = \frac{r\cos\vartheta\cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + r\cos\vartheta\sin\varphi\,\mathbf{e}_2 - r\sin\vartheta\,\mathbf{e}_3}{\sqrt{r^2\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\vartheta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\vartheta}} =$$

$$= \cos\vartheta\cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\vartheta\sin\varphi\,\mathbf{e}_2 - \sin\vartheta\,\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right|} = \frac{-r\sin\vartheta\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + r\sin\vartheta\cos\varphi\,\mathbf{e}_2}{\sqrt{r^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi}} = -\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_2.$$

Diferenciranjem ovih jediničnih vektora po koordinatama ϑ i φ može se direktno proveriti važenje svih šest navedenih odnosa. U tom cilju je podesno najpre izraziti jedinične vektore Descartes-ovog trijedra pomoću jediničnih vektora sfernih koordinata. Napišemo li, na primer,

$$\mathbf{e}_1 = \alpha_1\,\mathbf{e}_r + \beta_1\,\mathbf{e}_\vartheta + \gamma_1\,\mathbf{e}_\varphi,$$

skalarnim množenjem sa $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$ i $\mathbf{e}_\varphi$ dobijamo:

$$\alpha_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_1 = \sin\vartheta\cos\varphi,$$

$$\beta_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_1 = \cos\vartheta\cos\varphi,$$

$$\gamma_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_1 = -\sin\varphi,$$

odnosno, definitivno:

$$\mathbf{e}_1 = \sin\vartheta\cos\varphi\,\mathbf{e}_r + \cos\vartheta\cos\varphi\,\mathbf{e}_\vartheta - \sin\varphi\,\mathbf{e}_\varphi;$$

slično je za $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$. Na osnovu gornjih rezultata za $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$ i $\mathbf{e}_\varphi$ možemo, dakle, sastaviti šemu:

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_r$	$\sin\vartheta\cos\varphi$	$\sin\vartheta\sin\varphi$	$\cos\vartheta$
$\mathbf{e}_\vartheta$	$\cos\vartheta\cos\varphi$	$\cos\vartheta\sin\varphi$	$-\sin\vartheta$
$\mathbf{e}_\varphi$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0

u kojoj horizontalni redovi daju jedinične vektore sfernih koordinata preko Descartes-ovih, a vertikalni obrnuto.

Sad je moguće lako proveriti navedene relacije. Na primer,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\vartheta\cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\vartheta\sin\varphi\,\mathbf{e}_2 - \sin\vartheta\,\mathbf{e}_3) =$$

$$= -\cos\vartheta\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\vartheta\cos\varphi\,\mathbf{e}_2 =$$

$$= \cos\vartheta(-\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_2) =$$

$$= \cos\vartheta\,\mathbf{e}_\varphi;$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}(-\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_2) = -\cos\varphi\,\mathbf{e}_1 - \sin\varphi\,\mathbf{e}_2 =$$

$$= -\cos\varphi(\sin\vartheta\cos\varphi\,\mathbf{e}_r + \cos\vartheta\cos\varphi\,\mathbf{e}_\vartheta - \sin\varphi\,\mathbf{e}_\varphi) -$$

$$- \sin\varphi(\sin\vartheta\sin\varphi\,\mathbf{e}_r + \cos\vartheta\sin\varphi\,\mathbf{e}_\vartheta + \cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi) =$$

$$= -\sin\vartheta\,\mathbf{e}_r - \cos\vartheta\,\mathbf{e}_\vartheta,$$

i slično za ostale četiri.

3.5. Za rešavanje ovog zadatka ja potrebno naći transformacije obrnute relacijama (3.16). Nije teško proveriti da su one:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$\vartheta = \arccos\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \qquad (R.\ 3.2)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}.$$

Neka je Φ neka skalarna funkcija. Prema formulama za parcijalno diferenciranje posrednih funkcija imaćemo:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} =$$

$$= \frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} + \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\frac{x_1x_3}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2};$$

ovde su izvodi $\dfrac{\partial r}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x_1}$ i $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}$ izraženi pomoću ($R.$ 3.2). Zamenimo li, na osnovu (3.16), Descartes-ove koordinate sfernim, dobićemo dalje:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = \sin\vartheta\cos\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\vartheta\cos\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi},$$

odakle čitamo:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \sin\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \qquad (R.\ 3.3)$$

Postupajući na isti način dobijamo i

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \sin\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \cos\vartheta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}, \qquad (R.\ 3.4)$$

što se ostavlja čitaocu da proveri samostalno.

Na osnovu ovoga imamo:

$$x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1} = r\sin\vartheta\cos\varphi\left(\sin\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) -$$

$$- r\sin\vartheta\sin\varphi\left(\sin\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\vartheta\cos\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) =$$

$$= (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Ova veza je od važnosti i u klasičnoj i u kvantnoj mehanici, pri razmatranju momenta impulsa.

3.6. Ako skalarna funkcija zavisi samo od koordinate r, jednačina (3.44) neposredno daje prvi od zadanih oblika laplasijana (umesto parcijalnih izvoda mogu se staviti totalni, jer od ostalih promenljivih veličina koja se diferencira ne zavisi). Ako taj rezultat razvijemo po pravilu za izvod proizvoda, imaćemo:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = \frac{1}{r^2}\left(2r\frac{d\Phi}{dr} + r^2\frac{d^2\Phi}{dr^2}\right) = \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr} + \frac{d^2\Phi}{dr^2},$$

što predstavlja treći od alternativnih oblika laplasijana navedenih u zadatku. Drugi oblik se dobija ovako:

$$\Delta\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right)=\frac{1}{r^2}\left(2r\frac{d\Phi}{dr}+r^2\frac{d^2\Phi}{dr^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{r}\left(2\frac{d\Phi}{dr}+r\frac{d^2\Phi}{dr^2}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{d\Phi}{dr}+\frac{d\Phi}{dr}+r\frac{d^2\Phi}{dr^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{r}\left[\frac{d\Phi}{dr}+\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi}{dr}\right)\right]=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\Phi+r\frac{d\Phi}{dr}\right)=$$

$$=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{d}{dr}(r\Phi)\right]=\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\Phi).$$

Ovaj se oblik često koristi pri rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina u kojima figuriše laplasijan nepoznate funkcije, ukoliko ova zavisi samo od r (na primer, kod rešavanja tzv. talasne jednačine). To je i ilustrovano narednim zadatkom.

3.7. Koristeći identitet $\Delta\Phi=\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\Phi)$ koji važi kad Φ zavisi samo od r (v. prethodni zadatak), možemo zadane parcijalne jednačine prepisati kao:

(a) $$\frac{d^2}{dr^2}(r\Phi)=0,$$

(b) $$\frac{d^2}{dr^2}(r\Phi)\mp k^2(r\Phi)=0.$$

To su obične diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima, u kojima kao nepoznata funkcija figuriše kombinacija $r\Phi$. Rešenja su očevidno:

(a) $$r\Phi=C_1 r+C_2,\qquad \Phi=C_1+\frac{C_2}{r};$$

(b) $$\begin{cases} r\Phi=C_1 e^{kr}+C_2 e^{-kr}, & \Phi=C_1\frac{1}{r}e^{kr}+C_2\frac{1}{r}e^{-kr} \\ r\Phi=C_1\sin kr+C_2\cos kr, & \Phi=C_1\frac{\sin kr}{r}+C_2\frac{\cos kr}{r}, \end{cases}$$

pri čemu dva rešenja u slučaju (*b*) odgovaraju gornjem i donjem znaku u dotičnoj jednačini. Ovde su C_1 i C_2 integracione konstante, koje se određuju iz dopunskih uslova konkretnog problema.

3.8. Ako skalarna funkcija $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$ zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu $\Delta\Phi=0$ (uzgred, ta jednačina se zove *Laplace-ova*, i svaka funkcija koja ju zadovoljava zove se *harmonijska*), onda će biti, prema (3.44):

$$\Delta(r^2\Phi)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}(r^2\Phi)\right]+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}(r^2\Phi)\right]+$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(r^2\Phi)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(2r^3\Phi+r^4\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=$$

$$=\frac{1}{r^2}\left(6r^2\Phi+6r^3\frac{\partial\Phi}{\partial r}+r^4\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right)+$$

$$+r^2\left[\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right]=$$

$$=r^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+4r\frac{\partial\Phi}{\partial r}+6\Phi+$$

$$+r^2\left[\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right].$$

Prvi i poslednja dva člana (koji sadrže faktor r^2) predstavljaju, kako je lako videti, upravo $r^2\Delta\Phi$ i jednaki su nuli po uslovu zadatka (Φ je harmonijska funkcija). Dakle:

$$\Delta(r^2\Phi)=4r\frac{\partial\Phi}{\partial r}+6\Phi.$$

Prema tome:

$$\Delta[\Delta(r^2\Phi)]=\Delta\left(4r\frac{\partial\Phi}{\partial r}+6\Phi\right)=4\Delta\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+6\Delta\Phi=4\Delta\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right),$$

jer je lako videti da je laplasijan zbira jednak zbiru laplasijana, i Φ je harmonijska funkcija. Primenimo li ponovo relaciju (3.44), možemo nađeni izraz dalje pisati kao:

$$\Delta\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\right]+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}+r^3\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}+r^3\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right)+$$

$$+r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right]+$$

$$+\frac{2}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right];$$

transformacija zadnjeg člana prethodnog izraza je očevidna, ali ima za cilj da veličinu na koju deluje operator $\frac{\partial}{\partial r}$ dovede u vezu sa laplasijanom. Neposredno se vidi da možemo dalje pisati:

$$\frac{1}{4}\Delta[\Delta(r^2\Phi)]-\Delta\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}+r^3\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right)+$$

$$+r\frac{\partial}{\partial r}\left[\Delta\Phi-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\right]+2\left[\Delta\Phi-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\right],$$

odnosno, zbog uslova $\Delta\Phi=0$,

$$\frac{1}{4}\Delta[\Delta(r^2\Phi)]=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}+r^3\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right)-$$

$$-r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\right]-\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right).$$

Razvijanjem dobijenog izraza po pravilu za izvod proizvoda i sređivanjem nije teško utvrditi da se svi članovi potiru, tj. da je zaista

$$\Delta[\Delta(r^2\Phi)]=0,$$

kao što je i trebalo pokazati.

3.9. (*a*) Navedene relacije će se moći smatrati kao definicija generalisanih koordinata u i v ukoliko jakobijan transformacije nije identički jednak nuli. On ovde iznosi:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u}\\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{a^2}{(\operatorname{ch}u+\cos v)^4}\begin{vmatrix}1+\operatorname{ch}u\cos v & -\operatorname{sh}u\sin v\\ \operatorname{sh}u\sin v & 1+\operatorname{ch}u\cos v\end{vmatrix}=$$

$$=a^2\frac{(1+\operatorname{ch}u\cos v)^2+\operatorname{sh}^2u\sin^2v}{(\operatorname{ch}u+\cos v)^4}=$$

$$=a^2\frac{1+2\operatorname{ch}u\cos v+\operatorname{ch}^2u\cos^2v+(\operatorname{ch}^2u-1)(1-\cos^2v)}{(\operatorname{ch}u+\cos v)^4}=$$

$$=\frac{a^2}{(\operatorname{ch}u+\cos v)^2},$$

i, pošto nije identički jednak nuli, zaključujemo da su u i v zaista mogu smatrati generalisanim koordinatama tačke u ravni.

Proanalizirajmo sada koordinatne linije. Nađimo najpre koordinatne linije $u=C_1$. Stavimo li $u=C_1$ u definicione jednačine, dobićemo:

$$x_1=\frac{a\operatorname{sh}C_1}{\operatorname{ch}C_1+\cos v},\qquad x_2=\frac{a\sin v}{\operatorname{ch}C_1+\cos v},$$

što predstavlja jednoparametarsku familiju linija, čije jednačine su date u parametarskom obliku (sa v kao parametrom). Eliminacijom ovoga dobijamo jednačine familije koordinatnih linija u standardnom obliku. U tom cilju iz prve od gornjih jednačina nalazimo:

$$\cos v=\frac{a\operatorname{sh}C_1}{x_1}-\operatorname{ch}C_1$$

a iz druge:

$$\sin v=\frac{x_2}{a}(\operatorname{ch}C_1+\cos v)=\frac{x_2}{x_1}\operatorname{sh}C_1.$$

Dignemo li ove dve jednačine na kvadrat i saberemo, dobićemo:

$$\left(\frac{a\operatorname{sh}C_1}{x_1}-\operatorname{ch}C_1\right)^2+\frac{x_2^2}{x_1^2}\operatorname{sh}^2C_1=1.$$

Nakon kvadriranja i uprošćavanja, vodeći računa o identitetu $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$, dobija se sledeći rezultat.

$$\left(x_1-a\frac{\operatorname{ch}C_1}{\operatorname{sh}C_1}\right)^2+x_2^2=\left(\frac{a}{\operatorname{sh}C_1}\right)^2$$

Ovo predstavlja familiju krugova sa centrima na x_1-osi, u tačkama sa koordinatama $\left(a\frac{\operatorname{ch}C_1}{\operatorname{sh}C_1},\,0\right)$, i sa poluprečnicima $\frac{a}{|\operatorname{sh}C_1|}$.

Postupak je sličan i pri ispitivanju koordinatnih linija $v=C_2$. Stavimo li $v=C_2$ u definicione jednačine, dobijamo:

$$x_1=\frac{a\operatorname{sh}u}{\operatorname{ch}u+\cos C_2},\qquad x_2=\frac{a\sin C_2}{\operatorname{ch}u+\cos C_2}.$$

Radi eliminacije koordinate u, koja igra ulogu parametra u jednačinama dobijene familije krivih, prepisaćemo gornje jednačine u obliku:

$$\operatorname{ch}u=\frac{a\sin C_2}{x_2}-\cos C_2,$$

$$\operatorname{sh}u=\frac{x_1}{a}(\operatorname{ch}u+\cos C_2)=\frac{x_1}{x_2}\sin C_2.$$

Dizanjem na kvadrat i oduzimanjem druge jednačine od prve, nalazimo:

$$\left(a\frac{\sin C_2}{x_2}-\cos C_2\right)^2-\left(\frac{x_1^2}{x_2^2}\sin^2C_1=1\right.$$

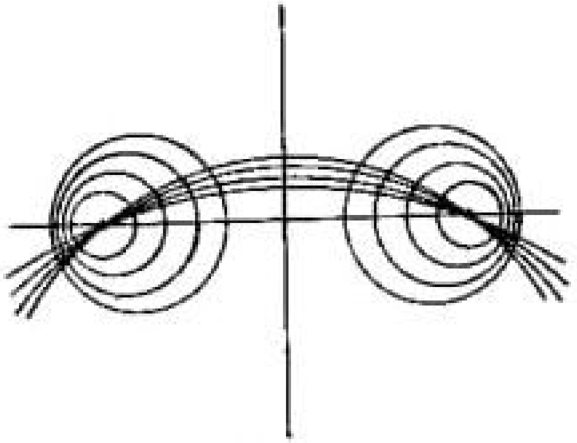
odnosno, nakon dizanja na kvadrat i uprošćavanja,

$$x_1^2+\left(x_2+a\frac{\cos C_2}{\sin C_2}\right)^2=\left(\frac{a}{\sin C_2}\right)^2.$$

To su krugovi sa centrom na x_2-osi, u tačkama $\left(0, -a\dfrac{\cos C_2}{\sin C_2}\right)$, i sa polupre-

čnicima $\dfrac{a}{|\sin C_2|}$. Lako je videti da svi oni prolaze kroz tačke $(-a, 0)$ i $(a, 0)$.

Dakle, koordinatne linije su dve familije krugova sa posebnim geometrijskim karakteristikama. Nekoliko ovih linija je prikazano na slici 3.9. Napomenimo uzgred, da se ove koordinate zovu *bipolarne* i od interesa su u mnogim problemima gde se javljaju nekoncentrični krugovi ili nekoaksijalni cilindri (na primer, u elektrostatici pri proračunavanju električnog polja kondenzatora sastavljenog od dva nekoaksijalna cilindra, između kojih je uspostavljena poznata razlika potencijala; ovakav uređaj se koristi kao elektrostatičko sočivo za elektronske snopove u izvesnim uređajima).



Sl. 3.9.

Nađimo sada metričku formu. Imamo:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}du + \frac{\partial x_1}{\partial v}dv\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}du + \frac{\partial x_2}{\partial v}dv\right)^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2\right]du^2 + \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)^2\right]dv^2 +$$

$$+ 2\left[\frac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial v}\right]du\,dv,$$

odnosno, kada se naznačeni parcijalni izvodi nađu i uvrste u gornju relaciju, pa se dobijeni izraz sredi, definitivno se dobija:

$$ds^2 = \frac{a^2}{(\mathrm{ch}\,u + \cos v)^2}(du^2 + dv^2). \qquad (R.\ 3.6)$$

Pošto u krajnjem rezultatu nema člana sa proizvodom diferencijala $du\,dv$, metrička forma je čisto kvadratna što znači da su bipolarne koordinate *ortogonalne*. Za jedinične vektore pomoću obrazaca (3.5) dobijamo:

$$\mathbf{e}_u = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|} = \frac{(1 + \mathrm{ch}\,u\cos v)\,\mathbf{e}_1 - \mathrm{sh}\,u\sin v\,\mathbf{e}_2}{\mathrm{ch}\,u + \cos v},$$

$$\mathbf{e}_v = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|} = \frac{\mathrm{sh}\,u\sin v\,\mathbf{e}_1 + (1 + \mathrm{ch}\,u\cos v)\,\mathbf{e}_2}{\mathrm{ch}\,u + \cos v},$$

odakle se može još jednom direktno proveriti da su bipolarne koordinate zaista ortogonalne, tj. da je $\mathbf{e}_u\cdot\mathbf{e}_v = 0$.

(*b*) I u ovom drugom slučaju postupak je identičan prethodnom, i razlikuje se samo računskim detaljima. Stoga ćemo navesti samo glavne rezultate, ostavljajući čitaocu za samostalnu vežbu da proveri pojedine korake u izračunavanju. Jakobijan u ovom slučaju iznosi:

$$J = a^2(\mathrm{sh}^2 u\cos^2 v + \mathrm{ch}^2 u\sin^2 v)$$

tako u i v mogu poslužiti za određivanje položaja tačke u ravni, kao njene generalisane koordinate. Za metričku formu se dobija:

$$ds^2 = a^2(\mathrm{sh}^2 u\cos^2 v + \mathrm{ch}^2 u\sin^2 v)(du^2 + dv^2), \qquad (R.\ 3.7)$$

a za jedinične vektore koordinatnih linija:

$$\mathbf{e}_u = \frac{\mathrm{sh}\,u\cos v\,\mathbf{e}_1 + \mathrm{ch}\,u\sin v\,\mathbf{e}_2}{\sqrt{\mathrm{sh}^2 u\cos^2 v + \mathrm{ch}^2 u\sin^2 v}},$$

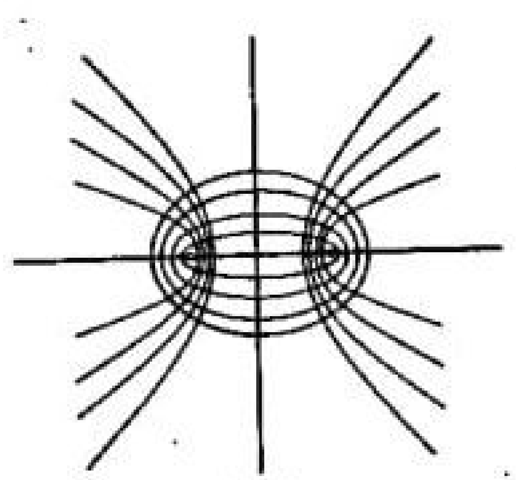
$$\mathbf{e}_v = \frac{-\mathrm{ch}\,u\sin v\,\mathbf{e}_1 + \mathrm{sh}\,u\cos v\,\mathbf{e}_2}{\sqrt{\mathrm{sh}^2 u\cos^2 v + \mathrm{ch}^2 u\sin^2 v}}$$

(treba zapaziti da je opet $\mathbf{e}_u\cdot\mathbf{e}_v = 0$, tj. i ove koordinate su *ortogonalne*, što se, uostalom, vidi i iz oblika metričke forme). Stavimo li $u = C_1$, odnosno $v = C_2$, pa eliminišemo drugu koordinatu, dobijamo jednačine familija koordinatnih linija:

$$\frac{x_1^2}{a^2\mathrm{ch}^2 C_1} + \frac{x_2^2}{a^2\mathrm{sh}^2 C_1} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{a^2\cos^2 C_2} - \frac{x_2^2}{a^2\sin^2 C_2} = 1;$$

prva familija predstavlja elipse, a druga hiperbole. Nije teško videti da su ove linije *konfokalne*; žiže su u tačkama $(a, 0)$ i $(-a, 0)$. Nekoliko koordinatnih linija je prikazano na slici 3.10. Ove koordinate su u literaturi poznate pod nazivom *eliptičke koordinate u ravni*. Zapazimo da se uzimanjem nekih fiksiranih vrednosti za u i v dobijaju *dve tačke*, jer se elipsa i njoj konfokalna hiperbola seku u dvema tačkama. Ova nejednoznačnost obično ne predstavlja teškoću pri radu sa eliptičkim koordinatama.



Sl. 3.10.

3.10. Metrička forma u ovim koordinatama (čije su koordinatne površi cilindri sa izvodnicama pokazanim na slici 3.9. i osama paralelnim x_3-osi, i ravni normalne na ovu osu) se dobija iz (*R.* 3.6) dodavanjem $dx_3^2 = dz^2$:

$$ds^2 = \frac{a^2}{(\mathrm{ch}\,u + \cos v)^2}(du^2 + dv^2) + dz^2. \qquad (R.\ 3.8)$$

Pošto su ove koordinate očevidno ortogonalne, za rešavanje zadatka se mogu koristiti obrasci (3.26), (3.30), (3.35) i (3.36). Iz (*R.* 3.8) čitamo Lamé-ove koeficijente:

$$h_u = h_v = \frac{a}{\mathrm{ch}\, u + \cos v}, \qquad h_z = 1,$$

tako da se direktno dobija, uz neznatno uprošćavanje u svakom slučaju:

$$\operatorname{grad} \Phi = \frac{\mathrm{ch}\, u + \cos v}{a}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\mathbf{e}_v\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\mathrm{ch}\, u + \cos v}{a}\left(\frac{\partial A_u}{\partial u} + \frac{\partial A_v}{\partial v}\right) - \frac{1}{a}(A_u \,\mathrm{sh}\, u - A_v \sin v) + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\mathrm{ch}\, u + \cos v}{a}\frac{\partial A_z}{\partial v} - \frac{\partial A_v}{\partial z}\right)\mathbf{e}_u + \left(\frac{\partial A_u}{\partial z} - \frac{\mathrm{ch}\, u + \cos v}{a}\frac{\partial A_z}{\partial u}\right)\mathbf{e}_v +$$

$$+\left[\frac{\mathrm{ch}\, u + \cos v}{a}\left(\frac{\partial A_v}{\partial u} - \frac{\partial A_u}{\partial v}\right) - \frac{1}{a}(A_u \sin v + A_v \,\mathrm{sh}\, u)\right]\mathbf{e}_z,$$

$$\Delta \Phi = \frac{(\mathrm{ch}\, u + \cos v)^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.$$

Čitaocu se ostavlja da samostalno proveri ove rezultate.

3.11. Metrička forma eliptičkih cilindričnih koordinata se može, na osnovu (*R.* 3.7), pisati kao:

$$ds^2 = a^2(\mathrm{sh}^2 u \cos^2 v + \mathrm{ch}^2 u \sin^2 v)(du^2 + dv^2) + dz^2, \qquad (R.\ 3.9)$$

odakle čitamo Lamé-ove koeficijente (koordinate su očevidno ortogonalne)

$$h_u = h_v = a\sqrt{\mathrm{sh}^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v}, \qquad h_z = 1,$$

tako da na osnovu (3.35) možemo, za bilo koju vektorsku funkciju

$$\mathbf{A} = A_u(u, v, z)\mathbf{e}_u + A_v(u, v, z)\mathbf{e}_v + A_z(u, v, z)\mathbf{e}_z$$

pisati:

$$\operatorname{rot} A = \frac{1}{\sqrt{J}}\left\{\left[\frac{\partial A_z}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{J}A_v)\right]\mathbf{e}_u + \left[\frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{J}A_u) - \frac{\partial A_z}{\partial u}\right]\mathbf{e}_v\right\} +$$

$$+\frac{1}{J}\left[\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{J}A_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{J}A_u)\right]\mathbf{e}_z, \qquad (R.\ 3.10)$$

gde je:

$$J = a^2(\mathrm{sh}^2 u \cos^2 v + \mathrm{ch}^2 u \sin^2 v)$$

već ranije nađeni (v. prethodni zadatak) jakobijan prelaza iz Descartes-ovih u eliptičke cilindrične koordinate, ovde ponovo uveden radi konciznosti. Prema tome, imaćemo:

$$\mathbf{S} = \operatorname{rot} \mathbf{W} = \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 v}\mathbf{e}_v\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{J}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{J}\frac{1}{\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 v}\right)\mathbf{e}_u + \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{J}\frac{1}{\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 v}\right)\mathbf{e}_z =$$

$$= \frac{1}{J}\left[\frac{1}{2\sqrt{J}}\frac{\partial J}{\partial u}\frac{1}{\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 v} - \sqrt{J}\frac{2\,\mathrm{sh}\, u\,\mathrm{ch}\, u}{(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 v)^2}\right]\mathbf{e}_z =$$

$$= \left[\frac{1}{2J\sqrt{J}}\frac{2a^2\,\mathrm{sh}\, u\,\mathrm{ch}\, u}{\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 v} - \frac{1}{\sqrt{J}}\frac{2\,\mathrm{sh}\, u\,\mathrm{ch}\, u}{(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 v)^2}\right]\mathbf{e}_z =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{J}}\left[\frac{1}{J}\frac{a^2\,\mathrm{sh}\, u\,\mathrm{ch}\, u}{\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 v} - \frac{2\,\mathrm{sh}\, u\,\mathrm{ch}\, u}{(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 v)^2}\right]\mathbf{e}_z.$$

Ako u poslednjem izrazu sredimo član u srednjoj zagradi, zamenjujući eksplicitno vrednost jakobijana, dobićemo definitivno:

$$\mathbf{S} = -\frac{1}{\sqrt{J}}\frac{\mathrm{sh}\, u\,\mathrm{ch}\, u}{(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 v)^2}\mathbf{e}_z = S_z(u, v)\,\mathbf{e}_z.$$

Za nalaženje rot rot **S** izračunajmo, najpre, rot **S** prema obrascu (*R.* 3.10):

$$\operatorname{rot} \mathbf{S} = \operatorname{rot}[S_z(u, v)\mathbf{e}_z] = \frac{1}{\sqrt{J}}\left(\frac{\partial S_z}{\partial v}\mathbf{e}_u - \frac{\partial S_z}{\partial u}\mathbf{e}_v\right).$$

i primenimo zatim još jednom operaciju nalaženja rotora, vodeći računa da u ovom slučaju S_z ne zavisi od koordinate z. Tako dobijamo:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{S} = \frac{1}{J}\left\{\frac{\partial}{\partial u}[\sqrt{J}(\operatorname{rot} \mathbf{S})_v] - \frac{\partial}{\partial v}[\sqrt{J}(\operatorname{rot} \mathbf{S})_u]\right\}\mathbf{e}_z =$$

$$= \frac{1}{J}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\partial S_z}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial S_z}{\partial v}\right)\right]\mathbf{e}_z =$$

$$= -\frac{1}{J}\left(\frac{\partial^2 S_z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 S_z}{\partial v^2}\right)\mathbf{e}_z.$$

Nalaženje potrebnih drugih izvoda funkcije $S_z = -\dfrac{1}{\sqrt{J}}\dfrac{\mathrm{sh}\, u\,\mathrm{ch}\, u}{(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 v)^2}$ koje je elementarno mada nešto zametnije, ostavlja se čitaocu za samostalnu vežbu.

3.12. Jakobijan prelaza ima, kako je lako proveriti, vrednost

$$J = uv(u^2 + v^2),$$

što znači da zadate relacije zaista mogu poslužiti kao definicija generalisanih koordinata u, v i φ. Metrička forma ima oblik:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = (v\cos\varphi\, du + u\cos\varphi\, dv - uv\sin\varphi\, d\varphi)^2 +$$
$$+ (v\sin\varphi\, du + u\sin\varphi\, dv + uv\cos\varphi\, d\varphi)^2 + (u\,du - v\,dv)^2 =$$
$$= (u^2+v^2)(du^2+dv^2) + u^2v^2\, d\varphi^2, \qquad (R.\ 3.11)$$

iz koga se vidi da su ove koordinate zaista ortogonalne (metrička forma čisto kvadratna). Za jedinične vektore koordinatnog trijedra nalazimo, na isti način kao u zadatku 3.9, sledeće izraze:

$$\mathbf{e}_u = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|} = \frac{v\cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + v\sin\varphi\,\mathbf{e}_2 + u\,\mathbf{e}_3}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

$$\mathbf{e}_v = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|} = \frac{u\cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + u\sin\varphi\,\mathbf{e}_2 - v\,\mathbf{e}_3}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right|} = \frac{-uv\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + uv\cos\varphi\,\mathbf{e}_2}{uv} = -\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_2,$$

na osnovu kojih se može još jednom proveriti da su posmatrane generalisane koordinate ortogonalne.

Ispitajmo još geometrijske karakteristike koordinatnih površi. Stavimo li u polazne jednačine $u = C_1$, pa eliminišemo v i φ (ova eliminacija je elementarna, ako se prve dve jednačine dignu na kvadrat pa saberu), dobićemo:

$$x_1^2 + x_2^2 = -2C_1^2\left(x_3 - \frac{1}{2}C_1^2\right), \qquad (R.\ 3.12)$$

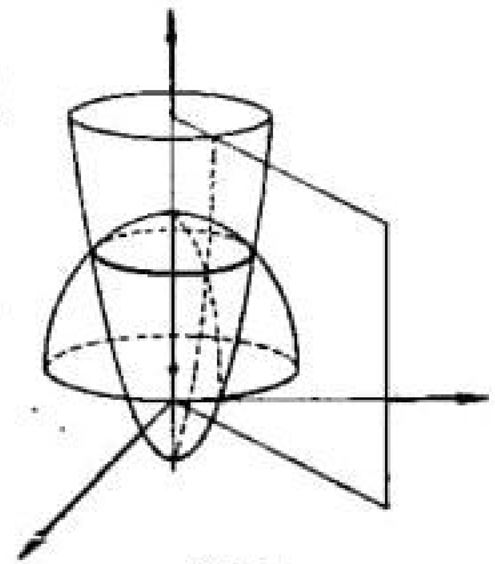
a ako stavimo $v = C_2$ i eliminišemo u i φ (postupak pri eliminaciji isti kao u prethodnom slučaju), nalazimo:

$$x_1^2 + x_2^2 = 2C_2^2\left(x_3 + \frac{1}{2}C_1^2\right). \qquad (R.\ 3.13)$$

Obe familije koordinatnih površi su rotacioni paraboloidi sa x_3-osom kao osom rotacije; kod prve od ovih familija su otvori paraboloida okrenuti nadole i temena su im iznad x_1Ox_2-ravni, a u drugom slučaju je situacija obrnuta. Najzad, stavimo li $\varphi = C_3$, pa eliminišemo u i v, dobićemo treću familiju koordinatnih površi:

$$x_2 = x_1 \operatorname{tg} C_3, \qquad (R.\ 3.14)$$

koje predstavljaju ravni koje prolaze kroz x_3-osu. Slika 3.11 pokazuje kako ove koordinatne površi izgledaju. Razlog zašto se ove koordinate zovu paraboličke je potpuno jasan.



Sl. 3.11

3.13. Na osnovu izraza za metričku formu (*R.* 3.11) u paraboličkim koordinatama, nalazimo potrebne Lamé-ove koeficijente:

$$h_u = h_v = \sqrt{u^2+v^2}, \qquad h_\varphi = uv,$$

tako da se, na osnovu opšte formule (3.36), nalazi:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{uv(u^2+v^2)}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(uv\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left(uv\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u^2+v^2}{uv}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\right],$$

odnosno nakon sređivanja:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right) + \frac{1}{u^2v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{u(u^2+v^2)}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{1}{v(u^2+v^2)}\frac{\partial\Phi}{\partial v}.$$

Na osnovu ovoga možemo rešiti diferencijalnu jednačinu koju traži zadatak:

$$\frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{d^2\Phi}{dv^2} + \frac{1}{v}\frac{d\Phi}{dv}\right) = 0$$

(jer Φ zavisi samo od v). Imaćemo:

$$\frac{d^2\Phi}{dv^2} = -\frac{1}{v}\frac{d\Phi}{dv},$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{d\Phi}{dv}\right) = -\frac{1}{v}\frac{d\Phi}{dv},$$

a nakon razdvajanja promenljivih i integracije:

$$\frac{d\Phi}{dv} = \frac{C_1}{v},$$

gde je C_1 integraciona konstanta. Druga integracija je elementarna, i krajnji rezultat je oblika:

$$\Phi = C_1 \ln v + C_2;$$

C_2 je druga integraciona konstanta.

3.14. U prethodnom zadatku su već korišćeni Lamé-ovi koeficijenti za parabolične koordinate, tako da na osnovu (3.26) možemo odmah pisati:

$$\nabla W = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial W}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial W}{\partial v}\mathbf{e}_v + \frac{1}{uv}\frac{\partial W}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi,$$

$$(\nabla W)^2 = \frac{1}{u^2+v^2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2\right] + \frac{1}{u^2 v^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2.$$

Ako, dakle, zamenimo x_1, x_2 i x_3 izrazima iz zadatka 3.12, zadana parcijalna diferencijalna jednačina će dobiti oblik:

$$\frac{1}{u^2+v^2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2\right] + \frac{1}{u^2v^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{u^2v^2 + \frac{1}{4}(u^2-v^2)^2}} + \frac{\beta}{2}(u^2-v^2) = 0,$$

odnosno

$$\frac{1}{u^2+v^2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2\right] + \frac{1}{u^2v^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{2\alpha}{u^2+v^2} + \frac{\beta}{2}(u^2-v^2) = 0.$$

Primenimo sad metod razdvajanja promenljivih, tj. pretpostavimo da je rešenje *suma* triju funkcija od kojih svaka zavisi sámo od po jedne nezavisno promenljive (kod drugih parcijalnih jednačina može biti celishodna pretpostavka da je rešenje *proizvod* triju ovakvih funkcija). Tako nalazimo:

$$\frac{1}{u^2+v^2}\left[\left(\frac{dU}{du}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dv}\right)^2 + 2\alpha\right) + \frac{\beta}{2}(u^2-v^2) + \frac{1}{u^2v^2}\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 = 0,$$

što se, uz neznatne transformacije, može napisati kao:

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 = -u^2v^2\left\{\frac{1}{u^2+v^2}\left[\left(\frac{dU}{du}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dv}\right)^2 + 2\alpha\right] + \frac{\beta}{2}(u^2-v^2)\right\}.$$

Leva strana dobijene jednačine je neka funkcija promenljive φ, dok desna strana zavisi od promenljivih u i v. Gornja jednakost može, stoga, postojati samo ako su obe strane jednake nekoj konstanti (tzv. ***konstanta razdvajanja***). Dakle, dobijamo dve jednačine:

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = \sum\nolimits_1,$$

$$u^2v^2\left\{\frac{1}{u^2+v^2}\left[\left(\frac{dU}{du}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dv}\right)^2 + 2\alpha\right] + \frac{\beta}{2}(u^2-v^2)\right\} = -\sum\nolimits_1^2, \qquad (R.\ 3.15)$$

gde je $\sum_1^2$ konstanta razdvajanja.

Prva od dobijenih jednačina (*R.*3.15.) daje neposredno

$$\Phi(\varphi) = \sum\nolimits_1 \varphi + \Phi_0, \qquad (R.\ 3.16)$$

gde je Φ_0 još jedna integraciona konstanta, dok je drugu potrebno dalje transformisati ovako:

$$\left(\frac{dU}{du}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dv}\right)^2 + 2\alpha + \frac{\beta}{2}(u^4 - v^4) = -\sum\nolimits_1^2 \frac{u^2+v^2}{u^2v^2} = -\sum\nolimits_1^2\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}\right).$$

što se očevidno može prepisati kao:

$$\left(\frac{dU}{du}\right)^2 + \frac{\beta}{2}u^4 + \frac{\sum_1^2}{u^2} + 2\alpha = -\left(\frac{dV}{dv}\right)^2 + \frac{\beta}{2}v^4 - \frac{\sum_1^2}{v^2}.$$

Leva strana ove jednačine zavisi samo od promenljive u, a desna samo od promenljive v, tako da možemo uvesti još jednu konstantu razdvajanja Σ_2 i pisati:

$$\left(\frac{dU}{du}\right)^2 + \frac{\beta}{2}u^4 + \frac{\sum_1^2}{u^2} + 2\alpha = \sum\nolimits_2,$$

$$-\left(\frac{dV}{dv}\right)^2 + \frac{\beta}{2}v^4 - \frac{\sum_1^2}{v^2} = \sum\nolimits_2.$$

Rešimo li ove jednačine eksplicitno po izvodima nepoznatih funkcija, zatim razdvojimo promenljive i integriramo, dobićemo:

$$U(u) = \int \frac{1}{u}\sqrt{\left(\sum\nolimits_2 - 2\alpha\right)u^2 - \frac{\beta}{2}u^6 - \sum\nolimits_1^2}\,du + U_0,$$

$$V(v) = \int \frac{1}{v}\sqrt{\frac{\beta}{2}v^6 - \sum\nolimits_2 v^2 - \sum\nolimits_1^2}\,dv + V_0, \qquad (R.\ 3.17)$$

gde su U_0 i V_0 još dve integracione konstante. Dobijeni integrali nisu elementarni. Rezultati (*R.* 3.16) i (*R.* 3.17) daju definitivno:

$$W(u, v, \varphi) = \int \frac{1}{u}\sqrt{\left(\sum\nolimits_2 - 2\alpha\right)u^2 + \frac{\beta}{2}u^6 - \sum\nolimits_1^2}\,du + \int \frac{1}{v}\sqrt{\frac{\beta}{2}v^6 - \sum\nolimits_2 v^2 - \sum\nolimits_1^2}\,dv + \sum\nolimits_1\varphi + \sum\nolimits_3, \qquad (R.\ 3.18)$$

gde je $\Sigma_3 = U_0 + V_0 + \Phi_0$ zapravo samo jedna integraciona konstanta. Rezultat (*R.* 3.18) zavisi od tri proizvoljne integracione konstante (Σ_1, Σ_2 i Σ_3), koliko ima i nezavisno promenljivih tj. to je *potpuno rešenje* zadane parcijalne diferencijalne jednačine.

Napomenimo na kraju da se zadana jednačina pojavljuje u teoriji tzv. *Stark-ovog efekta* (uticaj spoljašnjeg električnog polja na promene energetskih nivoa elektrona u vodonikovom atomu).

3.15. Identitet (2.76) daje:

$$\Delta \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A}, \qquad (R.\ 3.19)$$

što ćemo iskoristiti kao polaznu tačku za naša razmatranja.

(*a*) U *sfernim koordinatama* možemo uzeti relacije (3.14) — (3.44), pa dobijamo:

$$\mathbf{e}_r\cdot\Delta\mathbf{A}=\mathbf{e}_r\cdot(\text{grad div }\mathbf{A})-\mathbf{e}_r\cdot(\text{rot rot }\mathbf{A})=(\text{grad div }\mathbf{A})_r-(\text{rot rot }\mathbf{A})_r=$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}(\text{div }\mathbf{A})-\frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\,(\text{rot }\mathbf{A})_\varphi\right]+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}[(\text{rot }\mathbf{A})_\vartheta]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\,A_\vartheta)+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]-$$

$$-\frac{1}{r\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right];$$

grupisanjem članova koji sadrže A_r, A_ϑ i A_φ dobija se dalje:

$$\mathbf{e}_r\cdot\Delta\mathbf{A}=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)\right]+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2A_r}{\partial\varphi^2}+$$

$$+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\,A_\vartheta)\right]-\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta)\right]+$$

$$+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)-\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\varphi}(rA_\varphi).$$

Analogim postupkom nalazimo dalje:

$$\mathbf{e}_\vartheta\cdot\Delta\mathbf{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA_\vartheta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\,A_\vartheta)\right]+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2A_\vartheta}{\partial\varphi^2}+$$

$$+\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)-\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta\,\partial\varphi}(\sin\vartheta\,A_\varphi),$$

kao i:

$$\mathbf{e}_\varphi\cdot\Delta\mathbf{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA_\varphi)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\,A_\varphi)\right]+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2A_\varphi}{\partial\varphi^2}+$$

$$+\frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta\,\partial\varphi}(\sin\vartheta\,A_\vartheta)-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right).$$

(*b*) Za *cilindrične koordinate* ćemo iskoristiti rezultate (3.37) — (3.40). Nakon sređivanja sličnog onom u prethodnom delu zadatka, dobijamo sledeće rezultate:

$$\mathbf{e}_\rho\cdot\Delta\mathbf{A}=\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)\right]+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2A_\rho}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2A_\rho}{\partial z^2}-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\mathbf{e}_\varphi\cdot\Delta\mathbf{A}=\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi)\right]+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2A_\varphi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2A_\varphi}{\partial z^2}+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi},$$

$$\mathbf{e}_z\cdot\Delta\mathbf{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2A_z}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2A_z}{\partial z^2}.$$

(*c*) Za *bipolarne cilindrične koordinate* možemo koristiti rezultate zadatka 3.10, gde su izvedeni oblici gradijenta, divergencije i rotora u ovim koordinatama. Lako je proveriti sledeće rezultate:

$$\mathbf{e}_u\cdot\Delta\mathbf{A}=\frac{\text{ch}\,u+\cos v}{a^2}\left[(\text{ch}\,u+\cos v)\left(\frac{\partial^2A_u}{\partial u^2}+\frac{\partial^2A_u}{\partial v^2}-A_u\right)-2\sin v\frac{\partial A_u}{\partial v}\right]+$$

$$+\frac{\partial^2A_u}{\partial z^2}+2\,\frac{\text{ch}\,u+\cos v}{a^2}\left(\text{sh}\,u\frac{\partial A_v}{\partial v}+\sin v\frac{\partial A_v}{\partial u}\right);$$

$$\mathbf{e}_v\cdot\Delta\mathbf{A}=\frac{\text{ch}\,u+\cos v}{a^2}\left[(\text{ch}\,u+\cos v)\left(\frac{\partial^2A_v}{\partial u^2}+\frac{\partial^2A_v}{\partial v^2}\right)-(\text{ch}\,u-\cos v)\,A_v\right]+$$

$$+\frac{\partial^2A_v}{\partial z^2}-2\,\frac{\text{ch}\,u+\cos v}{a^2}\left(\text{sh}\,u\frac{\partial A_u}{\partial v}+\sin v\frac{\partial A_u}{\partial u}\right);$$

$$\mathbf{e}_z\cdot\Delta\mathbf{A}=\frac{\partial^2A_z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2A_z}{\partial v^2}+\frac{\partial^2A_z}{\partial z^2}-\frac{2}{\text{ch}\,u+\cos v}\left(\text{sh}\,u\frac{\partial A_z}{\partial u}-\sin v\frac{\partial A_z}{\partial v}\right).$$

Čitaocu se ostavlja za vežbu da nađe odgovarajuće rezultate u preostala dva koordinatna sistema (eliptičke cilindrične i paraboličke koordinate) samostalno.

4. TENZORI KAO OPERATORI

4.1. Tenzor nije singularan ako mu je treća skalarna invarijanta, $S_3 = \det \mathcal{T}$, različita od nule.

(*a*) Ovde je:

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{T}_3 = \mathbf{e}_1,$$

pa je:

$$\det \mathcal{T} = \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) = 1,$$

što znači da tenzor nije singuliran. Za nalaženje inverznog tenzora, koji u ovom slučaju postoji, treba najpre naći vektore recipročnog trijedra koordinatnih vektora (v. zadatak 1.25. i njegovo rešenje):

$$\mathbf{T}_1^{-1} = \frac{\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3}{\det \mathcal{T}} = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{T}_2^{-1} = \frac{\mathbf{T}_3 \times \mathbf{T}_1}{\det \mathcal{T}} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{T}_3^{-1} = \frac{\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2}{\det \mathcal{T}} = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1.$$

Odavde se, prema formuli (4.43), nalazi:

$$\mathcal{T}^{-1} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} + \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} + \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}.$$

Zapazimo da je, za dati tenzor, $\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^*$ i $\det \mathcal{T} = +1$, što znači da je on v e r z o r.

(*b*) U ovom slučaju koordinatni vektori su:

$$\mathbf{T}_1 = 2\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{T}_3 = 3\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{e}_3,$$

pa je:

$$\det \mathcal{T} = \mathbf{T}_1 \cdot (\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 7,$$

tako da ni ovaj tenzor nije singularan i ima inverzni tenzor. Nađimo najpre:

$$\mathbf{T}_1^{-1} = \frac{\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3}{\det \mathcal{T}} = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \frac{2\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3}{7},$$

$$\mathbf{T}_2^{-1} = \frac{\mathbf{T}_3 \times \mathbf{T}_1}{\det \mathcal{T}} = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-7\,\mathbf{e}_2 - 7\,\mathbf{e}_3}{7},$$

$$\mathbf{T}_3^{-1} = \frac{\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2}{\det \mathcal{T}} = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{7}.$$

Za inverzni tenzor tako nalazimo, prema (4.43):

$$\mathcal{T}^{-1} = \left\{\mathbf{e}_1, \frac{2\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3}{7}\right\} + \left\{\mathbf{e}_2, \frac{-7\,\mathbf{e}_2 - 7\,\mathbf{e}_3}{7}\right\} + \left\{\mathbf{e}_3, \frac{\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{7}\right\}.$$

Iskoristimo li još osobine (4.12) i (4.13) asocijativnosti i distributivnosti dijadskog proizvoda, možemo nađeni tenzor prepisati u obliku (4.14):

$$\mathcal{T}^{-1} = \left\{\frac{2\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3}{7}, \mathbf{e}_1\right\} + \left\{\frac{-\mathbf{e}_1 - 7\,\mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_3}{7}, \mathbf{e}_2\right\} + \left\{\frac{2\,\mathbf{e}_1 - 7\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{7}, \mathbf{e}_3\right\},$$

što predstavlja traženi rezultat.

(*c*) U ovom slučaju je:

$$\det \mathcal{T} = \mathbf{T}_1 \cdot (\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 0,$$

tj. tenzor je singularan, tako da ne postoji inverzni tenzor.

4.2. Iskoristimo osobinu komutativnosti skalarnog proizvoda i relaciju (4.31), pa zadane relacije prepišimo u obliku:

(*a*) $\mathbf{A} \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{B}) + (\mathcal{T} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = (\mathcal{T}^* \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} + (\mathcal{T} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = [(\mathcal{T}^* + \mathcal{T}) \cdot \mathbf{A}] \cdot \mathbf{B} = 0,$

(*b*) $\mathbf{A} \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{B}) + (\mathcal{T} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = [(\mathcal{T}^* + \mathcal{T}) \cdot \mathbf{A}] \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B},$

(*c*) $(\mathcal{T} \cdot \mathbf{A}) \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{B}) = [\mathcal{T}^* (\mathcal{T} \cdot \mathbf{A})] \cdot \mathbf{B} = [(\mathcal{T}^* \cdot \mathcal{T}) \cdot \mathbf{A}] \cdot \mathbf{B};$

u poslednjoj relaciji je uzeto u obzir i pravilo za množenje tenzora (4.34). Iz ovog oblika lako zaključujemo da će zadane relacije važiti ako je

(*a*) $\mathcal{T} + \mathcal{T}^* = \mathcal{O}$, tj. $\mathcal{T}^* = -\mathcal{T}$ (tenzor $\mathcal{T}$ *antisimetričan*),

(*b*) $\mathcal{T} + \mathcal{T}^* = \mathcal{E}$,

(*c*) $\mathcal{T}^* \cdot \mathcal{T} = \mathcal{E}$, tj. $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}^{-1}$ (tenzor *unitaran*).

4.3. Da bi tenzor bio idempotentan, treba da ispunjava uslov $\mathcal{T}\cdot\mathcal{T}=\mathcal{T}$. Dakle

$$\mathcal{T}\cdot\mathcal{T}=(\{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\}+\{\mathbf{T},\mathbf{e}_2\})\cdot(\{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\}+\{\mathbf{T},\mathbf{e}_2\})=$$

$$=\{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\}\cdot\{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\}+\{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\}\cdot\{\mathbf{T},\mathbf{e}_2\}+\{\mathbf{T},\mathbf{e}_2\}\cdot\{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\}+\{\mathbf{T},\mathbf{e}_2\}\cdot\{\mathbf{T},\mathbf{e}_2\}=$$

$$=0+(\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_1)\{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2\}+\{\mathbf{T},\mathbf{e}_1\}+(\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_2)\{\mathbf{T},\mathbf{e}_2\}=$$

$$=\{\mathbf{T},\mathbf{e}_1\}+\{[(\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2+(\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{T}],\mathbf{e}_2\}.$$

Uporedimo li prve dijade tenzora $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}\cdot\mathcal{T}$ (dijade sa konsekventom $\mathbf{e}_1$), nalazimo da bi jednakost $\mathcal{T}\cdot\mathcal{T}=\mathcal{T}$ zahtevala da bude $\mathbf{T}=\mathbf{e}_2$. No, u tom slučaju druga dijada tenzora $\mathcal{T}\cdot\mathcal{T}$ postaje:

$$\{[(\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2+(\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{T}],\mathbf{e}_2\}=\{[(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2+(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2],\mathbf{e}_2\}=\{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2\},$$

i poklapa se s drugom dijadom tenzora $\mathcal{T}$, koja je oblika $\{\mathbf{T},\mathbf{e}_2\}=\{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2\}$.

Dakle, ako se stavi $\mathbf{T}=\mathbf{e}_2$, dobija se idempotentan tenzor:

$$\mathcal{T}=\{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\}+\{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2\}.$$

Njegove skalarne invarijante su:

$$S_1=\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2+\mathbf{0}\cdot\mathbf{e}_3=1,$$

$$S_2=\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{0})+\mathbf{e}_2\cdot(\mathbf{0}\times\mathbf{e}_2)+\mathbf{e}_3\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2)=0,$$

$$S_3=\mathbf{e}_2\cdot(\mathbf{e}\times\mathbf{0})=0,$$

a vektorska invarijanta je:

$$\mathbf{Q}=\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2+\mathbf{0}\times\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_3.$$

Pošto je $S_3=0$, nađeni tenzor je singularan i nema inverznog tenzora.

4.4. Prema osobini (4.31), leva strana zadane relacije se transformiše ovako:

$$(\mathcal{T}\cdot\mathbf{C})\cdot(\mathcal{T}^*\cdot\mathbf{C})=[(\mathcal{T}^*)^*\cdot(\mathcal{T}\cdot\mathbf{C})]\cdot\mathbf{C}=$$

$$=[\mathcal{T}\cdot(\mathcal{T}\cdot\mathbf{C})]\cdot\mathbf{C}=[(\mathcal{T}\cdot\mathcal{T})\cdot\mathbf{C}]\cdot\mathbf{C}.$$

Zadana relacija će, očevidno, važiti ako je $(\mathcal{T}^2\cdot\mathbf{C})\cdot\mathbf{C}=C^2$, tj. $\mathcal{T}^2=\mathcal{E}$. Napomenimo da to *ne znači* da mora biti $\mathcal{T}=\mathcal{E}$. Na primer, tenzor

$$\mathcal{U}=\{-\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1\}+\{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2\}+\{-\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3\}$$

nije jedinični, ali zadovoljava uslov $\mathcal{U}\cdot\mathcal{U}=\mathcal{E}$, kao što je lako proveriti prema (4.34). V. i zadatak 5.21.

4.5. Prikažimo tenzor u obliku (4.14) i iskoristimo pravila (4.11). Tako izlazi:

$$R=\frac{(\{\mathbf{T}_k,\mathbf{e}_k\}\cdot\mathbf{A})\cdot[(\{\mathbf{T}_l,\mathbf{e}_l\}\cdot\mathbf{B})\times(\{\mathbf{T}_m,\mathbf{e}_m\}\cdot\mathbf{C}]}{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})}=$$

$$=\frac{[\mathbf{T}_k(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{A})]\cdot[\mathbf{T}_l(\mathbf{e}_l\cdot\mathbf{B})\times\mathbf{T}_m(\mathbf{e}_m\cdot\mathbf{C})]}{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})}=$$

$$=\frac{(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{A})(\mathbf{e}_l\cdot\mathbf{B})(\mathbf{e}_m\cdot\mathbf{C})[\mathbf{T}_k\cdot(\mathbf{T}_l\cdot\mathbf{T}_m)]}{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})}.$$

Mešoviti proizvod koordinatnih vektora $\mathbf{T}_k\cdot(\mathbf{T}_l\times\mathbf{T}_m)$ jednak je nuli kad god su bar dva indeksa k, l, m jednaka međusobno i jednak je $\pm\det\mathcal{T}$ ako su sva tri indeksa različita, i to $+\det\mathcal{T}$ ako ovi čine parnu permutaciju od 1, 2, 3 a $-\det\mathcal{T}$ ako čine neparnu. To znači da možemo pisati

$$\mathbf{T}_k\cdot(\mathbf{T}_l\times\mathbf{T}_m)=\varepsilon_{klm}\det\mathcal{T},$$

pa zadani izraz postaje:

$$R=\frac{A_kB_lC_m\varepsilon_{klm}\det\mathcal{T}}{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})},$$

gde je istovremeno stavljeno $\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{A}=A_k$, i slično za druga dva skalarna proizvoda. Na osnovu (1.33) i (1.27) lako vidimo da je

$$\varepsilon_{klm}A_kB_lC_m=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}),$$

tako da imamo:

$$R=\det\mathcal{T}.$$

Zadani izraz, dakle, nije ništa drugo nego treća skalarna invarijanta tenzora $\mathcal{T}$, i stoga ne zavisi od vektora **A**, **B** i **C**, već samo od posmatranog tenzora.

4.6. (*a*) Prikažemo li vektor **A** u obliku $A_k\mathbf{e}_k$, moći ćemo pisati:

$$\mathcal{T}_1\cdot\mathbf{A}=\mathbf{a}\times\mathbf{A}=\mathbf{a}\times(A_k\mathbf{e}_k)=(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k)A_k=$$

$$=(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{A})=\{\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_k\}\cdot\mathbf{A};$$

u pretposlednjoj jednakosti je iskorišćena relacija $A_k=\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_k$, a u poslednjoj je primenjena formula (4.11) koja daje osnovnu osobinu dijadskog proizvoda. Prema tome:

$$\mathcal{T}_1=\{\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_k\}. \qquad (R.4.1)$$

Izračunavanje skalarnih invarijanti sad ne predstavlja teškoću. Tako, na osnovu (4.18) nalazimo da je prva skalarna invarijanta jednaka nuli:

$$(S_1)_1=(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k)\cdot\mathbf{e}_k=0,$$

jer se u mešovitom proizvodu dvaput ponavlja isti vektor. Druga skalarna invarijanta, koju izračunavamo prema (4.20), biće:

$$(S_2)_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{e}_i\cdot[(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_j)\times(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k)] =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,[\mathbf{e}_i\times(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_j)]\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k) =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,[\mathbf{a}\,\delta_{ij} - \mathbf{e}_j(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i)]\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k).$$

Pri pisanju druge jednakosti je izmenjeno mesto znakova skalarnog i vektorskog množenja u mešovitom proizvodu, što je dopustivo s obzirom na osobinu (1.37), dok je u drugoj jednakosti razvijen trostruki vektorski proizvod na osnovu (1.40). Uzmemo li, dalje, u obzir da je $\varepsilon_{ijk}\,\delta_{ij} = 0$ (drugi faktor je različit od nule samo kad su mu indeksi jednaki, a prvi je onda upravo jednak nuli), moći ćemo pisati:

$$(S_2)_1 = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i)\,[\mathbf{e}_j\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k)] =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i)\,[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k)];$$

neciklična izmena redosleda vektora u mešovitom proizvodu dovela je do pojave još jednog negativnog predznaka. Uzmimo sada u obzir relaciju $\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k = \varepsilon_{sjk}\,\mathbf{e}_s$, navedenu u komentaru formule (1.32) Glave 1, pa napišimo dalje:

$$(S_2)_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{sjk}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_s) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\,\delta_{is}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_s) =$$

$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i) = a_i\,a_i = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}.$$

U gornjim relacijama je iskorišćena formula (*b*) iz zadatka 1.26. Za treću skalarnu invarijantu ćemo imati:

$$(S_3)_1 = (\mathbf{a}\times\mathbf{e}_1)\cdot[(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_2)\times(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_3)] =$$

$$= (\mathbf{a}\times\mathbf{e}_1)\cdot\{\mathbf{a}\,[(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_3] - \mathbf{e}_3\,[(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{a}]\} =$$

$$= [(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{a}]\,[(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_3] = 0;$$

izraz u srednjoj zagradi polaznog člana je transformisan prema formuli (1.40), smatrajući pri tom $(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_2)$ privremeno kao jedan vektor. Vektorska invarijanta (4.25) za tenzor (*R*.4.1) biće, opet prema istoj formuli za transformaciju trostrukog vektorskog proizvoda,

$$(\mathbf{Q})_1 = (\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k)\times\mathbf{e}_k =$$

$$= \mathbf{e}_k\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k) - \mathbf{a}\,(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_k) =$$

$$= \mathbf{a} - 3\,\mathbf{a} = -2\,\mathbf{a}$$

jer je $\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_k = 3$. Ovaj rezultat je u skladu sa formulom (4.51).

Dokažimo još da je tenzor $\mathcal{T}_1$ antisimetričan. Sledeće jednakosti važe za proizvoljan vektor $\mathbf{C}$:

$$\mathcal{T}_1^*\cdot\mathbf{C} = \{\mathbf{e}_k,\ \mathbf{a}\times\mathbf{e}_k\}\cdot\mathbf{C} = \mathbf{e}_k\,[(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k)\cdot\mathbf{C}] =$$

$$= \mathbf{e}_k\,[(\mathbf{C}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{e}_k] = \mathbf{C}\times\mathbf{a} = -\mathbf{a}\times\mathbf{C} =$$

$$= -\mathcal{T}_1\cdot\mathbf{C},$$

i, zbog proizvoljnosti vektora $\mathbf{C}$, ekvivalentne su uslovu antisimetričnosti $\mathcal{T}_1^* = -\mathcal{T}_1$.

(*b*) Postupajući slično kao kod tenzora $\mathcal{T}_1$ imamo:

$$\mathcal{T}_2\cdot\mathbf{A} = \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{A}) = \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{e}_k\,A_k) =$$

$$= \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{e}_k)\,A_k = [\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{e}_k)]\,(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{A}) =$$

$$= \{\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{e}_k),\ \mathbf{e}_k\}\cdot\mathbf{A},$$

odakle neposredno čitamo:

$$\mathcal{T}_2 = \{\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{e}_k),\ \mathbf{e}_k\} = \{\mathbf{b}\,a_k - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{e}_k,\ \mathbf{e}_k\}; \qquad (R.4.2)$$

drugi od navedenih oblika je dobijen primenom formule (1.40) za razvijanje trostrukog vektorskog proizvoda. Nalaženje invarijanti ovog tenzora ne predstavlja nikakvu principijelnu teškoću. Imamo:

$$(S_1)_2 = [\mathbf{b}\,a_k - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{e}_k]\cdot\mathbf{e}_k = \mathbf{b}\cdot(a_k\,\mathbf{e}_k) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_k) =$$

$$= (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}) - 3\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = -2\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b});$$

$$(S_2)_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{e}_i\cdot\{[\mathbf{b}\,a_j - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{e}_j]\times[\mathbf{b}\,a_k - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{e}_k]\} =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{e}_i\cdot[a_j\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,(\mathbf{e}_k\times\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,a_k\,(\mathbf{e}_j\times\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\,(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k)] =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,[a_j\,\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{e}_k\times\mathbf{b}) - a_k\,\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{e}_j\times\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k)] =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,[\varepsilon_{iks}\,a_j\,b_s - \varepsilon_{ijs}\,a_k\,b_s + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\varepsilon_{ijk}] =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,[-\varepsilon_{ikj}\,\varepsilon_{iks}\,a_j\,b_s - \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijs}\,a_k\,b_s + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk}] =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,[-2\,\delta_{js}\,a_j\,b_s - 2\,\delta_{ks}\,a_k\,b_s + 6\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})] =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,[-2\,a_s\,b_s - 2\,a_s\,b_s + 6\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})] =$$

$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2;$$

$$(S_3)_2 = [\mathbf{b}\, a_1 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{e}_1]\cdot\{[\mathbf{b}\, a_2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{e}_2]\times[\mathbf{b}\, a_3 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{e}_3]\} =$$
$$= [\mathbf{b}\, a_1 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{e}_1]\cdot[a_2\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,(\mathbf{e}_3\times\mathbf{b}) - a_3\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,(\mathbf{e}_2\times\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\,\mathbf{e}_1] =$$
$$= a_1\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_1) - a_2\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\,[\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_3\times\mathbf{b})] + a_3\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\,[\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{b})] - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^3 =$$
$$= a_1\, b_1\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + a_2\, b_2\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + a_3\, b_3\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^3 = 0;$$
$$(\mathbf{Q})_2 = [\mathbf{b}\, a_k - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{e}_k]\times\mathbf{e}_k = (\mathbf{b}\, a_k)\times\mathbf{e}_k = \mathbf{b}\times\mathbf{a}.$$

Sve korišćene tranosformacije su elementarne i zasnovane su na osobinama mešovitog i trostrukog vektorskog proizvoda, kao i na svojstvima simbola Levi-Civita sadržanim u zadatku 1.26.

4.7. Formula ($R.$1.4) u zadatku 1.15. direktno daje sledeću vezu između $\mathbf{C}'$ i $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C}' = \mathbf{C}\cos\theta + \mathbf{a}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{C})\,(1-\cos\theta) + (\mathbf{a}\times\mathbf{C})\sin\theta$$

i, s obzirom na rešenje prvog dela prethodnog zadatka izraženo relacijom ($R.$4.1), može se napisati kao:

$$\mathbf{C}' = (\cos\theta\,\mathcal{E} + (1-\cos\theta)\,\{\mathbf{a},\,\mathbf{a}\} + \sin\theta\,\{\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k,\,\mathbf{e}_k\})\cdot\mathbf{C},$$

tako da se za tenzor $\mathcal{T}$ definisan zadatkom dobija:

$$\mathcal{T} = \cos\mathcal{E} + (1-\cos\theta)\,\{\mathbf{a},\,\mathbf{a}\} + \sin\theta\,\{\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k,\,\mathbf{e}_k\} =$$
$$= \cos\theta\,\{\mathbf{e}_k,\,\mathbf{e}_k\} + (1-\cos\theta)\,\{a_k\,\mathbf{a},\,\mathbf{e}_k\} + \sin\theta\,\{\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k,\,\mathbf{e}_k\} =$$
$$= \cos\theta\,\{\mathbf{e}_k,\,\mathbf{e}_k\} + (1-\cos\theta)\,\{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k)\,\mathbf{a},\,\mathbf{e}_k\} + \sin\theta\,\{\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k,\,\mathbf{e}_k\} =$$
$$= \{\cos\theta\,\mathbf{e}_k + (1-\cos\theta)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k)\,\mathbf{a} + \sin\theta\,(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k),\,\mathbf{e}_k\},$$

tj. za njegove koordinatne vektore ćemo imati:

$$\mathbf{T}_k = \cos\theta\,\mathbf{e}_k + (1-\cos\theta)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k)\,\mathbf{a} + \sin\theta\,(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k). \qquad (R.4.3)$$

Posmatrani tenzor će biti verzor, ako su njegovi koordinatni vektori jedinični i ako obrazuju pravougli trijedar desne dispozicije. Dokažimo da je ovo zaista slučaj.

Nađimo najpre intenzitet ma kog od triju koordinatnih vektora ($R.$4.3), tj. skalarni proizvod $\mathbf{T}_\alpha\cdot\mathbf{T}_\alpha$ (grčki indeks označava da se *ne podrazumeva sumiranje*). Direktnim množenjem član po član nalazimo:

$$\mathbf{T}_\alpha\cdot\mathbf{T}_\alpha = \cos^2\theta + (1-\cos\theta)^2\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha)^2 + \sin^2\theta\,(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_\alpha)^2 + 2\cos\theta\,(1-\cos\theta)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha)^2 =$$
$$= \cos^2\theta + (1-\cos\theta)\,(1+\cos\theta)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha)^2 + \sin^2\theta\,(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_\alpha)^2 =$$
$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta\,[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha)^2 + (\mathbf{a}\times\mathbf{e}_\alpha)^2] =$$
$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1;$$

pri ovom izračunavanju je korišćen tzv. *Lagrange-ov identitet*:

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 + (\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2 = A^2 B^2,$$

koji neposredno sledi iz definicija skalarnog i vektorskog proizvoda, i uzeta je u obzir okolnost da je vektor $\mathbf{a}$ jedinični.

Na sličan način možemo pokazati da su različiti koordinatni vektori uzajamno ortogonalni. Direktno množenje član po član daje:

$$\mathbf{T}_\alpha\cdot\mathbf{T}_\beta = 2\cos\theta\,(1-\cos\theta)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\beta) + \sin\theta\cos\theta\,\mathbf{e}_\alpha\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_\beta) +$$
$$+ (1-\cos\theta)^2\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\beta) + \sin\theta\cos\theta\,\mathbf{e}_\beta\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_\alpha) +$$
$$+ \sin^2\theta\,(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_\alpha)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_\beta) = \sin^2\theta\,[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\beta) + (\mathbf{a}\times\mathbf{e}_\alpha)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_\beta)] =$$
$$= \sin^2\theta\,\{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\beta) + \mathbf{a}\cdot[\mathbf{e}_\alpha\times(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_\beta)]\} =$$
$$= \sin^2\theta\,\{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\beta) + \mathbf{a}\cdot[\mathbf{a}\,(\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{e}_\beta) - \mathbf{e}_\beta\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha)]\} =$$
$$= \sin^2\theta\,\{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\beta) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\beta)\} = 0.$$

Da bismo proverili da je trijedar vektora $\mathbf{T}_k$ zaista desne dispozicije, treba ispitati da li, na primer, važi $\mathbf{T}_1\times\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_3$. To se lako proverava direktnim množenjem i ostavlja se čitaocu za samostalnu vežbu. Time je dokazano da je $\mathcal{T}$ zaista verzor.

Inverzni tenzor možemo sada lako naći na osnovu (4.53):

$$\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^{*} = \{\mathbf{e}_k,\,\cos\theta\,\mathbf{e}_k + (1-\cos\theta)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k)\,\mathbf{a} + \sin\theta\,(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k)\}.$$

Koristeći distributivnost dijadskog množenja, imamo dalje:

$$\mathcal{T}^{-1} = \{\mathbf{e}_k,\,\cos\theta\,\mathbf{e}_k\} + \{\mathbf{e}_k,\,(1-\cos\theta)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k)\,\mathbf{a}\} + \{\mathbf{e}_k,\,\sin\theta\,(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k)\} =$$
$$= \{\cos\theta\,\mathbf{e}_k,\,\mathbf{e}_k\} + \{(1-\cos\theta)\,\mathbf{a},\,\mathbf{a}\} - \{\sin\theta\,(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k),\,\mathbf{e}_k\}.$$

Za transformaciju poslednjeg člana iskorišćen je rezultat prethodnog zadatka, prema kome je tenzor ($R.$4.1) antisimetričan. Dakle:

$$\mathcal{T}^{-1} = \{\cos\theta\,\mathbf{e}_k + (1-\cos\theta)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k)\,\mathbf{a} - \sin\theta\,\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k,\,\mathbf{e}_k\}. \qquad (R.4.4)$$

Upoređivanjem sa ($R.$4.3) vidimo da je $\mathcal{T}^{-1}$ takođe verzor, i to takav koji definiše rotaciju oko iste ose za ugao $-\theta$, što je geometrijski sasvim očevidno.

4.8. Pošto su koordinatni vektori verzora dati jednačinom ($R.$ 4.3), njegov trag će biti:

$$tr\,\mathcal{T} = [\cos\theta\,\mathbf{e}_k + (1-\cos\theta)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k)\,\mathbf{a} + \sin\theta\,(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k)]\cdot\mathbf{e}_k =$$
$$= \cos\theta\,(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_k) + (1-\cos\theta)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k) =$$
$$= 3\cos\theta + (1-\cos\theta)\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} =$$
$$= 1 + 2\cos\theta, \qquad (R.\ 4.5)$$

dok za vektorsku invarijantu imamo:

$$\mathbf{Q} = [\cos\theta\,\mathbf{e}_k + (1-\cos\theta)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k)\,\mathbf{a} + \sin\theta\,(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k)]\times\mathbf{e}_k =$$
$$= (1-\cos\theta)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k)\,(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k) + \sin\theta\,(\mathbf{a}\times\mathbf{e}_k)\times\mathbf{e}_k =$$
$$= (1-\cos\theta)\,(\mathbf{a}\times\mathbf{a}) + \sin\theta\,[\mathbf{e}_k\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k) - \mathbf{a}\,(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_k)] =$$
$$= -2\,\mathbf{a}\sin\theta. \qquad (R.\ 4.6)$$

Dobijeni rezultati pokazuju da se nalaženjem traga verzora i njegove vektorske invarijante mogu odrediti pravac ose rotacije i ugao θ za koji je ova rotacija izvršena. Način rezonovanja će biti jasan na primeru verzora iz zadatka 4.1. (*a*). Kod tog verzora je:

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{T}_3 = \mathbf{e}_1$$

tako da je njegov trag:

$$tr\,\mathcal{T} = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0,$$

a njegova vektorska invarijanta:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{e}_1 + \mathbf{T}_2 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{T}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).$$

Na osnovu (*R.* 4.5), dakle, možemo pisati:

$$1 + 2\cos\theta = 0, \quad \cos\theta = -\frac{1}{2}, \text{ tj. } \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ ili } \theta = \frac{4\pi}{3}$$

(ukoliko se ograničimo na uglove između 0 i 2π). Na osnovu (*R.* 4.6) nalazimo da je jedinični vektor ose rotacije:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|} = -\frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\pm\sqrt{3}} = \mp\frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

pri čemu su oba znaka ravnopravna (gornjim izrazom je *pravac* ose određen, dok *smer* možemo odabrati po volji biranjem jednog ili drugog znaka). Onda se i dobija i:

$$\sin\theta = \mp\frac{\sqrt{3}}{2},$$

gde gornji znak odgovara gornjem znaku u prethodnoj relaciji, i analogo za donje. Odaberemo li gornji znak, dobijamo $\theta = \frac{4\pi}{3}$. Za donji znak izlazi $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Dakle, zadanim verzorom je opisana rotacija oko ose jediničnog vektora $\mathbf{a} = +\frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ za ugao $\theta = \frac{2\pi}{3}$, ili oko ose jediničnog vektora $\mathbf{a} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ za ugao $\theta = \frac{4\pi}{3}$. Geometrijski gledano, to je jedna ista rotacija.

4.9. Polazeći od definicije konjugovanog tenzora (4.27), možemo pisati:

$$\mathcal{T}^* = \{\mathbf{e}_k,\ \mathbf{T}_k\} = \{\mathbf{e}_k,\ (\mathbf{T}_k \cdot \mathbf{e}_s)\,\mathbf{e}_s\} =$$
$$= \{(\mathbf{T}_k \cdot \mathbf{e}_s)\,\mathbf{e}_k,\ \mathbf{e}_s\},$$

odakle se za koordinatne vektore konjugovanog tenzora nalazi:

$$\mathbf{T}_s^* = (\mathbf{T}_k \cdot \mathbf{e}_s)\,\mathbf{e}_k. \qquad (R.\ 4.7)$$

Sada je lako naći njegove skalarne invarijante. U skladu sa (4.18) imaćemo:

$$S_1^* = \mathbf{T}_s^* \cdot \mathbf{e}_s = [(\mathbf{T}_k \cdot \mathbf{e}_s)\,\mathbf{e}_k] \cdot \mathbf{e}_s = (\mathbf{T}_k \cdot \mathbf{e}_s)(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_s) =$$
$$= (\mathbf{T}_k \cdot \mathbf{e}_s)\,\delta_{ks} = \mathbf{T}_k \cdot \mathbf{e}_k = S_1;$$

slično na osnovu (4.20) za drugu skalarnu varijantu dobijamo:

$$S_2^* = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T}_j^* \times \mathbf{T}_k^*) =$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{e}_i \cdot [(\mathbf{T}_p \cdot \mathbf{e}_j)\,\mathbf{e}_p \times (\mathbf{T}_q \cdot \mathbf{e}_k)\,\mathbf{e}_q] =$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,(\mathbf{T}_p \cdot \mathbf{e}_j)(\mathbf{T}_q \cdot \mathbf{e}_k)\,[\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_p \times \mathbf{e}_q)] =$$
$$= \frac{1}{2}[\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T}_p \times \mathbf{T}_q)]\,[\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_p \times \mathbf{e}_q)] =$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{ipq}\,[\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T}_p \times \mathbf{T}_q)] = S_2$$

(sve transformacije su očevidne). Najzad, za treću skalarnu invarijantu nalazimo, prema (4.24),

$$S_3^* = \mathbf{T}_1^* \cdot (\mathbf{T}_2^* \times \mathbf{T}_3^*) = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{T}_i^* \cdot (\mathbf{T}_j^* \times \mathbf{T}_k^*) =$$
$$= \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\,(\mathbf{T}_p \cdot \mathbf{e}_i)\,\mathbf{e}_p \cdot [(\mathbf{T}_q \cdot \mathbf{e}_j)\,\mathbf{e}_q \times (\mathbf{T}_r \cdot \mathbf{e}_k)\,\mathbf{e}_r] =$$
$$= \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\,(\mathbf{T}_p \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{T}_q \cdot \mathbf{e}_j)(\mathbf{T}_r \cdot \mathbf{e}_k)\,[\mathbf{e}_p \cdot (\mathbf{e}_q \times \mathbf{e}_r)] =$$
$$= \frac{1}{6}\mathbf{T}_p \cdot (\mathbf{T}_q \times \mathbf{T}_r)\,\varepsilon_{pqr} = S_3.$$

Dakle, sve tri skalarne invarijante oba tenzora se zaista poklapaju. Ispitajmo još vektorske invarijante. Prema (4.25) nalazimo:

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{T}_k^* \times \mathbf{e}_k = [(\mathbf{T}_p \cdot \mathbf{e}_k)\,\mathbf{e}_p] \times \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_p \times [(\mathbf{T}_p \cdot \mathbf{e}_k)\,\mathbf{e}_k] =$$
$$= \mathbf{e}_p \times \mathbf{T}_p = -\mathbf{T}_p \times \mathbf{e}_p = -\mathbf{Q}.$$

Vektorske invarijante konjugovanih tenzora nisu, dakle, jednake već se razlikuju po znaku.

4.10. Ako je $\mathcal{T} = \{\mathbf{T}_k,\ \mathbf{e}_k\}$ dati tenzor, onda je njegov inverzni tenzor, prema (4.43), $\mathcal{T}^{-1} = \{\mathbf{e}_k,\ \mathbf{T}_k^{-1}\}$, pa je:

$$(\mathcal{T}^{-1})^* = \{\mathbf{T}_k^{-1},\ \mathbf{e}_k\}, \qquad (R.\ 4.8)$$

gde su [v. zad 1 25]:

$$\mathbf{T}_k^{-1}=\frac{1}{2}\varepsilon_{klm}\frac{\mathbf{T}_l\times\mathbf{T}_m}{\mathbf{T}_1\cdot(\mathbf{T}_2\times\mathbf{T}_2)}. \qquad (R.\ 4.9)$$

S druge strane, koordinatni vektori konjugovanog tenzora su dati relacijom (*R.* 4.7) iz prethodnog zadatka, tako da po formuli (*R.* 4.9) nalazimo vektore njihovog recipročnog trijedra:

$$(\mathbf{T}_k^*)^{-1}=\frac{1}{2}\varepsilon_{klm}\frac{\mathbf{T}_l^*\times\mathbf{T}_m^*}{\mathbf{T}_1^*\cdot(\mathbf{T}_2^*\times\mathbf{T}_3^*)}=$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_{klm}\frac{[(\mathbf{T}_p\cdot\mathbf{e}_l)\mathbf{e}_p]\times[(\mathbf{T}_q\cdot\mathbf{e}_m)\mathbf{e}_q]}{\mathbf{T}_1\cdot(\mathbf{T}_2\times\mathbf{T}_3)}=$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_{klm}(\mathbf{T}_p\cdot\mathbf{e}_l)(\mathbf{T}_q\cdot\mathbf{e}_m)\frac{\mathbf{e}_p\times\mathbf{e}_q}{\mathbf{T}_1\cdot(\mathbf{T}_2\times\mathbf{T}_3)}.$$

Uočimo li da je $\varepsilon_{klm}(\mathbf{T}_p\cdot\mathbf{e}_l)(\mathbf{T}_q\cdot\mathbf{e}_m)=\mathbf{e}_k\cdot(\mathbf{T}_p\times\mathbf{T}_q)$, imaćemo:

$$(\mathbf{T}_k^*)^{-1}=\frac{1}{2}[\mathbf{e}_k\cdot(\mathbf{T}_p\times\mathbf{T}_q)]\frac{\mathbf{e}_p\times\mathbf{e}_q}{\mathbf{T}_1\cdot(\mathbf{T}_2\times\mathbf{T}_3)}=$$

$$=\frac{1}{2}[\mathbf{e}_k\cdot(\mathbf{T}_p\times\mathbf{T}_q)]\frac{\varepsilon_{spq}\mathbf{e}_s}{\mathbf{T}_1\cdot(\mathbf{T}_2\times\mathbf{T}_3)};$$

u drugoj jednakosti je iskorišćena relacija (1.33). Zapazimo li, dalje, da je

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{spq}\frac{\mathbf{T}_p\times\mathbf{T}_q}{\mathbf{T}_1\cdot(\mathbf{T}_2\times\mathbf{T}_3)}=\mathbf{T}_s^{-1},$$

moći ćemo gornji rezultat prepisati kao:

$$(\mathbf{T}_k^*)^{-1}=(\mathbf{T}_s^{-1}\cdot\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_s, \qquad (R.\ 4.10)$$

tako da definitivno dobijamo:

$$(\mathcal{T}^*)^{-1}=\{\mathbf{e}_k,\ (\mathbf{T}_k^*)^{-1}\}=\{\mathbf{e}_k,\ (\mathbf{T}_s^{-1}\cdot\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_s\}=$$

$$=\{(\mathbf{T}_s^{-1}\cdot\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k,\ \mathbf{e}_s\}=\{\mathbf{T}_s^{-1},\ \mathbf{e}_s\}. \qquad (R.\ 4.11)$$

Upoređivanjem sa (*R.* 4.8) vidimo da su operacije konjugovanja i obrazovanja inverznog tenzora zaista komutativne.

4.11. Neka su $\mathcal{U}=\{\mathbf{U}_k,\ \mathbf{e}_k\}$ i $\mathcal{V}=\{\mathbf{V}_k,\ \mathbf{e}_k\}$ zadani tenzori. Prema (4.35), njihov proizvod možemo napisati kao:

$$\mathcal{U}\cdot\mathcal{V}=\{\mathbf{U}_k,\ \mathbf{e}_k\}\cdot\{\mathbf{V}_l,\ \mathbf{e}_l\}=(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{V}_l)\{\mathbf{U}_k,\ \mathbf{e}_l\}$$

odakle čitamo koordinatne vektore tenzora $\mathcal{U}\cdot\mathcal{V}$:

$$(\mathcal{U}\cdot\mathcal{V})\cdot\mathbf{e}_l=(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{V}_l)\mathbf{U}_k,$$

tako da za treću skalarnu invarijantu možemo, prema (4.24), pisati:

$$\det(\mathcal{U}\cdot\mathcal{V})=[(\mathbf{e}_p\cdot\mathbf{V}_1)\mathbf{U}_p]\cdot\{[(\mathbf{e}_q\cdot\mathbf{V}_2)\mathbf{U}_q]\times[(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{V}_3)\mathbf{U}_r]\}=$$

$$=(\mathbf{e}_p\cdot\mathbf{V}_1)(\mathbf{e}_q\cdot\mathbf{V}_2)(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{V}_3)[\mathbf{U}_p\cdot(\mathbf{U}_q\times\mathbf{U}_r)]=$$

$$=(\mathbf{e}_p\cdot\mathbf{V}_1)(\mathbf{e}_q\cdot\mathbf{V}_2)(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{V}_3)\varepsilon_{pqr}[\mathbf{U}_1\cdot(\mathbf{U}_2\times\mathbf{U}_3)]=$$

$$=\varepsilon_{pqr}(\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{e}_p)(\mathbf{V}_2\cdot\mathbf{e}_q)(\mathbf{V}_3\cdot\mathbf{e}_r)[\mathbf{U}_1\cdot(\mathbf{U}_2\times\mathbf{U}_3)]=$$

$$=[\mathbf{V}_1\cdot(\mathbf{V}_2\times\mathbf{V}_3)][\mathbf{U}_1\cdot(\mathbf{U}_2\times\mathbf{U}_3)]=$$

$$=\det\mathcal{U}\cdot\det\mathcal{V},$$

što je i trebalo pokazati.

4.12. Uočimo najpre da je trag zbira dva tenzora jednak zbiru tragova i da analogo tvrđenje važi i za vektorske invarijante. Da bismo se u to uverili, posmatrajmo zbir dva tenzora:

$$\mathcal{W}=\mathcal{U}+\mathcal{V}, \qquad \text{tj. } \{\mathbf{W}_k,\ \mathbf{e}_k\}=\{\mathbf{U}_k,\ \mathbf{e}_k\}+\{\mathbf{V}_k,\ \mathbf{e}_k\}.$$

Imaćemo:

$$tr\,\mathcal{W}=\mathbf{W}_k\cdot\mathbf{e}_k=(\mathbf{U}_k+\mathbf{V}_k)\cdot\mathbf{e}_k=\mathbf{U}_k\cdot\mathbf{e}_k+\mathbf{V}_k\cdot\mathbf{e}_k=tr\,\mathcal{U}+tr\,\mathcal{V}.$$

Dokaz za vektorske invarijante je analog, samo se znaci skalarnog množenja zamenjuju znacima vektorskog. Pri dokazivanju se koristi samo distributivnost skalarnog i vektorskog množenja. Slično se može dokazati da ako je $\mathcal{W}=\alpha\mathcal{V}$, onda je $tr\,\mathcal{W}=\alpha\,tr\,\mathcal{V}$ i analogo za vektorske invarijante.

Prema tome, ako dati tenzor $\mathcal{T}$ napišemo u skladu sa (4.52) kao:

$$\mathcal{T}=\frac{1}{2}(\mathcal{T}+\mathcal{T}^*)+\frac{1}{2}(\mathcal{T}-\mathcal{T}^*),$$

imaćemo za njegov trag:

$$tr\,\mathcal{T}=tr\left[\frac{1}{2}(\mathcal{T}+\mathcal{T}^*)\right]+tr\left[\frac{1}{2}(\mathcal{T}-\mathcal{T}^*)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(tr\,\mathcal{T}+tr\,\mathcal{T}^*)+\frac{1}{2}(tr\,\mathcal{T}-tr\,\mathcal{T}^*).$$

Pošto je $tr\,\mathcal{T}^*=tr\,\mathcal{T}$ (v. zadatak 4.9), trag antisimetričnog dela jednak je nuli, tako da je trag tenzora $\mathcal{T}$ zaista jednak tragu njegovog simetričnog dela. Za vektorske invarijante nalazimo:

$$\mathbf{Q}_{\mathcal{T}}=\mathbf{Q}_{\frac{1}{2}(\mathcal{T}+\mathcal{T}^*)}+\mathbf{Q}_{\frac{1}{2}(\mathcal{T}-\mathcal{T}^*)}=\frac{1}{2}(\mathbf{Q}_{\mathcal{T}}+\mathbf{Q}_{\mathcal{T}^*})+\frac{1}{2}(\mathbf{Q}_{\mathcal{T}}-\mathbf{Q}_{\mathcal{T}^*}).$$

Kako je $\mathbf{Q}_{\mathcal{T}^*}=-\mathbf{Q}_{\mathcal{T}}$ (v. zadatak 4.9.), izlazi da je vektorska invarijanta simetričnog dela zaista jednaka nuli, tj. vektorska invarijanta tenzora $\mathcal{T}$ jednaka je vektorskoj invarijanti antisimetričnog dela.

4.13. Prema (4.54), unitarni tenzor se može napisati kao:

$$\mathcal{T}=\{\mathbf{e}_1',\ \mathbf{e}_1\}+\{\mathbf{e}_2',\ \mathbf{e}_2\}+\{\mathbf{e}_3',\ \mathbf{e}_3\}.$$

gde je $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ trijedar uzajamno ortogonalnih jediničnih vektora desne (verzor) ili leve (perverzor) dispozicije. Odatle za prvu skalarnu invarijantu nalazimo:

$$S_1 = tr\mathcal{T} = \mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2'\cdot\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3'\cdot\mathbf{e}_3,$$

dok je treća skalarna invarijanta

$$S_3 = \det\mathcal{T} = \mathbf{e}_1'\cdot(\mathbf{e}_2'\times\mathbf{e}_3') = \pm 1,$$

gde se gornji znak odnosi na verzor, a donji na perverzor. Za drugu skalarnu invarijantu imamo, prema (4.19)

$$S_2 = \mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2'\times\mathbf{e}_3') + \mathbf{e}_2\cdot(\mathbf{e}_3'\times\mathbf{e}_1') + \mathbf{e}_3\cdot(\mathbf{e}_1'\times\mathbf{e}_2') =$$
$$= \pm(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2' + \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3'),$$

jer je $\mathbf{e}_2'\times\mathbf{e}_3' = \pm\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_3'\times\mathbf{e}_1' = \pm\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_1'\times\mathbf{e}_2' = \pm\mathbf{e}_3'$, takođe zavisno od toga da li koordinatni vektori posmatranog unitarnog tenzora čine desni ili levi trijedar. Iz ovih rezultata neposredno proizilazi

$$S_2 = S_1 S_3,$$

što je i trebalo pokazati.

4.14. Ako su q_1, q_2, q_3 neke generalisane koordinate možemo prema (2.23) pisati

$$dq_1 = \nabla q_1\cdot d\mathbf{r}, \qquad dq_2 = \nabla q_2\cdot d\mathbf{r}, \qquad dq_3 = \nabla q_3\cdot d\mathbf{r},$$

odakle proizilazi da su dq_1, dq_2 i dq_3 proporcionalne *projekcijama* vektora $d\mathbf{r}$ na vektore trijedra koji obrazuju ∇q_1, ∇q_2 i ∇q_3. S druge strane, po formuli totalnog diferencijala

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dq_1}dq_1 + \frac{d\mathbf{r}}{dq_2}dq_2 + \frac{d\mathbf{r}}{dq_3}dq_3$$

izlazi da su dq_1, dq_2 i dq_3 *komponente* istoga vektora $d\mathbf{r}$ u odnosu na trijedar vektora $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_2}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_3}$. Prema Gibbs-ovim obrascima, dokazanim u zadatku 1.25, to znači da su trijedri

$$\nabla q_1, \nabla q_2, \nabla q_3 \quad \text{i} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_2}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_3}$$

uzajamno recipročni, tako da se kao poseban slučaj relacije (4.41) nalazi:

$$\mathcal{E} = \left\{\nabla q_k, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_k}\right\} = \left\{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_k}, \nabla q_k\right\},$$

što je i trebalo dokazati

4.15. Ako je $\mathcal{T} = \{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\}$ dati tenzor, njegov inverzni tenzor će, prema (4.43) biti $\mathcal{T}^{-1} = \{\mathbf{e}_k, \mathbf{T}_k^{-1}\}$, dok će konjugovani tenzor ovoga poslednjeg biti dat izrazom (*R.* 4.8):

$$(\mathcal{T}^{-1})^* = \{\mathbf{T}_k^{-1}, \mathbf{e}_k\}.$$

Umesto da tražimo skalarne invarijante tenzora $\mathcal{T}^{-1}$, možemo tražiti skalarne invarijante tenzora $(\mathcal{T}^{-1})^*$, jer su one, prema rezultatima zadatka 4.9, međusobno jednake. Rad sa tenzorom $(\mathcal{T}^{-1})^*$ ima to preimućstvo, da su njegovi konsekventi jedinični vektori koordinatnih osa, pa su neposredno primenljive formule za izračunavanje skalarnih invarijanti, date u tekstu. Dakle:

$$S_1^{-1} = \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{T}_1^{-1} + \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{T}_2^{-1} + \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{T}_3^{-1} =$$
$$= \mathbf{e}_1\cdot\frac{\mathbf{T}_2\times\mathbf{T}_3}{\mathbf{T}_1\cdot(\mathbf{T}_2\times\mathbf{T}_3)} + \mathbf{e}_2\cdot\frac{\mathbf{T}_3\times\mathbf{T}_1}{\mathbf{T}_1\cdot(\mathbf{T}_2\times\mathbf{T}_3)} + \mathbf{e}_3\cdot\frac{\mathbf{T}_1\times\mathbf{T}_2}{\mathbf{T}_1\cdot(\mathbf{T}_2\times\mathbf{T}_3)} =$$
$$= \frac{1}{S_3}[\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{T}_2\times\mathbf{T}_3) + \mathbf{e}_2\cdot(\mathbf{T}_3\times\mathbf{T}_1) + \mathbf{e}_3\cdot(\mathbf{T}_1\times\mathbf{T}_2)] = \frac{S_2}{S_3};$$

u ovom dokazivanju su najpre vektori recipročnog trijedra napisani eksplicitno (v. zadatak 1.25.), a zatim su uzete u obzir definicije druge i treće skalarne invarijante.

Da je $S_3^{-1} = \frac{1}{S_3}$, sledi iz jednačine (4.42) i rezultata zadatka 4.11. Zaista,

$$\mathcal{T}^{-1}\cdot\mathcal{T} = \mathcal{E} \Rightarrow \det\mathcal{T}^{-1}\cdot\det\mathcal{T} = \det\mathcal{E} = 1,$$

tako da je:

$$S_3^{-1}\cdot S_3 = 1,$$

što je i trebalo pokazati.

Nađimo još drugu skalarnu invarijantu inverznog tenzora. Prema (4.19) možemo pisati:

$$S_2^{-1} = \mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{T}_2^{-1}\times\mathbf{T}_3^{-1}) + \mathbf{e}_2\cdot(\mathbf{T}_3^{-1}\times\mathbf{T}_1^{-1}) + \mathbf{e}_3\cdot(\mathbf{T}_1^{-1}\times\mathbf{T}_2^{-1}).$$

Uočimo da je, prema rezultatima zadatka 1.25,

$$\mathbf{T}_1 = \frac{\mathbf{T}_2^{-1}\times\mathbf{T}_3^{-1}}{\mathbf{T}_1^{-1}\cdot(\mathbf{T}_2^{-1}\times\mathbf{T}_3^{-1})} = \frac{1}{S_3^{-1}}(\mathbf{T}_2^{-1}\times\mathbf{T}_3^{-1}) = S_3(\mathbf{T}_2^{-1}\times\mathbf{T}_3^{-1}),$$

tj.

$$\mathbf{T}_2^{-1}\times\mathbf{T}_3^{-1} = \frac{1}{S_3}\mathbf{T}_1,$$

i slično za druge dve ciklične permutacije indeksa. Tako nalazimo:

$$S_2^{-1} = \frac{1}{S_3}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{T}_1 + \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{T}_2 + \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{T}_3) = \frac{S_1}{S_3}.$$

4.16. Prema opštoj definiciji prostornog izvoda (2.66), možemo napisati sledeći izraz za prostorni izvod vektorske funkcije u odnosu na operaciju dijadskog množenja:

$$\mathcal{T} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_{\Delta S}\{d\mathbf{S}, \mathbf{A}\}}{\Delta V},$$

gde je $\mathcal{T}$ neki tenzor, pošto podintegralni izraz očevidno ima tenzorsku prirodu. Neka je $\mathbf{C}$ proizvoljan i konstantan vektor. Pomoću njega možemo dalje pisati:

$$\mathcal{T}\cdot\mathbf{C}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_{\Delta S}\{d\mathbf{S},\ \mathbf{A}\}\cdot\mathbf{C}}{\Delta V}=$$

$$=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_{\Delta S}d\mathbf{S}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})}{\Delta V}=$$

$$=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\int_{\Delta V}\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,dV}{\Delta V}=$$

$$=\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})=\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})=\{\nabla,\ \mathbf{A}\}\cdot\mathbf{C};$$

odavde, zbog proizvoljnosti vektora $\mathbf{C}$, izlazi $\mathcal{T}=\{\nabla,\ \mathbf{A}\}$, što i predstavlja traženi rezultat.

5. TENZORI I MATRICE

5.1. Neka su A, B i C tri matrice, tipa $m\times n$, $n\times p$ i $p\times q$ respektivno, tako da su definisani proizvodi $D'=(AB)C$ i $D''=A(BC)$. Prema pravilu matričnog množenja (5.7), za matrične elemente ovih poslednjih nalazimo:

$$(D')_{ij}=(AB)_{ik}C_{kj}=A_{il}B_{lk}C_{kj},$$

$$(D'')_{ij}=A_{ik}(BC)_{kj}=A_{ik}B_{kl}C_{lj},$$

pa, pošto se oznake indeksa po kojima se vrši sumiranje mogu menjati, odavde neposredno vidimo da je $(AB)C=A(BC)$, tj. da je matrično množenje asocijativno.

5.2. Neposrednim množenjem po pravilu (5.7) nalazimo:

$$A_1A_1=A_2A_2=A_3A_3=I,$$

$$A_1A_2=A_2A_1=A_3,$$

$$A_1A_3=A_3A_1=A_2$$

$$A_2A_3=A_3A_2=A_1.$$

5.3. Obrazujmo proizvode AB i BA dveju kvadratnih matrica trećeg reda, uzimajući u obzir da je prva matrica dijagonalna:

$$AB=\begin{pmatrix}a_{11}&0&0\\0&a_{22}&0\\0&0&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}&a_{11}b_{12}&a_{11}b_{13}\\a_{22}b_{21}&b_{22}b_{22}&a_{22}b_{23}\\a_{33}b_{31}&a_{33}b_{32}&a_{33}b_{33}\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&0&0\\0&a_{22}&0\\0&0&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}&a_{22}b_{12}&a_{33}b_{13}\\a_{11}b_{21}&a_{22}b_{22}&a_{33}b_{23}\\a_{11}b_{31}&a_{22}b_{32}&a_{33}b_{33}\end{pmatrix}.$$

Prema zadatku je $AB=BA$, jer matrice komutiraju, tako da matrični elementi dobijenih matrica moraju biti jednaki. Dijagonalni elementi to očevidno jesu. Izjednačavanjem nedijagonalnih elemenata matrica AB i BA lako zaključujemo da nedijagonalni elementi matrice B moraju biti jednaki nuli. Zaista, uporedimo li, na primer, elemente prve vrste i druge kolone matrica AB i BA dolazimo

do uslova $a_{11} b_{12} = a_{22} b_{12}$, odnosno $(a_{11} - a_{22}) b_{12} = 0$. Pošto su elementi matrice A međusobno različiti, odavde proizilazi $b_{12} = 0$, tj. matrica B je dijagonalna.

Dokaz je istovetan za kvadratne matrice bilo kog reda.

5.4. Ako su A i B nesingularne matrice i važi $AB = I$, množenjem sa A^{-1} sleva, na osnovu asocijativnosti izlazi $A^{-1}AB = A^{-1}I$ ili $B = A^{-1}$, a odavde se neposredno dobija $BA = A^{-1}A = I$. Dakle, $AB = BA = I$

5.5. Navedeni odnosi se dobijaju direktno na osnovu pravila matričnog množenja (5.7).

5.6. Pošto je matrica A nesingularna, postoji inverzna matrica A^{-1}. Množenjem sa ovom poslednjom, zadana relacija se može napisati u ekvivalentnom obliku

$$A = A^{-1}.$$

Prema tome, ako je (a) A simetrična matrica, tj. $A = \tilde{A}$, iz gornje relacije izlazi i $\tilde{A} = A^{-1}$, tj. ona je ortogonalna; (b) A ortogonalna matrica, tj. $\tilde{A} = A^{-1}$, dobija se $A = \tilde{A}$ tj. ona je onda i simetrična.

5.7. Dokažimo najpre da važe zadane relacije:

$$\widetilde{(AB)} = \tilde{B}\tilde{A}, \tag{R.5.1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{R.5.2}$$

tj. da je transponovana (odn. inverzna) matrica proizvoda dve matrice jednaka proizvodu transponovanih (odn. inverznih) matrica u obrnutom redosledu. Dokaz prve proizilazi iz sledećeg niza jednakosti:

$$\widetilde{(AB)}_{ij} = (AB)_{ji} = a_{jk} b_{ki} = \tilde{b}_{ik} \tilde{a}_{kj} = (\tilde{B}\tilde{A})_{ij},$$

dok se dokaz druge dobija polazeći od uslova $(AB)(AB)^{-1} = I$ i množeći sleva najpre A^{-1} a zatim sa B^{-1}.

Dakle, ako su U i V dve ortogonalne matrice, tako da je $\tilde{U} = U^{-1}$ i $\tilde{V} = V^{-1}$, množenjem nalazimo:

$$\tilde{V}\tilde{U} = V^{-1}U^{-1} \Rightarrow \widetilde{(UV)} = (UV)^{-1},$$

$$\tilde{U}\tilde{V} = U^{-1}V^{-1} \Rightarrow \widetilde{(VU)} = (VU)^{-1},$$

tj. proizvod dve ortogonalne matrice u bilo kom redosledu je ortogonalna matrica. Zapazimo da proizvod dve simetrične (antisimetrične) matrice *ne mora*, u opštem slučaju, biti simetrična (antisimetrična) matrica (v. i zadatak 5.17). Na osnovu relacije (R. 5.1) se može videti kad će ovaj proizvod biti simetričan (antisimetričan).

5.8. Označimo $B = A\tilde{A}$ i $C = \tilde{A}A$; B i C su kvadratne matrice (ne nužno istog reda). Za matrične elemente prve imamo:

$$b_{ij} = (A\tilde{A})_{ij} = a_{ik} \tilde{a}_{kj} = a_{ik} a_{jk},$$

$$b_{ji} = (A\tilde{A})_{ji} = a_{jk} \tilde{a}_{ki} = a_{jk} a_{ik},$$

odakle se odmah vidi da je ona simetrična. Na isti način se dokazuje i simetričnost matrice C. S druge strane,

$$tr\,B = tr\,(A\tilde{A}) = b_{ii} = a_{ik} \tilde{a}_{ki} = a_{ik} a_{ik},$$

$$tr\,C = tr\,(\tilde{A}A) = c_{ii} = \tilde{a}_{ik} a_{ki} = a_{ki} a_{ki},$$

pri čemu se podrazumeva sumiranje po oba indeksa. Dakle, $tr\,B = tr\,C$, što i trebalo pokazati.

5.9. Na osnovu zadanog oblika matrice A imamo:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & 0 \end{pmatrix},$$

tako da je:

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta & -\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi\cos\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

nezavisno od vrednosti uglova θ i φ, kao što je trebalo pokazati. S druge strane,

$$\tilde{A}A = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi & \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi & \sin\theta\cos\theta\cos\varphi \\ \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi & \sin\theta\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\theta\sin\varphi & \cos^2\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \cos^2\theta\cos^2\varphi & -\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi & \sin\theta\cos\theta\cos\varphi \\ -\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi & 1 - \cos^2\theta\sin^2\varphi & \sin\theta\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\theta\sin\varphi & \cos^2\theta \end{pmatrix};$$

zadnji oblik posmatrane matrice se dobija primenom elementarnih trigonometrijskih identiteta. Kao što se vidi, matrica $B = \tilde{A}A$ nije u opštem slučaju

jedinična $\left(\text{ona bi bila jedinična za neke konkretne vrednosti } \theta \text{ i } \varphi, \text{ na primer za } \theta=\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$. Da je ova matrica idempotentna, sledi iz asocijativnosti matričnog množenja i činjenice da je $A\tilde{A}=I$, kao što se vidi iz sledećih jednakosti:

$$BB=(\tilde{A}A)(\tilde{A}A)=\tilde{A}(A\tilde{A})A=\tilde{A}IA=\tilde{A}(IA)=\tilde{A}A=B.$$

5.10. Na osnovu definicije komutatora (5.8), imaćemo neposredno:

$$\begin{aligned}[A,[B,C]] &= A[B,C]-[B,C]A= \\ &= A(BC-CB)-(BC-CB)A= \\ &= ABC-ACB-BCA+CBA,\end{aligned}$$

imajući u vidu nekomutativnost i asocijativnost matričnog množenja. Slično se mogu napisati i preostala dva komutatora, pa sabiranjem proveriti da je rezultat nulta matrica. Ovo se ostavlja za samostalnu vežbu čitaocu.

5.11. Ako su S i A simetrična i antisimetrična kvadratna matrica respektivno ($\tilde{S}=S$, $\tilde{A}=-A$), i ako su $B=SA-AS$ i $C=SA+AS$ njihov komutator i antikomutator respektivno, onda ćemo imati:

$$\begin{aligned}\tilde{B} &= (\widetilde{SA-AS})=(\widetilde{SA})-(\widetilde{AS})=\tilde{A}\tilde{S}-\tilde{S}\tilde{A}= \\ &= -AS+SA=B, \\ \tilde{C} &= (\widetilde{SA+AS})=(\widetilde{SA})+(\widetilde{AS})=\tilde{A}\tilde{S}+\tilde{S}\tilde{A}= \\ &= -AS-SA=-C;\end{aligned}$$

u gornjem dokazu je, pored rezultata (R. 5.1) za transponovanje proizvoda, iskorišćena još i očevidna osobina da je transponovani zbir matrica jednak zbiru transponovanih matrica.

5.12. U prvom slučaju treba odrediti ξ_1, ξ_2, ξ_3 i λ tako da bude:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \zeta_3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix},$$

što se svodi na sledeći sistem od tri homogene linearne jednačine prvog stepena:

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\,\xi_1 \qquad\qquad &= 0, \\ (1-\lambda)\,\xi_2+\xi_3 &= 0, \qquad (R.\ 5.3) \\ \xi_2+(1-\lambda)\,\xi_3 &= 0.\end{aligned}$$

Ovaj će sistem imati netrivijalnih rešenja, ako mu je determinanta jednaka nuli, što dovodi do jedne kubne jednačine za određivanje λ:

$$\begin{vmatrix}(1-\lambda)&0&0\\0&(1-\lambda)&1\\0&0&(1-\lambda)\end{vmatrix}=(1-\lambda)[(1-\lambda)^2-1]=0, \qquad (R.\ 5.4)$$

tako da su rešenja $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ i $\lambda_3=2$. Za prvo od njih, sistem (R. 5.3) postaje:

$$\begin{aligned}\xi_1^{(1)}&=0,\\ \xi_2^{(1)}+\xi_3^{(1)}&=0,\\ \xi_2^{(1)}+\xi_3^{(1)}&=0,\end{aligned}$$

odakle čitamo da je $\xi_1^{(1)}=0$, $\xi_2^{(1)}$ je proizvoljno, a $\xi_3^{(1)}=-\xi_2^{(1)}$. Postupajući analogo za ostale dve svojstvene vrednosti, dobijamo $\xi_1^{(2)}$ proizvoljno, $\xi_2^{(2)}=-\xi_3^{(2)}=0$ i $\xi_1^{(3)}=0$, $\xi_2^{(3)}$ proizvoljno, $\xi_3^{(3)}=\xi_2^{(3)}$. Dakle, svojstveni elementi su:

$$X^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\ \xi_2^{(1)}\\ -\xi_2^{(1)}\end{pmatrix},\quad X^{(2)}=\begin{pmatrix}\xi_1^{(2)}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad X^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\ \xi_2^{(3)}\\ \xi_2^{(3)}\end{pmatrix};$$

u svakom je po jedan koeficijent ostao proizvoljan. Nađeni rezultat bismo mogli napisati i kao:

$$X^{(1)}=\alpha^{(1)}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad X^{(2)}=\alpha^{(2)}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad X^{(3)}=\alpha^{(3)}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

označavajući proizvoljne koeficijente sa $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ i imajući u vidu pravilo množenja matrice skalarom.

Pređimo sad na drugi slučaj, kada je matrica X tipa 3×2. Treba, dakle, rešiti jednačinu karakterističnog problema:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_{11}&\xi_{12}\\ \xi_{21}&\xi_{22}\\ \xi_{31}&\xi_{32}\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\xi_{11}&\xi_{12}\\ \xi_{21}&\xi_{22}\\ \xi_{31}&\xi_{32}\end{pmatrix}.$$

Nakon množenja u skladu sa pravilima (5.7) i (5.6), dobijena matrična jednačina se, prema (5.3), svodi na šest linearnih algebarskih jednačina po nepoznatim komponentama ξ_{ij}. Ovih šest jednačina se razdvaja na sledeća dva sistema od po tri jednačine:

$$\left.\begin{aligned}(1-\lambda)\,\xi_{11} \qquad\qquad &= 0\\ (1-\lambda)\,\xi_{21}+\xi_{31} &= 0\\ \xi_{21}+(1-\lambda)\,\xi_{31} &= 0\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned}(1-\lambda)\,\xi_{12} \qquad\qquad &= 0\\ (1-\lambda)\,\xi_{22}+\xi_{32} &= 0\\ \xi_{22}+(1-\lambda)\,\xi_{32} &= 0\end{aligned}\right\}.$$

Oba sistema su homogena i imaju istu determinantu. Prema tome, oba će istovremeno imati netrivijalna rešenja, ako je ta determinanta jednaka nuli. Ova determinanta se poklapa sa (*R.* 5.4), što znači da su i u ovom slučaju svojstvene vrednosti $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ i $\lambda_3=2$. Unoseći ih u gornje jednačine nalazimo sledeće svojstvene matrice:

$$X^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \xi_{21}^{(1)} & \xi_{22}^{(1)}\\ -\xi_{21}^{(1)} & -\xi_{22}^{(1)}\end{pmatrix},\qquad X^{(2)}=\begin{pmatrix}\xi_{11}^{(2)} & \xi_{12}^{(2)}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad X^{(3)}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \xi_{21}^{(3)} & \xi_{22}^{(3)}\\ \xi_{21}^{(3)} & \xi_{22}^{(3)}\end{pmatrix};$$

u svakoj od njih *po dva koeficijenta* ostaju proizvoljni.

Najzad treći slučaj je potpuno analog. Matrična jednačina

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} & \xi_{14}\\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} & \xi_{24}\\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} & \xi_{34}\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\xi_{11} & \zeta_{12} & \xi_{13} & \xi_{14}\\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} & \xi_{24}\\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} & \xi_{34}\end{pmatrix}$$

se svodi na dvanaest linearnih i homogenih algebarskih jednačina, koje se grupišu u četiri sistema po tri jednačine po nepoznatim veličinama koje stoje u pojedinim kolonama tražene matrice. Sva četiri sistema imaju istu determinantu, istovetnu sa (*R.* 5.4), tj. imaju netrivijalna rešenja svi istovremeno, i to za $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ i $\lambda_3=2$. Svojstvene matrice će biti:

$$X^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ \xi_{21}^{(1)} & \xi_{22}^{(1)} & \xi_{23}^{(1)} & \xi_{24}^{(1)}\\ \xi_{21}^{(1)} & -\xi_{22}^{(1)} & -\xi_{23}^{(1)} & -\xi_{24}^{(1)}\end{pmatrix},\qquad X^{(2)}=\begin{pmatrix}\xi_{11}^{(2)} & \xi_{12}^{(2)} & \xi_{13}^{(2)} & \xi_{14}^{(2)}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$X^{(3)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ \xi_{21}^{(3)} & \xi_{22}^{(3)} & \xi_{23}^{(3)} & \xi_{24}^{(3)}\\ \xi_{21}^{(3)} & \xi_{22}^{(3)} & \xi_{23}^{(3)} & \xi_{24}^{(3)}\end{pmatrix},$$

pri čemu u svakoj ostaju proizvoljna *po četiri elementa.*

5.13. Razvijanjem naznačenih višestrukih vektorskih proizvoda i sređivanjem rezultata po komponentama vektora **A**, dobijaju se sledeći rezultati:

$$\mathcal{T}^{(a)}=\begin{pmatrix}a_1 b_1-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & a_2 b_1 & a_3 b_1\\ a_1 b_2 & a_2 b_2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & a_3 b_2\\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{T}^{(b)}=\begin{pmatrix}a_1^2 b^2-a_1 b_1(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) & a_1 a_2 b^2-a_1 b_2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) & a_1 a_3 b^2-a_1 b_3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\\ a_2 a_1 b^2-a_2 b_1(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) & a_2^2 b^2-a_2 b_2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) & a_2 a_3 b^2-a_2 b_3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\\ a_3 a_1 b^2-a_3 b_1(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) & a_3 a_2 b^2-a_3 b_2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) & a_3^2 b^2-a_3 b_3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{T}^{(c)}=\begin{pmatrix}-b_1(a_2 b_3-a_3 b_2) & -b_1(a_3 b_1-a_1 b_3) & -b_1(a_1 b_2-a_2 b_1)\\ -b_2(a_2 b_3-a_3 b_2) & -b_2(a_3 b_1-a_1 b_3) & -b_2(a_1 b_2-a_2 b_1)\\ -b_3(a_2 b_3-a_3 b_2) & -b_3(a_3 b_1-a_1 b_3) & -b_3(a_1 b_2-a_2 b_1)\end{pmatrix},$$

gde je gornjim indeksom u zagradi označeno koji se tenzor odnosi na koji od zadanih slučajeva. Da bi nađeni tenzori bili simetrični, tj. da bi simetrično raspoređeni nedijagonalni elementi bili jednaki, treba da bude: (*a*) i (*b*) vektori **a** i **b** kolinearni, (*c*) vektori **b** i $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ kolinearni, tj. $\mathbf{b}=0$ (u tom slučaju je i $\mathcal{T}^{(c)}$ nulti tenzor).

5.14. Iz zadanog oblika tenzora $\mathcal{T}$ čitamo da su njegovi koordinatni vektori:

$$\mathbf{T}_1=2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{T}_2=\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{T}_3=2\mathbf{e}_3,$$

tako da se za vektore recipročnog trijedra, na osnovu formula iz zadatka 1.25. nalazi:

$$\mathbf{T}_1^{-1}=\frac{\mathbf{T}_2\times\mathbf{T}_3}{\mathbf{T}_1\cdot(\mathbf{T}_2\times\mathbf{T}_3)}=\frac{6\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2}{10},$$
$$\mathbf{T}_2^{-1}=\frac{\mathbf{T}_3\times\mathbf{T}_1}{\mathbf{T}_1\cdot(\mathbf{T}_2\times\mathbf{T}_3)}=\frac{-2\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2}{10},$$
$$\mathbf{T}_3^{-1}=\frac{\mathbf{T}_1\times\mathbf{T}_2}{\mathbf{T}_1\cdot(\mathbf{T}_2\times\mathbf{T}_3)}=\frac{3\mathbf{e}_1-6\mathbf{e}_2+5\mathbf{e}_3}{10}.$$

Obrazac (5.37) sada daje:

$$\mathbf{V}_1=\mathcal{T}\cdot\mathbf{T}_1^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{10}(10\mathbf{e}_1-6\mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{V}_2=\mathcal{T}\cdot\mathbf{T}_2^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{10}(10\mathbf{e}_2+12\mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{V}_3=\mathcal{T}\cdot\mathbf{T}_3^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3\\ -6\\ 5\end{pmatrix}=\frac{1}{10}(-15\mathbf{e}_2-8\mathbf{e}_3).$$

To su vektori koje dati tenzor pridružuje vektorima recipročnog trijedra svojih koordinatnih vektora.

5.15. Ukoliko je tenzor $\mathcal{T}$ *nesingularan*, postoji inverzni tenzor $\mathcal{T}^{-1}$, pa se zadana jednačina može prepisati kao $\mathcal{X}=\mathcal{T}^{-1}\cdot\mathcal{U}$, čime je traženi tenzor $\mathcal{X}$

određen *jednoznačno*. Ukoliko je, tenzor $\mathcal{T}$ *singularan*, onda tenzor $\mathcal{X}$ *ili ne postoji ili nije jednoznačno određen*, što će zavisiti od toga da li je tenzor $\mathcal{U}$ nesingularan ili singularan. Naime, proizvod singularnog tenzora $\mathcal{T}$ i ma kakvog tenzora $\mathcal{X}$ je singularan tenzor (to sledi iz zadatka 4.11), pa jednakost $\mathcal{T}\cdot\mathcal{X}=\mathcal{U}$ ne može postojati ako i $\mathcal{U}$ nije singularan.

U slučaju (*a*) tenzor $\mathcal{T}$ nije singularan ($\det\mathcal{T}=22$), što znači da se, nalaženjem inverznog tenzora može $\mathcal{X}$ odrediti jednoznačno. U slučajevima (*b*) i (*c*), tenzor $\mathcal{T}$ je singularan, ali je $\mathcal{U}$ singularan samo u slučaju (*b*), dok je u slučaju (*c*) $\det\mathcal{U}=2$. Prema tome, odmah možemo tvrditi da *u slučaju* (*c*) *rešenje ne postoji*. Razmotrimo preostala dva slučaja ponaosob.

(*a*) Inverznom tenzoru odgovara inverzna matrica, koju možemo naći prema (5.14). Rezultat je:

$$\mathcal{T}^{-1}=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-4 & 14 & -8\\ 2 & 4 & 4\\ 5 & -1 & -1\end{pmatrix},$$

tako da se za traženi tenzor dobija:

$$\mathcal{X}=\mathcal{T}^{-1}\cdot\mathcal{U}=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-4 & 14 & -8\\ 2 & 4 & 4\\ 5 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-30 & 16 & -34\\ 4 & 14 & 6\\ 21 & 13 & 4\end{pmatrix}.$$

(b) Matrične elemente traženog tenzora označimo sa x_{ij}, pa zadanu tenzorsku jednačinu prepišimo u obliku:

$$\begin{pmatrix}3 & 8 & -1\\ 6 & 5 & 4\\ 0 & -11 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 5\\ -7 & -2 & 17\\ -11 & -6 & 7\end{pmatrix}.$$

Nakon matričnog množenja po pravilu (5.7) i izjednačavanja korespondentnih elemenata dobijenih matrica, rezultira jedan sistem od devet linearnih algebarskih jednačina po nepoznatim koeficijentima x_{ij}. Ovaj se sistem raspada na tri sistema po tri jednačine sa nepoznatim elementima pojedinih kolona matrice $\mathcal{X}$, oblika:

$$\left.\begin{aligned}3x_{11}+8x_{21}-x_{31}&=2\\ 6x_{11}+5x_{21}+4x_{31}&=-7\\ -11x_{21}+6x_{31}&=-11\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}3x_{12}+8x_{22}-x_{32}&=2\\ 6x_{12}+5x_{22}+4x_{32}&=-2\\ -11x_{22}+6x_{32}&=-6\end{aligned}\right\}, \qquad (R.\ 5.5)$$

$$\left.\begin{aligned}3x_{13}+8x_{23}-x_{33}&=5\\ 6x_{13}+5x_{23}+4x_{33}&=17\\ -11x_{23}+6x_{33}&=7\end{aligned}\right\}.$$

Sva ova tri sistema imaju istu determinantu, koja se poklapa sa $\det\mathcal{T}$, i koja je jednaka nuli. Uz to, u sva tri slučaja ako se prva jednačina pomnoži sa -2 i doda drugoj, dobija se treća. Dakle, svaki od gornja tri sistema je *neodređen*, jer je jedna jednačina posledica grugih dveju. Ostavljajući x_{31}, x_{32} i x_{33} proizvoljnim i odbacujući u svakom sistemu po jednu jednačinu, možemo naći preostale dve nepoznate. Konačan rezultat je oblika:

$$\mathcal{X}=\begin{pmatrix}-2-\dfrac{37}{33}x_{31} & -\dfrac{26}{33}-\dfrac{37}{33}x_{32} & \dfrac{111}{33}-\dfrac{37}{33}x_{33}\\ 1+\dfrac{6}{11}x_{31} & \dfrac{6}{11}+\dfrac{6}{11}x_{32} & -\dfrac{7}{11}+\dfrac{6}{11}x_{33}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}$$

Napomena: Da smo ovaj postupak primenili u slučaju (*c*), sistemi jednačina koji odgovaraju (*R.* 5.5) bi bili *protivrečni*.

5.16. Postupak je isti kao u zadatku 5.12. pod (*a*). Stoga navodimo samo rezultate, zadržavajući sve oznake iz pomenutog zadatka.

(a) $\lambda_1=0,\quad \lambda_2=1,\quad \lambda_3=2;$

$$\mathbf{X}^{(1)}=\alpha^{(1)}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{X}^{(2)}=\alpha^{(2)}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{X}^{(3)}=\alpha^{(3)}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

(b) $\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=1,\quad \lambda_3=2;$

$$\mathbf{X}^{(1)}=\alpha^{(1)}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{X}^{(2)}=\alpha^{(2)}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{X}^{(3)}=\alpha^{(3)}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

(c) $\lambda_1=0,\quad \lambda_{2,3}=2;$

$$\mathbf{X}^{(1)}=\alpha^{(1)}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix};\qquad \mathbf{X}^{(2,3)}=\begin{pmatrix}\alpha^{(2)}\\ \alpha^{(3)}\\ \alpha^{(3)}\end{pmatrix};$$

u ovom slučaju je druga svojstvena vrednost degenerisana, tako da njoj odgovara beskonačno mnogo svojstvenih vektora (pravaca) koji se dobijaju proizvoljnim i uzajamno nezavisnim izborom parametara $\alpha^{(2)}$ i $\alpha^{(3)}$. Pri tom ih treba tako odabrati da se dobiju dva uzajamno ortogonalna svojstvena vektora. U posmatranom slučaju to se može učiniti, ako se uzme $\alpha_1^{(2)}=1$, $\alpha_1^{(3)}=0$, $\alpha_2^{(2)}=0$, $\alpha_2^{(3)}=1$ ili $\alpha_1^{(2)}=1$, $\alpha_1^{(3)}=1$ i $\alpha_2^{(2)}=-2$, $\alpha_2^{(3)}=1$; u oba slučaja se dobija po jedan par uzajamno ortogonalnih vektora:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \text{odn.} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Ovo, razume se, nisu jedine mogućnosti.

(d) $\lambda_1 = -\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \sqrt{2}$;

$$\mathbf{X}^{(1)} = \alpha^{(1)}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(2)} = \alpha^{(2)}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(3)} = \alpha^{(3)}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix},$$

(e) $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 5$;

$$\mathbf{X}^{(1)} = \alpha^{(1)}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(2)} = \alpha^{(2)}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(3)} = \alpha^{(3)}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}.$$

Poslednja dva tenzora imaju iste svojstvene pravce a različite svojstvene vrednosti; takvi tenzori uvek komutiraju, kao što je dokazano u tekstu.

5.17. Označimo ove tenzore sa $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$, pa nađimo najpre njihov antikomutator. Prema pravilu za množenje matrica imaćemo:

$$\mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{T}_2 \cdot \mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&0&1\end{pmatrix};$$

ovaj primer pokazuje da *proizvod dva simetrična tenzora ne mora biti simetričan tenzor* (kad će to biti slučaj?). Formirajmo sada antikomutator na osnovu formule (5.8):

$$\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\} = \mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2 \cdot \mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix}2&1&2\\1&4&1\\2&1&2\end{pmatrix}.$$

Karakteristična jednačina (5.44) u ovom konkretnom slučaju postaje:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 2\\ 1 & 4-\lambda & 1\\ 2 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = 0,$$

odnosno, nakon razvijanja i sređivanja:

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 14\lambda = 0.$$

Rešavanje ove jednačine je elementarno, i rešenja su $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4-\sqrt{2}$ i $\lambda_3 = 4+\sqrt{2}$. Njima pripadajući svojstveni vektori dobijaju se kao u prethodn[...] zadatku. Rezultat je:

$$\mathbf{X}^{(1)} = \alpha^{(1)}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(2)} = \alpha^{(2)}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(3)} = \alpha^{(3)}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$$

Nađeni svojstveni pravci su isti kao kod tenzora $\mathcal{T}_2$, što se vidi iz rezult[...] prethodnog zadatka pod (*d*).

5.18. Napišimo najpre matricu ovog tenzora, prikazujući datu linearnu vekt[...]sku funkciju u obliku komponenata (upor. zadatak 5.13.), zatim sastavi[...] karakterističnu jednačinu (5.44) i rešimo je kao u prethodnim zadacima. K[...] rezultat će se dobiti da su svojstvene vrednosti:

$$\lambda_1 = \alpha + \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + p^2, \quad \lambda_2 = \alpha + \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} - p^2, \quad \lambda_3 = \alpha,$$

a odgovarajući svojstveni vektori:

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{p} + \mathbf{q}, \quad \mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{p} - \mathbf{q}, \quad \mathbf{X}^{(3)} = \mathbf{p} \times \mathbf{q}.$$

Čitaocu se preporučuje da, kao dopunsku vežbu, prikaže zadanu vektor[...] funkciju u dijadskom obliku, i da tim putem proveri da su navedeni vekt[...] zaista svojstveni, sa gornjim svojstvenim vrednostima.

5.19. Iz zadanog oblika tenzora lako nalazimo njegove skalarne invarija[...] pročitavši prethodno koordinatne vektore. One iznose:

$$S_1 = 3, \quad S_2 = -(\alpha^2+5), \quad S_3 = \alpha^2 - 15.$$

Karakteristična jednačina (5.45) glasi:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - (\alpha^2+5)\lambda - (\alpha^2-15) = 0.$$

Po uslovima zadatka, treba videti da li ona može imati rešenje $\lambda = 3$. Stavi[...] li u nju $\lambda = 3$ i sredimo, dobićemo $\alpha = 0$. Prema tome, odgovor na pita[...] postavljeno u zadatku je potvrdan. Tenzor koji nas interesuje ima oblik:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&0\\2&0&1\end{pmatrix}.$$

i njegova karakteristična jednačina je:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda + 15 = 0,$$

tako da su svojstvene vrednosti (dobijena kubna jednačina se lako rešava, kad znamo da je jedna koren $\lambda = 3$) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \sqrt{5}$ i $\lambda_3 = -\sqrt{5}$. Njima odgovaraju sledeći svojstveni vektori:

$$\mathbf{X}^{(1)} = \alpha^{(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}^{(2)} = \alpha^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}^{(3)} = \alpha^{(3)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix}.$$

5.20. Pošto je tenzor $\mathcal{T}$ simetričan, on ima tri uzajamno normalna svojstvena pravca, čije ćemo jedinične vektore ovde označiti sa $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$ i $\vec{\varepsilon}_3$, i tri realne svojstvene vrednosti, λ_1, λ_2 i λ_3. Proizvoljan vektor $\mathbf{A}$ možemo razložiti na komponente duž pomenutih svojstvenih pravaca:

$$\mathbf{A} = a_1 \vec{\varepsilon}_1 + a_2 \vec{\varepsilon}_2 + a_3 \vec{\varepsilon}_3.$$

Očevidno imamo:

$$\mathcal{T} \cdot \mathbf{A} = \mathcal{T} \cdot (a_1 \vec{\varepsilon}_1 + a_2 \vec{\varepsilon}_2 + a_3 \vec{\varepsilon}_3) = \mathcal{T} \cdot (a_1 \vec{\varepsilon}_1) + \mathcal{T} \cdot (a_2 \vec{\varepsilon}_2) + \mathcal{T} \cdot (a_3 \vec{\varepsilon}_3) =$$

$$= a_1 \mathcal{T} \cdot \vec{\varepsilon}_1 + a_2 \mathcal{T} \cdot \vec{\varepsilon}_2 + a_3 \mathcal{T} \cdot \vec{\varepsilon}_3 = a_1 \lambda_1 \vec{\varepsilon}_1 + a_2 \lambda_2 \vec{\varepsilon}_2 + a_3 \lambda_3 \vec{\varepsilon}_3.$$

Ponavljajući isti postupak nalazimo i:

$$\mathcal{T}^2 \mathbf{A} = \mathcal{T} \cdot (\mathcal{T} \mathbf{A}) = \mathcal{T} \cdot (a_1 \lambda_1 \vec{\varepsilon}_1 + a_2 \lambda_2 \vec{\varepsilon}_2 + a_3 \lambda_3 \vec{\varepsilon}_3) =$$

$$= a_1 \lambda_1^2 \vec{\varepsilon}_1 + a_2 \lambda_2^2 \vec{\varepsilon}_2 + a_3 \lambda_3^2 \vec{\varepsilon}_3,$$

$$\mathcal{T}^3 \cdot \mathbf{A} = a_1 \lambda_1^3 \vec{\varepsilon}_1 + a_2 \lambda_2^3 \vec{\varepsilon}_2 + a_3 \lambda_3^3 \vec{\varepsilon}_3 =$$

$$= a_1 (S_1 \lambda_1^2 - S_2 \lambda_1 + S_3) \vec{\varepsilon}_1 + a_2 (S_1 \lambda_2^2 - S_2 \lambda_2 + S_3) \vec{\varepsilon}_2 + a_3 (S_1 \lambda_3^2 - S_2 \lambda_3 + S_3) \vec{\varepsilon}_3.$$

Poslednja jednakost se dobija kad se kubovi svojstvenih vrednosti izraze na osnovu karakteristične jednačine (5.45). Pregrupisavanjem članova nalazimo:

$$\mathcal{T}^3 \cdot \mathbf{A} = S_1 (a_1 \lambda_1^2 \vec{\varepsilon}_1 + a_2 \lambda_2^2 \vec{\varepsilon}_2 + a_3 \lambda_3^2 \vec{\varepsilon}_3) - S_2 (a_1 \lambda_1 \vec{\varepsilon}_1 + a_2 \lambda_2 \vec{\varepsilon}_2 + a_3 \lambda_3 \vec{\varepsilon}_3) +$$

$$+ S_3 (a_1 \vec{\varepsilon}_1 + a_2 \vec{\varepsilon}_2 + a_3 \vec{\varepsilon}_3) = S_1 \mathcal{T}^2 \cdot \mathbf{A} - S_2 \mathcal{T} \cdot \mathbf{A} + S_3 \mathbf{A} =$$

$$= (S_1 \mathcal{T}^2 - S_2 \mathcal{T} + S_3 \mathcal{E}) \cdot \mathbf{A},$$

odakle zbog proizvoljnosti vektora $\mathbf{A}$ zaključujemo da mora važiti

$$\mathcal{T}^3 = S_1 \mathcal{T}^2 - S_2 \mathcal{T} + S_3 \mathcal{E}, \qquad (R.\ 5.6)$$

što je i trebalo dokazati.

Isti rezultat se može dobiti ako se pođe od normalnog oblika simetričnog tenzora (5.50), koji u oznakama zadatka glasi:

$$\mathcal{T} = \lambda_1 \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_1\} + \lambda_2 \{\vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_2\} + \lambda_3 \{\vec{\varepsilon}_3, \vec{\varepsilon}_3\},$$

pa se obrazuju kvadrat i kub tenzora, množeći dijade po pravilu (4.35) i vodeći pri tom računa da su $\vec{\varepsilon}_i$ uzajamno ortogonalni i jedinični vektori. Tako se nalazi:

$$\mathcal{T}^2 = \lambda_1^2 \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_1\} + \lambda_2^2 \{\vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_2\} + \lambda_3^2 \{\vec{\varepsilon}_3, \vec{\varepsilon}_3\}, \qquad (R.\ 5.7)$$

$$\mathcal{T}^3 = \lambda_1^3 \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_1\} + \lambda_2^3 \{\vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_2\} + \lambda_3^3 \{\vec{\varepsilon}_3, \vec{\varepsilon}_3\},$$

pa ako se u poslednjoj jednačini kubovi svojstvenih vrednosti zamene pomoću (5. 45), odmah se dolazi do rezultata (*R.* 5.6).

Čitaocu se ostavlja da, kao samostalnu vežbu, ispita da li Cayley-Hamilton-ova teorema važi i za tenzore koji nisu simetrični. U tom cilju može se poći od normalnog oblika ma kog tenzora (5.53). Ova teorema *važi* ma za kakav tenzor.

5.21. U datom koordinatnom sistemu, čije ćemo jedinične vektore označiti sa $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ je

$$\mathcal{X}^2 = \alpha \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\} + \beta \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\} + \gamma \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\}$$

simetričan tenzor. To znači da i $\mathcal{X}$ mora biti simetrično, pa upoređivanjem sa prvom od relacija (*R.* 5.7) zaključujemo da mora biti:

$$\mathcal{X} = \pm\sqrt{\alpha} \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\} \pm \sqrt{\beta} \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\} \pm \sqrt{\gamma} \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\}.$$

Birajući znake plus i minus u različitim kombinacijama tako dobijamo sledećih *osam* rešenja date tenzorske jednačine:

$$\mathcal{X}_1 = \sqrt{\alpha} \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\} + \sqrt{\beta} \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\} + \sqrt{\gamma} \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\},$$

$$\mathcal{X}_2 = -\sqrt{\alpha} \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\} + \sqrt{\beta} \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\} + \sqrt{\gamma} \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\},$$

$$\mathcal{X}_3 = \sqrt{\alpha} \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\} - \sqrt{\beta} \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\} + \sqrt{\gamma} \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\},$$

$$\mathcal{X}_4 = \sqrt{\alpha} \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\} - \sqrt{\beta} \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\} - \sqrt{\gamma} \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\},$$

$$\mathcal{X}_5 = -\sqrt{\alpha} \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\} - \sqrt{\beta} \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\} + \sqrt{\gamma} \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\},$$

$$\mathcal{X}_6 = -\sqrt{\alpha} \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\} + \sqrt{\beta} \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\} - \sqrt{\gamma} \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\},$$

$$\mathcal{X}_7 = \sqrt{\alpha} \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\} - \sqrt{\beta} \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\} - \sqrt{\gamma} \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\},$$

$$\mathcal{X}_8 = -\sqrt{\alpha} \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\} - \sqrt{\beta} \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\} - \sqrt{\gamma} \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\}.$$

5.22. Treba, dakle, dokazati da je kod unitarnih tenzora $\mathcal{T} \cdot \mathbf{Q} = \lambda \mathbf{Q}$ i treba naći svojstvenu vrednost λ.

Izvedimo o vektoru $\mathcal{T} \cdot \mathbf{Q}$ najpre jedan opšti zaključak, koji može biti od interesa. U tom cilju pođimo od tenzora u obliku (4.14) i od vektorske invarijante $\mathbf{Q}$ u obliku (4.25). Tako dobijamo:

$$\mathcal{T} \cdot \mathbf{Q} = \{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\} \cdot (\mathbf{T}_i \times \mathbf{e}_i) = \mathbf{T}_k [\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{T}_i \times \mathbf{e}_i)] = \mathbf{T}_k [\mathbf{T}_i \cdot (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k)] = \mathbf{T}_k' (e_{ilk} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{T}_i),$$

pri čemu je vektorski proizvod jediničnih vektora prikazan pomoću simbola Levi-Civita, kako je objašnjeno u Glavi 1. Koristeći antisimetričnost ovih simbola možemo pisati:

$$\mathcal{T}\cdot\mathbf{Q}=\frac{1}{2}[\varepsilon_{ijk}\mathbf{T}_k(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{T}_j)-\varepsilon_{ikj}\mathbf{T}_k(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{T}_j)]=$$

$$=\frac{1}{2}[\varepsilon_{ijk}\mathbf{T}_k(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{T}_j)-\varepsilon_{ijk}\mathbf{T}_j(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{T}_k)];$$

u drugoj jednakosti su, u poslednjem članu, izmenjene oznake indeksa po kojima se sumira. Vodeći računa o (1.40), dobijamo:

$$\mathcal{T}\cdot\mathbf{Q}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\mathbf{T}_j\times\mathbf{T}_k)\times\mathbf{e}_i. \qquad (R.\ 5.8)$$

Primenimo ovaj rezultat na unitarni tenzor (4.54), čiji koordinatni vektori obrazuju ortogonalni trijedar jediničnih vektora. U tom slučaju gornja formula (*R*. 5.8) daje:

$$\mathcal{T}\cdot\mathbf{Q}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\mathbf{e}'_j\times\mathbf{e}'_k)\times\mathbf{e}_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\pm\varepsilon_{jlk}\mathbf{e}'_l)\times\mathbf{e}_i\,;$$

znak plus ili minus u vektorskom proizvodu koordinatnih vektora zavisiće od toga da li oni obrazuju desni ili levi trijedar, tj. da li je dati unitarni vektor verzor ili perverzor. Iskoristimo li za proizvod simbola Levi-Civita identitet iz zadatka 1.26. pod (*b*), nalazimo:

$$\mathcal{T}\cdot\mathbf{Q}=\pm\frac{1}{2}\varepsilon_{ljk}\varepsilon_{jik}(\mathbf{e}'_j\times\mathbf{e}_i)=\pm\frac{1}{2}\cdot 2\,\delta_{ij}(\mathbf{e}'_j\times\mathbf{e}_i)=\pm(\mathbf{e}'_i\times\mathbf{e}_i)=\pm\mathbf{Q}.$$

Dakle, kod unitarnih vektora je vektorska invarijanta $\mathbf{Q}$ zaista svojstveni vektor, i to sa svojstvenom vrednošću $+1$ kod verzora i -1 kod perverzora.

5.23. Pođimo od normalnog oblika proizvoljnog tenzora (5.53). Koristeći pravilo za množenje dijada i ortogonalnost vektora $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, i $\mathbf{e}'_3$ kao i vektora $\mathbf{e}''_1$, $\mathbf{e}''_2$ i $\mathbf{e}''_3$, lako dokazujemo da je:

$$\sqrt{\mu_1}\{\mathbf{e}''_1,\mathbf{e}'_1\}=\sqrt{\mu_1}\{\mathbf{e}''_1,\mathbf{e}''_1\}\cdot(\{\mathbf{e}''_1,\mathbf{e}'_1\}+\{\mathbf{e}''_2,\mathbf{e}'_2\}+\{\mathbf{e}''_3,\mathbf{e}'_3\}),$$

jer poslednje dve dijade u zagradi pri množenju daju nulu. Slično je i:

$$\sqrt{\mu_2}\{\mathbf{e}''_2,\mathbf{e}'_2\}=\sqrt{\mu_2}\{\mathbf{e}''_2,\mathbf{e}''_2\}\cdot(\{\mathbf{e}''_1,\mathbf{e}'_1\}+\{\mathbf{e}''_2,\mathbf{e}'_2\}+\{\mathbf{e}''_3,\mathbf{e}'_3\}),$$

$$\sqrt{\mu_3}\{\mathbf{e}''_3,\mathbf{e}'_3\}=\sqrt{\mu_3}\{\mathbf{e}''_3,\mathbf{e}''_3\}\cdot(\{\mathbf{e}''_1,\mathbf{e}'_1\}+\{\mathbf{e}''_2,\mathbf{e}'_2\}+\{\mathbf{e}''_3,\mathbf{e}'_3\}),$$

tako da sabiranjem izlazi.

$$\mathcal{T}=(\sqrt{\mu_1}\{\mathbf{e}''_1,\mathbf{e}''_1\}+\sqrt{\mu_2}\{\mathbf{e}''_2,\mathbf{e}''_2\}+\sqrt{\mu_3}\{\mathbf{e}''_3,\mathbf{e}''_3\})\cdot$$
$$\cdot(\{\mathbf{e}''_1,\mathbf{e}'_1\}+\{\mathbf{e}''_2,\mathbf{e}'_2\}+\{\mathbf{e}''_3,\mathbf{e}'_3\}). \qquad (R.\ 5.9)$$

Prvi množilac predstavlja jedan simetričan tenzor u normalnom obliku (5.50) (antecedenti i konsekventi pripadaju istom trijedru), dok je drugi množilac verzor u obliku (4.54). Gornjom relacijom je tenzor prikazan kao proizvod jednog simetričnog tenzora i jednog verzora.

Ako, s druge strane, pođemo od relacije:

$$\sqrt{\mu_1}\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_1\}=(\{\mathbf{e}''_1,\mathbf{e}'_1\}+\{\mathbf{e}''_2,\mathbf{e}'_2\}+\{\mathbf{e}''_3,\mathbf{e}'_3\})\cdot\sqrt{\mu_1}\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_1\},$$

i još analoge dve, koje ćemo ovog puta izostaviti, sabiranjem dobijamo:

$$\mathcal{T}=(\{\mathbf{e}''_1,\mathbf{e}'_1\}+\{\mathbf{e}''_2,\mathbf{e}'_2\}+\{\mathbf{e}''_3,\mathbf{e}'_3\})\cdot$$
$$\cdot(\sqrt{\mu_1}\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_1\}+\sqrt{\mu_2}\{\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_2\}+\sqrt{\mu_3}\{\mathbf{e}'_3,\mathbf{e}'_3\}). \qquad (R.\ 5.$$

čime je proizvoljan tenzor prikazan u obliku proizvoda jednog verzora i nog simetričnog tenzora. Treba zapaziti da je u oba slučaja verzor isti, simetričan tenzor nije.

Pošto je bilo kojim nesingularnim tenzorom definisana neka afina tr formacija, izlazi da se svaka takva transformacija može interpretirati kao cesija dveju afinih transformacija, od kojih je jedna *čista rotacija* (opis verzorom), a druga je *čista deformacija* (opisana simetričnim tenzorom). Pri pod čistom deformacijom podrazumevamo transformaciju pri kojoj se sv dužina u ma kom od glavnih pravaca produžuje (odn. skraćuje) za fak jednak odgovarajućoj svojstvenoj vrednosti.

5.24. Da bismo dokazali da se prva skalarna invarijanta ne menja pri kakvoj afinoj transformaciji, pođimo od (5.54) i iskoristimo činjenicu da $\mathrm{tr}(\mathcal{U}\cdot\mathcal{V})=\mathrm{tr}(\mathcal{V}\cdot\mathcal{U})$. Ova se osobina lako dokazuje pomoću pravila matrič množenja, imajući u vidu da je trag jednak sumi dijagonalnih elemenata m rice. Dakle:

$$\mathrm{tr}\,\mathcal{T}'=\mathrm{tr}(\mathcal{U}\cdot\mathcal{T}\cdot\mathcal{U}^{-1})=\mathrm{tr}[\mathcal{U}\cdot(\mathcal{T}\cdot\mathcal{U}^{-1})]=\mathrm{tr}[(\mathcal{T}\cdot\mathcal{U}^{-1})\cdot\mathcal{U}]=$$

$$=\mathrm{tr}(\mathcal{T}\cdot\mathcal{U}\cdot\mathcal{U}^{-1})=\mathrm{tr}(\mathcal{T}\cdot\mathcal{E})=\mathrm{tr}\,\mathcal{T}.$$

S druge strane, na osnovu rezultata zadatka 4.11. imamo:

$$\det\mathcal{T}'=\det(\mathcal{U}\cdot\mathcal{T}\cdot\mathcal{U}^{-1})=\det\mathcal{U}\cdot\det\mathcal{T}\cdot\det\mathcal{U}^{-1}=$$

$$=\det(\mathcal{U}\cdot\mathcal{U}^{-1})\cdot\det\mathcal{T}=\det\mathcal{E}\cdot\det\mathcal{T}=\det\mathcal{T},$$

tako da je pokazano da se ni treća skalarna invarijanta ne menja pri kakvoj afinoj transformaciji.

Da bismo ispitali kako stoji stvar sa drugom skalarnom invarijanto posmatraćemo inverzni tenzor $\mathcal{T}^{-1}$ i njegove invarijante $\mathrm{tr}\,\mathcal{T}^{-1}$ i $\det\mathcal{T}^{-1}$. afinim transformacijama one ostaju nepromenjene, kako je pokazano u ov zadatku. No, prema rezultatima zadatka 4.15, njihov količnik nije ništa dr nego druga skalarna invarijanta posmatranog tenzora. Prema tome, i ona ost nepromenjena pri afinim transformacijama.

5.25. Neka je $\mathcal{T}$ simetričan tenzor i $\mathcal{T}'=\mathcal{U}\cdot\mathcal{T}\cdot\mathcal{U}^{-1}$ tenzor dobijen iz nj pri afinoj transformaciji opisanoj tenzorom $\mathcal{U}$. Prema relaciji (4.38) može pisati:

$$(\mathcal{T}')^{*}=[\mathcal{U}\cdot(\mathcal{T}\cdot\mathcal{U}^{-1})]^{*}=(\mathcal{T}\cdot\mathcal{U}^{-1})^{*}\cdot\mathcal{U}^{*}=$$

$$=(\mathcal{U}^{-1})^{*}\cdot\mathcal{T}^{*}\cdot\mathcal{U}^{*}=(\mathcal{U}^{*})^{-1}\cdot\mathcal{T}\cdot\mathcal{U}^{*};$$

poslednji izraz sledi iz činjenice da je tenzor $\mathcal{T}$ po pretpostavci simetričan i okolnosti da su operacije konjugovanja i obrazovanja inverznog tenzora kon

tativne, što je prikazano u zadatku 4.10. Upoređivanjem $(\mathcal{T}')^*$ i $\mathcal{T}'$ zaključujemo da će oni biti jednaki (tenzor $\mathcal{T}'$ simetričan) jedino ako je $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$ [onda će biti i $(\mathcal{U}^*)^{-1} = \mathcal{U}$], tj. ako je afina transformacija *rotacija*. U opštem slučaju, tenzor $\mathcal{T}'$ neće biti simetričan. Sličan zaključak važi i za antisimetrične tenzore.

5.26. Proizvod matrice-kolone (tip 3×1) i matrice vrste (1×3) je kvadratna matrica tipa 3×3, koja se može shvatiti kao neki tenzor. Konkretno,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} (B_1\ B_2\ B_3) = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{pmatrix} = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\},$$

što znači da je zadani način množenja vektora ekvivalentan *dijadskom proizvodu*.

6. TENZORSKA ALGEBRA

6.1. Kao što se iz formule (6.31) neposredno vidi, prve dve veličine jesu tenzori i mogu se predstaviti kao A_j^{klm} odnosno B_{jk}^m, dok treća nije tenzor.

6.2. Obe jednakosti slede iz tenzorske prirode veličine A_i na isti način. Naime, ako je A_i^j mešoviti tenzor pri transformaciji $x^i \to \bar{x}^i$, onda je on sigurno tenzor i pri obrnutoj transformaciji $\bar{x}^i \to x^i$. Više formalno, isto tvrđenje se može dokazati i na sledeći način. Iz zadane relacije

$$\bar{A}_r^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r} A_s^q$$

sledi:

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j} \bar{A}_r^p = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r} A_s^q .$$

Pošto je očevidno,

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} = \delta_q^i, \quad \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r} = \delta_j^s, \qquad (R.\ 6.1)$$

prema pravilima za nalaženje parcijalnih izvoda posrednih funkcija, imaćemo:

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j} \bar{A}_r^p = \delta_q^i \delta_j^s A_s^q = A_j^i,$$

što je i trebalo pokazati.

6.3. Zakon (6.16) transformacije komponenata kontravarijantnog vektora se može napisati kao:

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^1 \\ \bar{A}^2 \\ \bar{A}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}, \qquad (R.\ 6.2)$$

a zakon (6.24) za dvaput kontravarijantan tenzor ima oblik:

$$\begin{pmatrix}\bar A^{11}&\bar A^{12}&\bar A^{13}\\ \bar A^{21}&\bar A^{22}&\bar A^{23}\\ \bar A^{31}&\bar A^{32}&\bar A^{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\bar x^1}{\partial x^1}&\frac{\partial\bar x^1}{\partial x^2}&\frac{\partial\bar x^1}{\partial x^3}\\ \frac{\partial\bar x^2}{\partial x^1}&\frac{\partial\bar x^2}{\partial x^2}&\frac{\partial\bar x^2}{\partial x^3}\\ \frac{\partial\bar x^3}{\partial x^1}&\frac{\partial\bar x^3}{\partial x^2}&\frac{\partial\bar x^3}{\partial x^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{11}&A^{12}&A^{13}\\ A^{21}&A^{22}&A^{23}\\ A^{31}&A^{32}&A^{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\bar x^1}{\partial x^1}&\frac{\partial\bar x^2}{\partial x^1}&\frac{\partial\bar x^3}{\partial x^1}\\ \frac{\partial\bar x^1}{\partial x^2}&\frac{\partial\bar x^2}{\partial x^2}&\frac{\partial\bar x^3}{\partial x^2}\\ \frac{\partial\bar x^1}{\partial x^3}&\frac{\partial\bar x^2}{\partial x^3}&\frac{\partial\bar x^3}{\partial x^3}\end{pmatrix}\quad (R.6.3)$$

Čitaocu se ostavlja da, po analogiji, prikaže pomoću matričnog množenja pravila (6.10), (6.26) i (6.27).

6.4. Način rezonovanja je istovetan sa onim u jednačinama (6.45) – (6.47). Zadana relacija omogućava da napišemo

$$\bar A(p,q,r)\bar B^{qs}_r=\bar C^s_p,$$

odnosno pošto su B^{qs}_r i C^s_p tenzori i zakoni njihovih transformacija slede iz (6.31),

$$\bar A(p,q,r)\frac{\partial\bar x^q}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\bar x^s}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial\bar x^r}B^{ij}_k=\frac{\partial\bar x^s}{\partial x^l}\cdot\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^p}C^l_m$$

tj.

$$\bar A(p,q,r)\frac{\partial\bar x^q}{\partial x^i}\frac{\partial\bar x^s}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\bar x^r}B^{ij}_k=\frac{\partial\bar x^s}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^p}A(m,n,t)B^{nl}_t,$$

ili, uz promenu oznaka nemih indeksa s desne strane,

$$\bar A(p,q,r)\frac{\partial\bar x^q}{\partial x^i}\frac{\partial\bar x^s}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\bar x^r}B^{ij}_k=\frac{\partial\bar x^s}{\partial x^j}\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^p}A(m,i,k)B^{ij}_k.$$

Konačno izlazi:

$$\left[\bar A(p,q,r)\frac{\partial\bar x^q}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial\bar x^r}-A(m,i,k)\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^p}\right]\frac{\partial\bar x^s}{\partial x^j}B^{ij}_k=0.$$

Zbog proizvoljnosti tenzora B^{ij}_k, izraz u srednjoj zagradi mora biti jednak nuli:

$$\bar A(p,q,r)\frac{\partial\bar x^q}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial\bar x^r}=A(m,i,k)\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^p},$$

odakle se unutrašnjim množenjem sa $\frac{\partial x^i}{\partial\bar x^s}\frac{\partial\bar x^t}{\partial x^k}$ dobija:

$$\bar A(p,q,r)\frac{\partial\bar x^q}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial\bar x^r}\frac{\partial x^i}{\partial\bar x^s}\frac{\partial\bar x^t}{\partial x^k}=\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^p}\frac{\partial x^i}{\partial\bar x^s}\frac{\partial\bar x^t}{\partial x^k}A(m,i,k),$$

odnosno:

$$\bar A(p,q,r)\delta^q_s\delta^t_r=\bar A(p,s,t)=\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^p}\frac{\partial x^i}{\partial\bar x^s}\frac{\partial\bar x^t}{\partial x^k}A(m,i,k).$$

Nađeni rezultat pokazuje da je posmatrana veličina zaista tenzor, i to tipa A^r_{pq}.

6.5. U koordinatama $\bar x_i$ zadana veličina (koja zavisi od dva indeksa) je:

$$\frac{\partial^2\bar\phi}{\partial\bar x^i\partial\bar x^j}=\frac{\partial^2\phi}{\partial\bar x^i\partial\bar x^j}=\frac{\partial}{\partial\bar x^i}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar x^j}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\bar x^i}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial\bar x^j}\right)=\frac{\partial}{\partial\bar x^i}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^k}{\partial\bar x^j}+\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\frac{\partial^2x^k}{\partial\bar x^i\partial\bar x^j}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^i}\frac{\partial x^k}{\partial\bar x^j}+\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\frac{\partial^2x^k}{\partial\bar x^i\partial\bar x^j}$$

$$=\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^i}\frac{\partial x^k}{\partial\bar x^j}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^k\partial x^l}+\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\frac{\partial^2x^k}{\partial\bar x^i\partial\bar x^j}.\quad (R.6.4)$$

Pri dobijanju ovog rezultata korišćena su pravila za izvod posredne funkcije i za izvod proizvoda. Kao što se vidi, posmatrana veličina *nije tenzor*, i to zbog postojanja drugog sabirka u krajnjem izrazu.

6.6. Postupajući na isti način kao u prethodnom zadatku, i uzimajući u obzir da je A_i kovarijantan vektor, imaćemo:

$$\frac{\partial\bar A_i}{\partial\bar x^j}=\frac{\partial}{\partial\bar x^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial\bar x^i}A_k\right)=\frac{\partial^2x^k}{\partial\bar x^i\partial\bar x^j}A_k+\frac{\partial x^k}{\partial\bar x^i}\frac{\partial A_k}{\partial\bar x^j}=$$

$$=\frac{\partial^2x^k}{\partial\bar x^i\partial\bar x^j}A_k+\frac{\partial x^k}{\partial\bar x^i}\frac{\partial A_k}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^j}=$$

$$=\frac{\partial x^k}{\partial\bar x^i}\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^j}\frac{\partial A_k}{\partial x^l}+\frac{\partial^2x^k}{\partial\bar x^i\partial\bar x^j}A_k.\quad (R.6.5)$$

Ni ova veličina (koja zavisi od dva indeksa) nije tenzor, opet zbog istog razloga kao u prethodnom zadatku. Međutim, ako obrazujemo veličinu $\frac{\partial A_i}{\partial x^j}-\frac{\partial A_j}{\partial x^i}$, formula (R. 6.5) daje:

$$\frac{\partial\bar A_i}{\partial\bar x^j}-\frac{\partial\bar A_j}{\partial\bar x^i}=\frac{\partial x^k}{\partial\bar x^i}\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^j}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^l}-\frac{\partial A_l}{\partial x^k}\right).\quad (R.6.6)$$

Ovaj rezultat pokazuje da se posmatrana veličina transformiše po zakonu (6.26), te tako predstavlja *dvaput kovarijantan tenzor*. U narednoj Glavi, jednačina (7.71), biće pokazano da je taj tenzor, po definiciji, rotor kovarijantnog vektora.

6.7. Zakon transformacije zadane veličine se dobija po pravilu za parcijalno diferenciranje posrednih funkcija:

$$\frac{\partial\bar A^i}{\partial\bar x^i}=\frac{\partial}{\partial\bar x^i}(\bar A^i)=\frac{\partial}{\partial\bar x^i}\left(\frac{\partial\bar x^i}{\partial x^j}A^j\right)=\frac{\partial}{\partial\bar x^i}\left(\frac{\partial\bar x^i}{\partial x^j}\right)A^j+\frac{\partial\bar x^i}{\partial x^j}\frac{\partial A^j}{\partial\bar x^i}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial\bar x^i}{\partial\bar x^i}\right)A^j+\frac{\partial A^j}{\partial\bar x^i}\frac{\partial\bar x^i}{\partial x^j}=\frac{\partial A^j}{\partial x^j};$$

prvi član pretposlednje jednakosti jednak je nuli jer je $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^i} = \delta^i_i = 3$ konstanta.

Dobijeni rezultat pokazuje da zadana veličina *jeste skalar*. Međutim, u narednoj Glavi ćemo videti da ovaj skalar *nije* divergencija kontravarijantnog vektora.

6.8. Nadimo, najpre, zakon transformacije zadane veličine:

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} - \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^j} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\right) - \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} =$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} + \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^l}\right) - \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} =$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} + \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} - \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \frac{\partial \phi}{\partial x^l} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} =$$

$$= \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} \frac{\partial \phi}{\partial x^l} + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \frac{\partial \phi}{\partial x^l}\right).$$

Ovo će biti zakon transformacije dvaput kovarijantnog tenzora jedino ako je prvi član jednak nuli, što će biti *kod linearnih transformacija* (upor. sa zadatkom (6.5.).

6.9. Na osnovu rezultata zadatka 6.3 moći ćemo pisati:

$$\begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \qquad (R.\ 6.7)$$

po analogiji sa (*R*. 6.2). Ovaj izraz ćemo koristiti u sva tri koordinatna sistema zadatka.

(*a*) Ako sa $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$ i $\bar{x}^3$ označimo sferne koordinate (umesto standardnog r, ϑ, φ), relacija (*R*. 6.7) daje:

$$\begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \bar{x}^2 \cos \bar{x}^3 & \sin \bar{x}^2 \sin \bar{x}^3 & \cos \bar{x}^2 \\ \bar{x}^1 \cos \bar{x}^2 \cos \bar{x}^3 & \bar{x}^1 \cos \bar{x}^2 \ \sin \bar{x}^3 & -\bar{x}^1 \sin \bar{x}^2 \\ -\bar{x}^1 \sin \bar{x}^2 \sin \bar{x}^3 & \bar{x}^1 \sin \bar{x}^2 \cos \bar{x}^3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (\bar{x}^1)^2 \sin^2 \bar{x}^2 \sin \bar{x}^3 \cos \bar{x}^3 \\ 2\bar{x}^1 \sin \bar{x}^2 \sin \bar{x}^3 - (\bar{x}^1)^2 \cos \bar{x}^2 \\ (\bar{x}^1)^2 \sin \bar{x}^2 \cos \bar{x}^2 \cos \bar{x}^3 \end{pmatrix}.$$

Kada se izvrši matrično množenje, dobija se:

$$\bar{B}_1 = (\bar{x}^1)^2 \sin \bar{x}^2 (\sin^2 \bar{x}^2 \cos^2 \bar{x}^3 \sin \bar{x}^3 - \cos^2 \bar{x}^2 \sin \bar{x}^3 + \cos^2 \bar{x}^2 \cos \bar{x}^3) +$$
$$+ 2\,\bar{x}^1 \sin^2 \bar{x}^2 \sin^2 \bar{x}^3;$$

$$\bar{B}_2 = (\bar{x}^1)^3 (\sin^2 \bar{x}^2 \cos \bar{x}^2 \sin \bar{x}^3 \cos^2 \bar{x}^3 - \cos^3 \bar{x}^2 \sin \bar{x}^3 - \sin^2 \bar{x}^2 \cos \bar{x}^2 \cos \bar{x}^3) +$$
$$+ 2\,(\bar{x}^1)^2 \sin \bar{x}^2 \cos \bar{x}^2 \sin^2 \bar{x}^3;$$

$$\bar{B}_3 = 2\,(\bar{x}^1)^2 \sin^2 \bar{x}^2 \sin \bar{x}^3 \cos \bar{x}^3 - (\bar{x}^1)^3 (\sin^3 \bar{x}^2 \sin^2 \bar{x}^3 \cos \bar{x}^3 + \sin \bar{x}^2 \cos^2 \bar{x}^2 \cos \bar{x}^3).$$

To su komponente datog kovarijantnog vektora u sfernim koordinatama.

(*b*), (*c*) Postupak je potpuno istovetan, pa se ovaj deo zadatka ostavlja za samostalnu vežbu.

6.10. Da je brzina kontravarijantan vektor sledi iz očevidnih jednakosti:

$$\bar{v}^i = \frac{d\bar{x}^i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} v^j.$$

Za komponente ubrzanja, definisane na uobičajen način, imamo:

$$\bar{a}(i) = \frac{d\bar{v}^i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} v^j\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right) v^j + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{dv^j}{dt} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right) \frac{dx^k}{dt} v^j + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} a(j) =$$

$$= \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} v^j v^k + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} a(j).$$

Dobijeni zakon transformacije ne odgovara (osim za klasu linearnih transformacija) ni ko- ni kontravarijantnim vektorima, što znači da ubrzanje nije vektor u smislu opšteg tenzorskog računa. Na ovo pitanje ćemo se vratiti u narednoj Glavi (v. zadatak 7.13).

6.11. Dokazivanje ide slično kao u zadatku 6.4. Zadanu relaciju možemo, pomoću promenljivih $\bar{x}^i$, napisati kao:

$$\bar{A}(p,\ q)\, \bar{B}^{qs}_r = \bar{C}^s_{pr}$$

i pošto su B^{qs}_r i C^s_{pr} relativni tenzori zadanih težina, imamo na osnovu (6.35):

$$\bar{A}(p,\ q)\, D^{w_1} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} B^{ij}_k = D^{w_2} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^r} C^l_{mn},$$

gde je D skraćena oznaka za jakobijan transformacije $x \to \bar{x}$. Zamenimo li sa desne strane C^l_{mn} prema zadanoj relaciji, dobićemo dalje:

$$\bar{A}(p,\ q)\, D^{w_1 - w_2} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} \cdot B^{ij}_k = \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^r} A(m,\ t)\, B^{tl}_n,$$

ili, uz promenu oznaka nekih nemih indeksa,

$$\bar A(p,q)\,D^{w_1-w_2}\frac{\partial \bar x^q}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial \bar x^s}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial \bar x^r}B^{ij}_k=\frac{\partial \bar x^s}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^p}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial \bar x^r}A(m,\ i)\,B^{ij}_k.$$

Tako se definitivno dobija:

$$\left[\bar A(p\ \ q)\,D^{w_1-w_2}\frac{\partial \bar x^q}{\partial x^i}-A(m,\ i)\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^p}\right]\frac{\partial \bar x^s}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar x^r}B^{ij}_k=0.$$

Izraz u srednjoj zagradi mora biti jednak nuli pošto je tenzor B^{ij}_k proizvoljan:

$$\bar A(p,\ q)\,D^{w_1-w_2}\frac{\partial \bar x^q}{\partial x^i}=\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^p}A(m,\ i).$$

Naknadnim unutrašnjim množenjem sa $\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^t}$ odavde se dobija:

$$\bar A(p,\ q)\,D^{w_1-w_2}\frac{\partial \bar x^q}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^t}=\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^p}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^t}A(m,\ i),$$

odnosno:

$$\bar A(p,q)\,\delta^q_t=\bar A(p,\ t)=D^{w_2-w_1}\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^p}\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^t}A(m,\ i),$$

odakle se vidi da je $A(i,\ j)$ relativni dvaput kovarijantni tenzor A_{ij} težine w_2-w_1, kao što je i trebalo pokazati. Rezultat ovog zadatka pokazuje da se zakon količnika može generalisati i na pseudotenzore.

6.12. Ako je B_i relativan kovarijantan vektor težine -2, treba umesto (*R*.6.7) pisati:

$$\begin{pmatrix}\bar B_1\\ \bar B_2\\ \bar B_3\end{pmatrix}=\left|\frac{\partial x^i}{\partial \bar x^j}\right|^{-2}\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial \bar x^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar x^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar x^1}\\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar x^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar x^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar x^2}\\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar x^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar x^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar x^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\\ B_3\end{pmatrix}.$$

Pošto su potrebni jakobijani poznati iz Glave 3, eksplicitno pisanje traženih komponenata ne predstavlja teškoću. Za sferne koordinate, na primer, mogu se koristiti rezultati zadatka 6.9. s tim što se sve komponente još dele sa $[(\bar x^1)^2\sin\bar x^2]^2$, kvadratom jakobijana prelaza iz Descartes-ovih u sferne koordinate.

7. TENZORSKA ANALIZA

7.1. Neka su $u=x^1$, $v=x^2$ i $\varphi=x^3$ paraboličke koordinate. Prema rezultatu (*R*. 3.11) iz zadatka 3.12. možemo metričku formu pisati u obliku:

$$ds^2=[(x^1)^2+(x^2)^2][(dx^1)^2+(dx^2)^2]+(x^1)^2(x^2)^2(dx^3)^2,$$

odakle čitamo metrički tenzor:

$$g=\begin{pmatrix}(x^1)^2+(x^2)^2 & 0 & 0\\ 0 & (x^1)^2+(x^2)^2 & 0\\ 0 & 0 & (x^1)^2(x^2)^2\end{pmatrix}.$$

Konjugovani metrički tenzor će, na osnovu (7.11), biti:

$$\tilde g=\begin{pmatrix}\frac{1}{(x^1)^2+(x^2)^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{(x^1)^2+(x^2)^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{(x^1)^2(x^2)^2}\end{pmatrix}.$$

Na osnovu definicije (7.47) za Christoffel-ove simbole prve vrste odavde nalazimo:

$$\Gamma_{11,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}=x^1,$$

$$\Gamma_{11,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}=-x^2,$$

$$\Gamma_{11,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{31}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}=0,$$

$$\Gamma_{12,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}=x^2,$$

$$\Gamma_{12,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=x^1,$$

$$\Gamma_{12,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{31}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{12}}{\partial x^3}\right)=0,$$

$$\Gamma_{13,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}=0,$$

$$\Gamma_{13,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{21}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{13}}{\partial x^2}\right)=0,$$

$$\Gamma_{13,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{31}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}=x^1\,(x^2)^2,$$

$$\Gamma_{21,1}=\Gamma_{12,1}=x^2,$$

$$\Gamma_{21,2}=\Gamma_{12,2}=x^1,$$

$$\Gamma_{21,3}=\Gamma_{12,3}=0,$$

$$\Gamma_{22,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}+\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=-x^1,$$

$$\Gamma_{22,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}=x^2,$$

$$\Gamma_{22,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^2}+\frac{\partial g_{32}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}\right)=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}=0,$$

$$\Gamma_{23,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^2}+\frac{\partial g_{12}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}\right)=0,$$

$$\Gamma_{23,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{23}}{\partial x^2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}=0,$$

$$\Gamma_{23,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}+\frac{\partial g_{32}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}=(x^1)^2\,x^2$$

$$\Gamma_{31,1}=\Gamma_{13,1}=0,$$

$$\Gamma_{31,2}=\Gamma_{13,2}=0,$$

$$\Gamma_{31,3}=\Gamma_{13,3}=x^1\,(x^2)^2,$$

$$\Gamma_{32,1}=\Gamma_{23,1}=0,$$

$$\Gamma_{32,2}=\Gamma_{23,2}=0,$$

$$\Gamma_{32,3}=\Gamma_{23,3}=(x^1)^2\,x^2,$$

$$\Gamma_{33,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^3}+\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\right)=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}=-x^1\,(x^2)^2,$$

$$\Gamma_{33,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^3}+\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\right)=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}=-(x^1)^2\,x^2,$$

$$\Gamma_{33,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}+\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}=0.$$

Ukupno ima 27 Christoffel-ovih simbola prve vrste u trodimenzionom koordinatnom sistemu. U gornjim izračunavanjima je korišćena i simetrija ovih simbola, izražena jednačinom (7.48). Za nalaženje Christoffel-ovih simbola druge vrste poći ćemo od definicije (7.50). Tako dobijamo:

$$\Gamma^1_{11}=g^{1k}\,\Gamma_{11,k}=g^{11}\,\Gamma_{11,1}+g^{12}\,\Gamma_{11,2}+g^{13}\,\Gamma_{11,3}=$$

$$=g^{11}\,\Gamma_{11,1}=\frac{1}{(x^1)^2+(x^2)^2}\cdot x^1=\frac{x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2}\,;$$

u daljem ćemo izostaviti eksplicitno pisanje sume po nekom indeksu, i uzećemo u obzir da su samo dijagonalni elementi metričkog i konjugovanog metričkog tenzora različiti od nule, pa imamo:

$$\Gamma^2_{11}=g^{2k}\,\Gamma_{11,k}=g^{22}\,\Gamma_{11,2}=-\frac{x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2},$$

$$\Gamma^3_{11}=g^{3k}\,\Gamma_{11,k}=g^{33}\,\Gamma_{11,3}=0,$$

$$\Gamma^1_{12}=g^{1k}\,\Gamma_{12,k}=g^{11}\,\Gamma_{12,1}=\frac{x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2},$$

$$\Gamma^2_{12}=g^{2k}\,\Gamma_{12,k}=g^{22}\,\Gamma_{12,2}=\frac{x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2},$$

$$\Gamma^3_{12}=g^{3k}\,\Gamma_{12,k}=g^{33}\,\Gamma_{12,3}=0,$$

$$\Gamma^1_{13}=g^{1k}\,\Gamma_{13,k}=g^{11}\,\Gamma_{13,1}=0,$$

$$\Gamma^2_{13}=g^{2k}\,\Gamma_{13,k}=g^{22}\,\Gamma_{13,2}=0,$$

$$\Gamma^3_{13}=g^{3k}\,\Gamma_{13,k}=g^{33}\,\Gamma_{13,3}=\frac{1}{x^1},$$

$$\Gamma^1_{21}=\Gamma^1_{12}=\frac{x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2},$$

$$\Gamma^2_{21}=\Gamma^2_{12}=\frac{x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2},$$

$$\Gamma^3_{21}=\Gamma^3_{12}=0,$$

$$\Gamma^1_{22}=g^{1k}\,\Gamma_{22,k}=g^{11}\,\Gamma_{22,1}=-\frac{x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2},$$

$$\Gamma^2_{22}=g^{2k}\,\Gamma_{22,k}=g^{22}\,\Gamma_{22,2}=\frac{x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2},$$

$$\Gamma^3_{22} = g^{3k}\,\Gamma_{22,k} = g^{33}\,\Gamma_{22,3} = 0,$$

$$\Gamma^1_{23} = g^{1k}\,\Gamma_{23,k} = g^{11}\,\Gamma_{23,1} = 0,$$

$$\Gamma^2_{23} = g^{2k}\,\Gamma_{23,k} = g^{22}\,\Gamma_{23,2} = 0,$$

$$\Gamma^3_{23} = g^{3k}\,\Gamma_{23,k} = g^{33}\,\Gamma_{23,3} = \frac{1}{x^2},$$

$$\Gamma^1_{31} = g^{1k}\,\Gamma_{31,k} = g^{11}\,\Gamma_{31,1} = 0,$$

$$\Gamma^2_{31} = g^{2k}\,\Gamma_{31,k} = g^{22}\,\Gamma_{31,2} = 0,$$

$$\Gamma^3_{31} = g^{3k}\,\Gamma_{31,k} = g^{33}\,\Gamma_{31,3} = \frac{1}{x^1},$$

$$\Gamma^1_{32} = g^{1k}\,\Gamma_{32,k} = g^{11}\,\Gamma_{32,1} = 0,$$

$$\Gamma^2_{32} = g^{2k}\,\Gamma_{32,k} = g^{22}\,\Gamma_{32,2} = 0,$$

$$\Gamma^3_{32} = g^{3k}\,\Gamma_{32,k} = g^{33}\,\Gamma_{32,3} = \frac{1}{x^2},$$

$$\Gamma^1_{33} = g^{1k}\,\Gamma_{33,k} = g^{11}\,\Gamma_{33,1} = -\frac{x^1 (x^2)^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2},$$

$$\Gamma^2_{33} = g^{2k}\,\Gamma_{33,k} = g^{22}\,\Gamma_{33,2} = -\frac{(x_1)^2 x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2},$$

$$\Gamma^3_{33} = g^{3k}\,\Gamma_{33,k} = g^{33}\,\Gamma_{33,3} = 0.$$

Ukupno ima takođe 27 Christoffel-ovih simbola druge vrste. U paraboličkim koordinatama samo po 14 simbola obe vrste je različito od nule.

7.2. Postupak je istovetan sa onim u prethodnom zadatku, pa stoga navodimo samo rezultate.

(*a*) *U Descartes-ovim koordinatama* su svi elementi metričke tenzora i konjugovanog metričkog tenzora konstantni (dijagonalni su jednaki jedinici, ostali su nule), tako da *su svi Christoffel-ovi simboli jednaki nuli.*

(*b*) *U cilindričnim koordinatama* se, polazeći od numeričke forme (3.13), dobija:

$$\Gamma_{22,1} = -x^1, \qquad \Gamma_{12,2} = \Gamma_{21,2} = x^1,$$
$$\Gamma^1_{22} = -x^1, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{x^1}; \tag{R. 7.1}$$

svi ostali su jednaki nuli. Ovde je $x^1 = \rho$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$.

(*c*) *U sfernim koordinatama* se slično, na osnovu metričke forme (3.18), nalaze sledeći rezultati:

$$\Gamma_{22,1} = -x^1, \qquad \Gamma_{33,1} = -x^1 \sin^2 x^2, \qquad \Gamma_{33,2} = -(x^1)^2 \sin x^2 \cos x^2,$$
$$\Gamma_{12,2} = \Gamma_{21,2} = x^1, \quad \Gamma_{13,3} = \Gamma_{31,3} = x^1 \sin^2 x^2,$$

$$\Gamma_{23,3} = \Gamma_{32,3} = (x^1)^2 \sin x^2 \cos x^2; \tag{R. 7.2}$$
$$\Gamma^1_{22} = -x^1, \qquad \Gamma^1_{33} = -x^1 \sin^2 x^2, \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin x^2 \cos x^2,$$
$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{x^1}, \quad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{x^1},$$
$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \operatorname{ctg} x^2;$$

svi ostali su jednaki nuli. Ovde je $x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$, $x^3 = \varphi$.

7.3. Pođimo od zakona transformacije Christoffel-ovih simbola prve vrste (7.49) i izvršimo unutrašnje množenje sa $\bar g^{sk}$. Tako nalazimo:

$$\bar g^{sk}\,\bar\Gamma_{ij,k} = \bar\Gamma^s_{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar x^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^j}\frac{\partial x^n}{\partial \bar x^k}\,\bar g^{sk}\,\Gamma_{lm,n} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar x^i \partial \bar x^j}\frac{\partial x^n}{\partial \bar x^k}\,\bar g^{sk}\,g_{mn}.$$

Pošto je g^{ij} dvaput kontravarijantan tenzor, desnu stranu možemo na osnovu zakona transformacije ovih tenzora pisati:

$$\bar\Gamma^s_{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar x^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^j}\frac{\partial x^n}{\partial \bar x^k}\frac{\partial \bar x^s}{\partial x^p}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^q}\,g^{pq}\,\Gamma_{lm,n} +$$
$$+ \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar x^i \partial \bar x^j}\frac{\partial x^n}{\partial \bar x^k}\frac{\partial \bar x^s}{\partial x^p}\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^q}\,g^{pq}\,g_{mn} =$$
$$= \frac{\partial x^l}{\partial \bar x^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^j}\frac{\partial \bar x^s}{\partial x^p}\,\delta^n_q\,g^{pq}\,\Gamma_{lm,n} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar x^i \partial \bar x^j}\frac{\partial \bar x^s}{\partial x^p}\,\delta^n_q\,g^{pq}\,g_{mn},$$

jer je $\dfrac{\partial x^n}{\partial \bar x^k}\dfrac{\partial \bar x^k}{\partial x^q} = \dfrac{\partial x^n}{\partial x^q} = \delta^n_q$, po pravilu za diferenciranje posrednih funkcija. Dalje imamo:

$$\bar\Gamma^s_{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar x^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^j}\frac{\partial \bar x^s}{\partial x^p}\,g^{pn}\,\Gamma_{lm,n} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar x^i \partial \bar x^j}\frac{\partial \bar x^s}{\partial x^p}\,g^{pn}\,g_{mn} =$$
$$= \frac{\partial x^l}{\partial \bar x^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^j}\frac{\partial \bar x^s}{\partial x^p}\,\Gamma^p_{lm} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar x^i \partial \bar x^j}\frac{\partial \bar x^s}{\partial x^p}\,\delta^p_m,$$

gde je, u prvom članu poslednjeg izraza, iskorišćena definicija Christoffel-ovih simbola druge vrste (7.50), dok je u drugom članu uzeta u obzir relacija (7.10). Daljom transformacijom ovog drugog člana definitivno dobijamo:

$$\bar\Gamma^s_{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar x^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar x^j}\frac{\partial \bar x^s}{\partial x^p}\,\Gamma^p_{lm} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar x^i \partial \bar x^j}\frac{\partial \bar x^s}{\partial x^m}, \tag{R. 7.3}$$

odakle se vidi da u opštem slučaju ni Christoffel-ovi simboli druge vrste nisu tenzori. Jedino pri *linearnim transformacijama*, kad drugi član desne strane u (*R.* 7.3) otpada, Γ^k_{ij} se ponaša kao dvaput ko- i jednom kontravarijantan tenzor trećeg reda.

7.4. Prva od navedenih jednakosti sledi neposredno iz definicije (7.47) Christoffel-ovih simbola prve vrste:

$$\Gamma_{pm,q}+\Gamma_{qm,p}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{mq}}{\partial x^p}+\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^m}-\frac{\partial g_{pm}}{\partial x^q}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{mp}}{\partial x^q}+\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}-\frac{\partial g_{qm}}{\partial x^p}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{mq}}{\partial x^p}+\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^m}-\frac{\partial g_{pm}}{\partial x^q}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pm}}{\partial x^q}+\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^m}-\frac{\partial g_{mq}}{\partial x^p}\right)=$$

$$=\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}; \qquad (R.\ 7.4)$$

u gornjem izračunavanju je iskorišćena osobina simetrije metričkog tenzora, $g_{ij}=g_{ji}$.

Za dokazivanje druge jednakosti polazimo od očevidnog identiteta:

$$\frac{\partial}{\partial x^m}(g^{ik}g_{jk})=\frac{\partial}{\partial x^m}(\delta^i_j)=0,$$

iz koga se, eksplicitnim diferenciranjem leve strane, dolazi do

$$g_{jk}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^m}+g^{ik}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m}=0,$$

odnosno, ako iskoristimo upravo dokazanu relaciju (*R.* 7.4),

$$g_{jk}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^m}=-g^{ik}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m}=-g^{ik}(\Gamma_{jm,k}+\Gamma_{km,j}).$$

Unutrašnjim množenjem sa g^{jn} dobijamo dalje:

$$g^{jn}g_{jk}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^m}=\delta^n_k\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^m}=\frac{\partial g^{in}}{\partial x^m}=-g^{jn}g^{ik}(\Gamma_{jm,k}+\Gamma_{km,j})=$$

$$=-g^{jn}g^{ik}\Gamma_{jm,k}-g^{jn}g^{ik}\Gamma_{km,j}=-g^{jn}\Gamma^i_{jm}-g^{ik}\Gamma^n_{km}.$$

Izmenimo li oznake nekih indeksa, dobijamo definitivno:

$$\frac{\partial g^{in}}{\partial x^m}=-(g^{sn}\Gamma^i_{sm}+g^{is}\Gamma^n_{sm}). \qquad (R.\ 7.5)$$

Najzad, treću zadanu jednakost možemo dokazati polazeći od relacije (7.9),

$$g=g_{jk}G(j,\ k),$$

u kojoj se sumiranje podrazumeva samo po k (j može imati bilo koju fiksiranu vrednost). Pošto $G(j,\ k)$ ne sadrži eksplicitno g_{jk}, imaćemo diferenciranjem:

$$\frac{\partial g}{\partial g_{jk}}=G(j,\ k),$$

a takođe i:

$$\frac{\partial g}{\partial x^m}=\frac{\partial g}{\partial g_{jk}}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m}=G(j,\ k)\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m},$$

gde se, u skladu sa pravilom za diferenciranje posredne funkcije, ovde podrazumeva sumiranje i po j i po k. Iskoristimo li sada identitet (*R.* 7.4), dokazan u prvom delu ovog zadatka, imaćemo dalje:

$$\frac{\partial g}{\partial x^m}=G(j,\ k)(\Gamma_{jm,k}+\Gamma_{km,j})=gg^{jk}(\Gamma_{jm,k}+\Gamma_{km,j})=$$

$$=g\Gamma^j_{jm}+g\Gamma^k_{km}=2g\Gamma^j_{jm},$$

gde je $G(j,\ k)$ izražen pomoću relacije (7.11) i, u poslednjem izrazu, izmenjena oznaka nemog indeksa. Odavde je:

$$\Gamma^j_{jm}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^m}=\frac{\partial}{\partial x^m}(\ln\sqrt{g}), \qquad (R.\ 7.6)$$

što je i trebalo dokazati.

7.5. Neka je A_{ijk} dati triput kovarijantni tenzor. Rezonujući na isti način kao u komentaru jednačina (7.60)—(7.62), zaključujemo da je unutrašnji proizvod $A_{ijk}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}$ izvestan skalar, čijim diferenciranjem po luku geodezijske linije dobijamo opet skalar. Dakle, po analogiji sa (7.60), imaćemo:

$$\frac{d}{ds}\left(A_{ijk}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\right)=inv.$$

odnosno, nakon diferenciranja:

$$\frac{\partial A_{ijk}}{\partial x^q}\frac{dx^q}{ds}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}+A_{ijk}\frac{d^2x^i}{ds^2}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}+$$

$$+A_{ijk}\frac{dx^i}{ds}\frac{d^2x^j}{ds^2}\frac{dx^k}{ds}+A_{ijk}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{d^2x^k}{ds^2}=inv.$$

Zamenimo li druge izvode koordinata po luku geodezijske linije prema jednačinama (7.57), dobićemo dalje:

$$\frac{\partial A_{ijk}}{\partial x^q}\frac{dx^q}{ds}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}-A_{ijk}\Gamma^i_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}-$$

$$-A_{ijk}\frac{dx^i}{ds}\Gamma^j_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds}\frac{dx^k}{ds}-A_{ijk}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\Gamma^k_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds}=inv.$$

Izmenom oznaka nekih nemih indeksa, odavde dobijamo:

$$\frac{\partial A_{ijk}}{\partial x^q}\frac{dx^q}{ds}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}-A_{rjk}\Gamma^r_{iq}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^q}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}-$$

$$-A_{irk}\Gamma^r_{jq}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^q}{ds}\frac{dx^k}{ds}-A_{ijr}\Gamma^r_{kq}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^q}{ds}=$$

$$=\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^q}{ds}\left[\frac{\partial A_{ijk}}{\partial x^q}-\Gamma^r_{iq}A_{rjk}-\Gamma^r_{jq}A_{irk}-\Gamma^r_{kq}A_{ijr}\right]=inv.$$

Na osnovu zakona količnika zaključujemo da izraz u srednjoj zagradi mora biti četiri puta kovarijantan tenzor, koji ćemo, po analogiji sa (7.62), zvati *kovarijantni izvod* tenzora A_{ijk}:

$$A_{ijk,q} = \frac{\partial A_{ijk}}{\partial x^q} - \Gamma^r_{iq} A_{rjk} - \Gamma^r_{jq} A_{irk} - \Gamma^r_{kq} A_{ijr}. \qquad (R.\ 7.7)$$

Ovo je neposredna generalizacija formule (7.62) kao što se lako vidi.

Posmatrajmo sad jedan dvaput kovarijantan i dvaput kontravarijantan tenzor, A^{kl}_{ij}, i obrazujmo njegov kovarijantan izvod. Radeći po analogiji sa postupkom u jednačinama (7.63)—(7.66), poći ćemo od njemu asociranog četiri puta kovarijantnog tenzora, $A_{ijkl} = A^{pq}_{ij} g_{pk} g_{ql}$. Njegov kovarijantni izvod će, prema gornjoj formuli, biti:

$$\begin{aligned} A_{ijkl,m} &= \frac{\partial A_{ijkl}}{\partial x^m} - \Gamma^r_{im} A_{rjkl} - \Gamma^r_{jm} A_{irkl} - \Gamma^r_{km} A_{ijrl} - \Gamma^r_{lm} A_{ijkr} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^m}\left(A^{pq}_{ij} g_{pk} g_{ql}\right) - \Gamma^r_{im} A^{pq}_{rj} g_{pk} g_{ql} - \Gamma^r_{jm} A^{pq}_{ir} g_{pk} g_{ql} - \\ &\quad - \Gamma^r_{km} A^{pq}_{ij} g_{pr} g_{ql} - \Gamma^r_{lm} A^{pq}_{ij} g_{pk} g_{qr} = \\ &= \frac{\partial A^{pq}_{ij}}{\partial x^m} g_{pk} g_{ql} + A^{pq}_{ij} \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^m} g_{ql} + A^{pq}_{ij} \frac{\partial g_{ql}}{\partial x^m} g_{pk} - \\ &\quad - \Gamma^r_{im} A^{pq}_{rj} g_{pk} g_{ql} - \Gamma^r_{jm} A^{pq}_{ir} g_{pk} g_{ql} - \Gamma^r_{km} A^{pq}_{ij} g_{pr} g_{ql} - \\ &\quad - \Gamma^r_{lm} A^{pq}_{ij} g_{pk} g_{qr}. \end{aligned}$$

U gornjim jednačinama je izvršeno vraćanje na prvobitni tenzor (dvaput ko- i dvaput kontravarijantan) i eksplicitno diferenciranje prvog člana. Pregrupisavanjem članova i korišćenjem identiteta (7.64) dobijamo dalje:

$$\begin{aligned} A_{ijkl,m} &= \frac{\partial A^{pq}_{ij}}{\partial x^m} g_{pk} g_{ql} + A^{pq}_{ij} g_{ql}\left(\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^m} - \Gamma^r_{km} g_{pr}\right) + \\ &\quad + A^{pq}_{ij} g_{pk}\left(\frac{\partial g_{ql}}{\partial x^m} - \Gamma^r_{lm} g_{qr}\right) - \Gamma^r_{im} A^{pq}_{rj} g_{pk} g_{ql} - \Gamma^r_{jm} A^{pq}_{ir} g_{pk} g_{ql} = \\ &= \frac{\partial A^{pq}_{ij}}{\partial x^m} g_{pk} g_{ql} + A^{pq}_{ij} g_{ql} \Gamma_{mp,k} + A^{pq}_{ij} g_{pk} \Gamma_{mq,l} - \\ &\quad - \Gamma^r_{im} A^{pq}_{rj} g_{pk} g_{ql} - \Gamma^r_{jm} A^{pq}_{ir} g_{pk} g_{ql}. \end{aligned}$$

Unutrašnjim množenjem sa $g^{sk} g^{tl}$ dobijamo dalje:

$$\begin{aligned} g^{sk} g^{tl} A_{ijkl,m} &= \frac{\partial A^{pq}_{ij}}{\partial x^m} \delta^s_p \delta^t_q + A^{pq}_{ij} \delta^t_q \Gamma^s_{mp} + A^{pq}_{ij} \delta^s_p \Gamma^t_{mq} - \\ &\quad - \Gamma^r_{im} A^{pq}_{rj} \delta^s_p \delta^t_q - \Gamma^r_{jm} A^{pq}_{ir} \delta^s_p \delta^t_q = \\ &= \frac{\partial A^{st}_{ij}}{\partial x^m} + A^{pt}_{ij} \Gamma^s_{mp} + A^{sq}_{ij} \Gamma^t_{mq} - \Gamma^r_{im} A^{st}_{rj} - \Gamma^r_{jm} A^{st}_{ir}. \end{aligned}$$

Na osnovu zakona količnika izlazi da izraz sa desne strane mora biti tenzor petog reda, i to dvaput kontra- i triput kovarijantan te po analogiji sa (7.66) možemo pisati:

$$A^{kl}_{ij,m} = \frac{\partial A^{kl}_{ij}}{\partial x^m} + \Gamma^k_{rm} A^{rl}_{ij} + \Gamma^l_{rm} A^{kr}_{ij} - \Gamma^r_{im} A^{kl}_{rj} - \Gamma^r_{jm} A^{kl}_{ir}. \qquad (R.\ 7.8)$$

Dakle, kovarijantni izvod proizvoljnog tenzora se dobija kada se parcijalnom izvodu komponenata doda, za svaki kontravarijantni indeks, po jedan član tipa poslednjeg člana u (7.66) i oduzme, za svaki kovarijantan indeks, po jedan član tipa poslednjeg člana u (7.62).

7.6. (*a*) Pošto je spoljašnji proizvod dva tenzora takođe tenzor, $A^j_i B^{lm}_k = C^{jlm}_{ik}$, imaćemo na osnovu (*R.* 7.8).

$$\begin{aligned} C^{jlm}_{ik,q} &= \frac{\partial C^{jlm}_{ik}}{\partial x^q} + \Gamma^j_{rq} C^{rlm}_{ik} + \Gamma^l_{rq} C^{jrm}_{ik} + \Gamma^m_{rq} C^{jlr}_{ik} - \Gamma^r_{iq} C^{jlm}_{rk} - \Gamma^r_{kq} C^{jlm}_{ir} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^q}\left(A^j_i B^{lm}_k\right) + \Gamma^j_{rq} A^r_i B^{lm}_k + \Gamma^l_{rq} A^j_i B^{rm}_k + \Gamma^m_{rq} A^j_i B^{lr}_k - \\ &\quad - \Gamma^r_{iq} A^j_r B^{lm}_k - \Gamma^r_{kq} A^j_i B^{lm}_r = \left(\frac{\partial A^j_i}{\partial x^q} + \Gamma^j_{rq} A^r_i - \Gamma^r_{iq} A^j_r\right) B^{lm}_k + \\ &\quad + \left(\frac{\partial B^{lm}_k}{\partial x^q} + \Gamma^l_{rq} B^{rm}_k + \Gamma^m_{rq} B^{lr}_k - \Gamma^r_{kq} B^{lm}_r\right) A^j_i. \end{aligned}$$

Ovo se očevidno svodi na:

$$\left(A^j_i B^{lm}_k\right)_{,q} = A^j_{i,q} B^{lm}_k + A^j_i B^{lm}_{k,q}, \qquad (R.\ 7.9)$$

što znači da za kovarijantno diferenciranje proizvoda važi isto pravilo kao za obične izode.

(*b*) Nađimo sada kovarijantne izvode metričkog i konjugovanog metričkog tenzora. Prema pravilu (*R.* 7.8) nalazimo:

$$\begin{aligned} g_{ij,m} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} - \Gamma^r_{im} g_{rj} - \Gamma^r_{jm} g_{ir} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} - g^{rs}\Gamma_{im,s} g_{rj} - g^{rs}\Gamma_{jm,s} g_{ir} = \\ &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} - \delta^s_j \Gamma_{im,s} - \delta^s_i \Gamma_{jm,s} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} - \Gamma_{im,j} - \Gamma_{jm,i} = 0 \end{aligned} \qquad (R.\ 7.10)$$

Jednakost poslednjeg izraza nuli sledi iz (*R.* 7.4), zadatak 7.4. pod (*a*).

Slično tome, za konjugovani metrički tenzor nalazimo:

$$g^{ij}_{,m} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{rm} g^{rj} + \Gamma^j_{rm} g^{ir} = 0; \qquad (R.\ 7.11)$$

ovo sledi iz relacije (*R.* 7.5), dokazane u zadatku 7.4. pod (*b*).

7.7. Prema zadanoj metričkoj formi, ovde je

$$g_{11} = 1, \qquad g_{22} = (x^2)^2 - (x^1)^2,$$

a sve ostale komponente metričkog tenzora su jednake nuli. Stoga je:

$$g^{11}=1,\qquad g^{22}=\frac{1}{(x^2)^2-(x^1)^2}.$$

Radeći direktno na osnovu definicionih formula (7.47) i (7.50), nalazimo da su sledeći Christoffel-ovi simboli različiti od nule:

$$\Gamma_{12,2}=\Gamma_{21,2}=-x^1,\qquad \Gamma_{22,1}=x^1,\qquad \Gamma_{22,2}=x^2;$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=-\frac{x^1}{(x^2)^2-(x^1)^2},\qquad \Gamma^1_{22}=x^1,\qquad \Gamma^2_{22}=\frac{x^2}{(x^2)^2-(x^1)^2}.$$

Relacije (7.57) sada daju sledeće diferencijalne jednačine geodezijskih linija:

$$\frac{d^2x^1}{ds^2}+x^1\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2=0,$$

$$\frac{d^2x^2}{ds^2}+\frac{2x^1}{(x^1)^2-(x^2)^2}\,\frac{dx^1}{ds}\,\frac{dx^2}{ds}+\frac{x^2}{(x^2)^2-(x^1)^2}\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2=0,$$

što nije teško proveriti.

7.8. Eksplicitnim pisanjem izraza (7.69) nalazimo sledeću jednačinu za divergenciju datog vektora pomoću kontravarijantnih komponenata:

$$\operatorname{div}A^i=\frac{\partial A^1}{\partial x^1}+\frac{\partial A^2}{\partial x^2}+\frac{\partial A^3}{\partial x^3}+\left(\Gamma^1_{1k}+\Gamma^2_{2k}+\Gamma^3_{3k}\right)A^k=$$

$$=\frac{\partial A^1}{\partial x^1}+\frac{\partial A^2}{\partial x^2}+\frac{\partial A^3}{\partial x^3}+\left(\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{21}+\Gamma^3_{31}\right)A^1+$$

$$+\left(\Gamma^1_{12}+\Gamma^2_{22}+\Gamma^3_{32}\right)A^2+\left(\Gamma^1_{13}+\Gamma^2_{23}+\Gamma^3_{33}\right)A^3.$$

Potrebni Christoffel-ovi simboli druge vrste za paraboličke koordinate nađeni su u zadatku 7.1. Pomoću njih prethodni izraz dalje postaje:

$$\operatorname{div}A^i=\frac{\partial A^1}{\partial x^1}+\frac{\partial A^2}{\partial x^2}+\frac{\partial A^3}{\partial x^3}+\left[\frac{2x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2}+\frac{1}{x^1}\right]A^1+$$

$$+\left[\frac{2x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2}+\frac{1}{x^2}\right]A^2+0\cdot A^3.$$

Pošto su paraboličke koordinate ortogonalne, veza između fizičkih i kontravarijantnih komponenata izražena je jednačinom (7.44), koja s obzirom na koeficijente metričkog tenzora daje:

$$A_{(1)}=\sqrt{g_{11}}\,A^1=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}\,A^1,$$

$$A_{(2)}=\sqrt{g_{22}}\,A^2=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}\,A^2,$$

$$A_{(3)}=\sqrt{g_{33}}\,A^3=x^1x^2A^3.$$

Prema tome, za divergenciju dobijamo:

$$\operatorname{div}A^i=\frac{\partial}{\partial x^1}\left[\frac{A_{(1)}}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}\right]+\frac{\partial}{\partial x^2}\left[\frac{A_{(2)}}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}\right]+\frac{\partial}{\partial x^3}\,\frac{A_{(3)}}{x^1x^2}+$$

$$+\left[\frac{2x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2}+\frac{1}{x^1}\right]\frac{A_{(1)}}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}+\left[\frac{2x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2}+\frac{1}{x^2}\right]\frac{A_{(2)}}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}.$$

Nakon diferenciranja i sređivanja nalazimo:

$$\operatorname{div}A^i=\frac{1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}\left[\frac{\partial A_{(1)}}{\partial x^1}+\frac{\partial A_{(2)}}{\partial x^2}\right]+\frac{1}{x^1x^2}\,\frac{\partial A_{(3)}}{\partial x^3}+$$

$$+\left[\frac{x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2}+\frac{1}{x^1}\right]\frac{A_{(1)}}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}+\left[\frac{x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2}+\frac{1}{x^2}\right]\frac{A_{(2)}}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}.$$

7.9. Na osnovu definicija (7.73) i (7.75), koje se mogu neposredno generalisati na slučaj tenzora višeg reda, imaćemo:

$$\frac{\delta A^{jk}_i}{\delta t}=A^{jk}_{i,m}\frac{dx^m}{dt}=\left(\frac{\partial A^{jk}_i}{\partial x^m}+\Gamma^j_{rm}A^{rk}_i+\Gamma^k_{rm}A^{jr}_i-\Gamma^r_{im}A^{jk}_r\right)\frac{dx^m}{dt}=$$

$$=\frac{dA^{jk}_i}{dt}+\left(\Gamma^j_{rm}A^{rk}_i+\Gamma^k_{rm}A^{jr}_i-\Gamma^r_{im}A^{jk}_r\right)\frac{dx^m}{dt}.$$

7.10. Polazeći od definicije divergencije (7.69) možemo, uz izmenu oznaka indeksa, pisati:

$$\operatorname{div}A^p=A^p_{,p}=\frac{\partial A^p}{\partial x^p}+A^r\,\Gamma^p_{rp}.$$

Ako iskoristimo identitet (*R.* 7.6), dokazan u zadatku 7.4. pod (*c*), imaćemo dalje:

$$\operatorname{div}A^p=\frac{\partial A^p}{\partial x^p}+A^r\frac{\partial}{\partial x^r}\ln\sqrt{g}=\frac{\partial A^p}{\partial x^p}+\frac{1}{\sqrt{g}}A^p\frac{\partial}{\partial x^p}(\sqrt{g});$$

u zadnjem izrazu je izvršena izmena oznake nemog indeksa $(r\to p)$. Daljim transformacijama nalazimo:

$$\operatorname{div}A^p=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{g}\frac{\partial A^p}{\partial x^p}+A^p\frac{\partial}{\partial x^p}\sqrt{g}\right)=\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial x^p}(\sqrt{g}\,A^p),\qquad (R.\ 7.12)$$

što je i trebalo pokazati. Pošto je, prema jednačini (7.72), laplasijan definisan kao

$$\Delta\phi=\operatorname{div}\left(g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right),$$

gornji izraz za divergenciju daje neposredno:

$$\Delta\phi=\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial x^p}\left(\sqrt{g}\,g^{pq}\frac{\partial\phi}{\partial x^q}\right).\qquad (R.\ 7.13)$$

Ostaje još da se poslednji izraz eksplicitno napiše u cilindričnim i sfernim koordinatama. U *cilindričnim koordinatama* imamo

$$g^{11}=1,\quad g^{22}=\frac{1}{(x^1)^2},\quad g^{33}=1,$$

a sve ostale komponente konjugovanog metričkog tenzora su jednake nuli, jer su u pitanju ortogonalne koordinate), pa je:

$$\Delta\phi=\frac{1}{x^1}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(x^1\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left[x^1\frac{1}{(x^1)^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right]+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(x^1\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{x^1}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(x^1\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right)+\frac{1}{(x^1)^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial(x^2)^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial(x^3)^2}, \qquad (R.\ 7.14)$$

što se poklapa sa izrazom (3.40), jer je $x^1=\rho$, $x^2=\varphi$, $x^3=z$.

U *sfernim koordinatama* slično imamo:

$$g^{11}=1,\quad g^{22}=\frac{1}{(x^1)^2},\quad g^{33}=\frac{1}{(x^1)^2\sin^2 x^2},$$

tako da je:

$$\Delta\phi=\frac{1}{(x^1)^2\sin x^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\left[(x^1)^2\sin x^2\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right]+\frac{\partial}{\partial x^2}\left[(x^1)^2\sin x^2\frac{1}{(x^1)^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial x^3}\left[(x^1)^2\sin x^2\frac{1}{(x^1)^2\sin^2 x^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{(x^1)^2}\frac{\partial}{\partial x^1}\left[(x^1)^2\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right]+\frac{1}{(x^1)^2\sin x^2}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sin x^2\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{(x^1)^2\sin^2 x^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial(x^3)^2}. \qquad (R.\ 7.15)$$

Imajući u vidu da je ovde $x^1=r$, $x^2=\vartheta$, $x^3=\varphi$, dobijeni rezultat se podudara sa (3.44).

7.11. Nađimo kovarijantne izvode drugog reda koji figurišu sa leve strane zadane relacije. Prema opštem pravilu (*R.* 7.8) imaćemo:

$$A_{i,j}=\frac{\partial A_i}{\partial x^j}-\Gamma^r_{ji}A_r,$$

$$A_{i,jk}=(A_{i,j})_{,k}=\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j}-\Gamma^r_{ji}A_r\right)_{,k}=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j}-\Gamma^r_{ji}A_r\right)-$$

$$-\Gamma^s_{ki}\left(\frac{\partial A_s}{\partial x^j}-\Gamma^r_{js}A_r\right)-\Gamma^s_{kj}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^s}-\Gamma^r_{si}A_r\right)=\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k\partial x^j}-\frac{\partial A_r}{\partial x^k}\Gamma^r_{ji}-$$

$$-A_r\frac{\partial\Gamma^r_{ji}}{\partial x^k}-\frac{\partial A_s}{\partial x^j}\Gamma^s_{ki}-\frac{\partial A_i}{\partial x^s}\Gamma^s_{kj}+\Gamma^s_{ki}\Gamma^r_{js}A_r+\Gamma^s_{kj}\Gamma^r_{si}A_r.$$

Odavde zamenom mesta indeksa j i k nalazimo i:

$$A_{i,kj}=\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^j\partial x^k}-\frac{\partial A_r}{\partial x^j}\Gamma^r_{ki}-A_r\frac{\partial\Gamma^r_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial A_s}{\partial x^k}\Gamma^s_{ji}-$$

$$-\frac{\partial A_i}{\partial x^s}\Gamma^s_{jk}+\Gamma^s_{ji}\Gamma^r_{ks}A_r+\Gamma^s_{jk}\Gamma^r_{si}A_r.$$

Oduzimanjem ovih dveju relacija, vodeći računa o simetriji Christoffelovih simbola druge vrste po donjim indeksima i o mogućnosti izmene oznake nemih indeksa, dolazimo do:

$$A_{i,jk}-A_{i,kj}=\left(\frac{\partial\Gamma^r_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma^r_{ji}}{\partial x^k}+\Gamma^r_{js}\Gamma^s_{ki}-\Gamma^r_{ks}\Gamma^s_{ji}\right)A_r,$$

odakle vidimo da izraz u zagradi predstavlja traženi tenzor. Da je ta veličina zaista tenzor sledi iz zakona količnika. Dakle:

$$R^r_{ijk}=\frac{\partial\Gamma^r_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma^r_{ji}}{\partial x^k}+\Gamma^r_{js}\Gamma^s_{ki}-\Gamma^r_{ks}\Gamma^s_{ji}. \qquad (R.\ 7.16)$$

To je traženi eksplicitni oblik Riemann-Christoffel-ovog tenzora. Činjenica da on nije u opštem slučaju identički jednak nuli ukazuje na to da kod višestrukog kovarijantnog diferenciranja redosled nalaženja izvoda ima određen značaj. Kovarijantnim diferenciranjem najpre po x^j a zatim po x^k dobija se rezultat različit od onog pri kovarijantnom diferenciranju prvo po x^k pa po x^j.

Riemann-Christoffel-ov tenzor (*R.* 7.16) se može izraziti i u alternativnom obliku, pomoću Christoffel-ovih simbola prve vrste. U tom cilju je potrebno poći od veze (7.50) i iskoristiti identitet (*R.* 7.5) iz zadatka 7.4. pod (*b*). Čitaocu se ostavlja za samostalnu vežbu da pokaže da je rezultat:

$$R^r_{ijk}=g^{rp}\left(\frac{\partial\Gamma_{ki,p}}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma_{ji,p}}{\partial x^k}\right)+g^{rq}g^{pt}(\Gamma_{kq,t}\Gamma_{ij,p}-\Gamma_{jq,t}\Gamma_{ik,p}). \qquad (R.\ 7.17)$$

7.12. Nađimo najpre eksplicitan oblik kovarijantnog tenzora krivine, definisanog u zadatku. Polazeći od (*R.* 7.17) i obrazujući ukazani unutrašnji proizvod, nalazimo:

$$R_{ijkl}=g_{rl}R^r_{ijk}=g^{rp}g_{rl}\left(\frac{\partial\Gamma_{ki,p}}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma_{ji,p}}{\partial x^k}\right)+g_{rl}g^{rq}g^{pt}(\Gamma_{kq,t}\Gamma_{ij,p}-\Gamma_{jq,t}\Gamma_{ik,p})=$$

$$=\delta^p_l\left(\frac{\partial\Gamma_{ki,p}}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma_{ji,p}}{\partial x^k}\right)+\delta^q_l g^{pt}(\Gamma_{kq,t}\Gamma_{ij,p}-\Gamma_{jq,t}\Gamma_{ik,p})=$$

$$=\frac{\partial\Gamma_{ki,l}}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma_{ji,l}}{\partial x^k}+g^{pt}(\Gamma_{kl,t}\Gamma_{ij,p}-\Gamma_{jl,t}\Gamma_{ik,p}). \qquad (R.\ 7.18)$$

Navedeni identiteti se lako dokazuju na osnovu ovog oblika kovarijantnog tenzora krivine, vodeći računa samo o osobini simetrije po prvim indeksima Christoffel-ovih simbola prve vrste i o njihovoj definiciji (7.47). Primera radi, dokazaćemo ovde identitet (*a*) dok će ostala dva biti ostavljena čitaocu za samostalnu vežbu.

Ako zamenimo mesta prvog i drugog para indeksa u kovarijantnom tenzoru krivine, dobićemo:

$$R_{klij}=\frac{\partial \Gamma_{ik,j}}{\partial x^l}-\frac{\partial \Gamma_{lk,j}}{\partial x^i}+g^{pq}(\Gamma_{ij,q}\Gamma_{kl,p}-\Gamma_{lj,q}\Gamma_{ik,p}).$$

Upoređivanjem sa (*R*. 7.18) vidimo da su izrazi u zagradi u oba slučaja jednaki. Da su međusobno jednaki i članovi koji sadrže izvode Christoffel-ovih simbola, može se proveriti neposrednim diferenciranjem. Zaista:

$$\frac{\partial \Gamma_{kl,i}}{\partial x^j}-\frac{\partial \Gamma_{jl,i}}{\partial x^k}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}-\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^j}+\frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^k \partial x^i}-\frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^j \partial x^i}-\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^l \partial x^k}\right);$$

$$\frac{\partial \Gamma_{ik,j}}{\partial x^l}-\frac{\partial \Gamma_{lk,j}}{\partial x^i}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^i \partial x^j}-\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^i \partial x^k}\right).$$

Ovim je istovremeno dokazano i važenje identiteta navedenog pod (*a*). Ostala dva se dokazuju na sličan način.

7.13. Razlog zbog koga je potrebno ubrzanje definisati kao apsolutni izvod brzine po vremenu proizilazi iz rešenja zadatka 6.10.

U cilindričnim koordinatama su kontravarijantne komponente brzine

$$v^1=\frac{dx^1}{dt}, \quad v^2=\frac{dx^2}{dt}, \quad v^3=\frac{dx^3}{dt}$$

(imati u vidu da je ovde $x^1=\rho$, $x^2=\varphi$, $x^3=z$), pa su fizičke komponente, prema (7.44),

$$v_{(1)}=\sqrt{g_{11}}\frac{dx^1}{dt}=\dot{x}^1, \quad v_{(2)}=\sqrt{g_{22}}\frac{dx^2}{dt}=x^1\dot{x}^2, \quad v_{(3)}=\sqrt{g_{33}}\frac{dx^3}{dt}=\dot{x}^3,$$

jer je metrička forma oblika (3.13). Prema rezultatima zadatka 7.2. nalazimo za kontravarijantne komponente ubrzanja:

$$a^1=\frac{\delta v^1}{\delta t}=v^1_{,q}\frac{dx^q}{dt}=\left(\frac{\partial v^1}{\partial x^q}+\Gamma^1_{qs}v^s\right)\frac{dx^q}{dt}=$$

$$=\frac{dv^1}{dt}+\Gamma^1_{qs}v^s\frac{dx^q}{dt}=\frac{d^2x^1}{dt^2}+\Gamma^1_{qs}\frac{dx^q}{dt}\frac{dx^s}{dt}=\frac{d^2x^1}{dt^2}-x^1\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2,$$

jer je od svih Christoffel-ovih simbola sa gornjim indeksom 1 samo $\Gamma^1_{22}=-x^1$ različit od nule u cilindričnim koordinatama (v. zadatak 7.2.). Slično imamo:

$$a^2=\frac{\delta v^2}{\delta t}=\frac{d^2x^2}{dt^2}+\Gamma^2_{qs}\frac{dx^q}{dt}\frac{dx^s}{dt}=\frac{d^2x^2}{dt^2}+\frac{2}{x^1}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^2}{dt},$$

$$a^3=\frac{\delta v^3}{\delta t}=\frac{d^2x^3}{dt^2}+\Gamma^3_{qs}\frac{dx^q}{dt}\frac{dx^s}{dt}=\frac{d^2x^3}{dt^2}.$$

Fizičke komponente ubrzanja su, onda,

$$a_{(1)}=\sqrt{g_{11}}a^1=\ddot{x}^1-x^1(\dot{x}^2)^2,$$

$$a_{(2)}=\sqrt{g_{22}}a^2=x^1\ddot{x}^2+2\dot{x}^1\dot{x}^2,$$

$$a_{(3)}=\sqrt{g_{33}}a^3=\ddot{x}^3.$$

Postupajući na istovetan način, za *sferne koordinate* se na osnovu metričke forme (3.18) i Christoffel-ovih simbola nađenih u zadatku 7.2. nalazi:

$$v_{(1)}=\dot{x}^1, \quad v_{(2)}=x^1\dot{x}^2, \quad v_{(3)}=x^1\sin x^2\dot{x}^3;$$

$$a_{(1)}=\ddot{x}^1-x^1(\dot{x}^2)^2-x^1\sin^2 x^2(\dot{x}^3)^2,$$

$$a_{(2)}=x^1\ddot{x}^2+2\dot{x}^1\dot{x}^2-x^1\sin x^2\cos x^2(\dot{x}^3)^2,$$

$$a_{(3)}=x^1\sin x^2\ddot{x}^3+2x^1\cos x^2\dot{x}^2\dot{x}^3+2\sin x^2\dot{x}^1\dot{x}^3.$$

Čitaocu se ostavlja da ove rezultate samostalno proveri. Tačkama iznad koordinate označeni su izvodi po vremenu.

7.14. Kinetičku energiju materijalne tačke ćemo izraziti na sledeći način:

$$T=\frac{1}{2}m(v)^2=\frac{1}{2}m\frac{ds^2}{dt^2}=\frac{1}{2}mg_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j,$$

tako da diferenciranjem dobijamo:

$$\frac{\partial T}{\partial x^k}=\frac{1}{2}m\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}=mg_{ik}\dot{x}^i;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right)=mg_{ik}\ddot{x}^i+m\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}\dot{x}^r\dot{x}^i.$$

Obrazujmo sad izraz naveden u zadatku i transformišimo ga izmenama oznaka nemih indeksa, da dobijemo:

$$\frac{1}{m}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^k}\right]=g_{ik}\ddot{x}^i+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}\dot{x}^r\dot{x}^i-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j=$$

$$=g_{rk}\ddot{x}^r+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{rk}}{\partial x^j}\dot{x}^j\dot{x}^r+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^r}\dot{x}^r\dot{x}^j-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{rj}}{\partial x^k}\dot{x}^r\dot{x}^j=$$

$$=g_{rk}\ddot{x}^r+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rk}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^r}-\frac{\partial g_{rj}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^j\dot{x}^r=g_{rk}\ddot{x}^r+\Gamma_{jr,k}\dot{x}^j\dot{x}^r.$$

Christoffel-ov simbol prve vrste, koji se ovde pojavio, može se dovesti u vezu sa Christoffel-ovim simbolima druge vrste na osnovu relacije (7.50). Unutrašnjim množenjem sa g_{ls}, naime, izlazi:

$$g_{ls}\Gamma^l_{ij}=g_{ls}g^{lk}\Gamma_{ij,k}=\delta^k_s\Gamma_{ij,k}=\Gamma_{ij,s},$$

tako da posmatrani izraz dalje daje:

$$\frac{1}{m}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^k}\right]=g_{lk}\ddot{x}^l+g_{pk}\Gamma^p_{jr}\dot{x}^j\dot{x}^r=$$

$$=g_{pk}\ddot{x}^p+g_{pk}\Gamma^p_{jr}\dot{x}^j\dot{x}^r=g_{pk}\left(\ddot{x}^p+\Gamma^p_{jr}\dot{x}^j\dot{x}^r\right).$$

Kao što je u prethodnom zadatku detaljnije pokazano, izraz u zagradi predstavlja kontravarijantnu komponentu ubrzanja, a^p. Dakle:

$$\frac{1}{m}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^k}\right]=g_{pk}a^p=a_k,$$

što daje traženi rezultat.

7.15. Potpuno analogo postupku u zadatku 7.8. dobijamo sledeće rezultate:

$$\operatorname{div} A^i=\frac{1}{x^1}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}[x^1 A_{(1)}]+\frac{\partial A_{(2)}}{\partial x^2}+x^1\frac{\partial A_{(3)}}{\partial x^3}\right\},$$

$$\operatorname{div} A^i=\frac{1}{(x^1)^2}\frac{\partial}{\partial x^1}[(x^1)^2 A_{(1)}]+\frac{1}{x^1\sin x^2}\frac{\partial}{\partial x^2}[\sin x^2 A_{(2)}]+\frac{1}{x^1\sin x^2}\frac{\partial A_{(3)}}{\partial x^3},$$

za cilindrične ($x^1=\rho$, $x^2=\varphi$, $x^3=z$) i sferne ($x^1=r$, $x^2=\vartheta$, $x^3=\varphi$) koordinate respektivno. Čitaocu se preporučuje da proveri ove rezultate.

8. STRUKTURE APSTRAKTNIH PROSTORA

8.1. Ispravnost navedenih relacija se dokazuje na sledeći način.

(*a*) Dodati $(-x)$ obema stranama polazne jednakosti, pa zatim iskoristiti komutativnost unutrašnje kompozicije i relaciju (8.4).

(*b*) Dodati obema stranama polazne jednakosti $(-y)$.

(*c*) Na osnovu (8.3) i (8.7) imamo:

$$\lambda x\oplus\theta=\lambda x=(\lambda+0)x=\lambda x\oplus 0x,$$

pa upoređivanjem prvog i poslednjeg izraza u napisanim jednakostima vidimo da je zaista $0x=\theta$.

(*d*) Koristeći jednačinu (8.6) umesto (8.7) imaćemo, po analogiji sa relacijama iz prethodne tačke,

$$\lambda x\oplus\theta=\lambda x=\lambda(x\oplus\theta)=\lambda x\oplus\lambda\theta,$$

odakle je $\lambda\theta=\theta$.

(*e*) Pošto je, na osnovu jednačine (8.7) i malo pre dokazane relacije pod (*c*),

$$x\oplus(-1)x=[1+(-1)]x=0x=\theta,$$

upoređivanjem polaznog izraza sa (8.4) nalazimo $(-1)x=(-x)$.

(*f*) Dokazivanje prve od navedenih relacija zasniva se na okolnosti da se, ako je $\lambda\neq0$, polazna jednačina može pomnožiti skalarom $\frac{1}{\lambda}$, i tako dobiti $\frac{1}{\lambda}(\lambda x)=\frac{1}{\lambda}\theta$. Desna strana ove jednakosti je jednaka nultom elementu θ u skladu sa (*d*). Levu stranu možemo transformisati prema (8.5) i (8.8) pa pisati $\frac{1}{\lambda}(\lambda x)=\left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)x=1x=x$, odakle se onda nalazi $x=\theta$. Dokazivanje ispravnosti druge relacije je neposredno, jer ako bi u relaciji $\lambda x=\theta$ bilo $\lambda\neq0$, dobili bismo $x=\theta$ suprotno pretpostavci da je $x\neq\theta$. Zbog ove kontradikcije je jasno da ne može biti $\lambda\neq0$, tj. mora biti $\lambda=0$.

(*g*) Iz $\lambda x=\lambda y$ najpre na osnovu relacije pod (*b*) sledi $\lambda x\ominus\lambda y=\theta$, tj. $\lambda(x\ominus y)=\theta$. Ukoliko je $\lambda\neq0$, prema osobini dokazanoj pod (*f*) imaćemo odavde $x\ominus y=\theta$, tj. prema (*b*), $x=y$.

(*h*) Dokazivanje ove relacije je analogo prethodnoj. Zaista, iz $\lambda x=\mu x$ sledi najpre $\lambda x\ominus\mu x=0$, a odatle $(\lambda-\mu)x=\theta$. Pošto je $x\neq\theta$, osobina (*f*) daje $\lambda-\mu=0$, tj. $\lambda=\mu$.

8.2. Hölder-ovu nejednačinu možemo prepisati u konciznijem obliku ako uvedemo veličine

$$\alpha'_\nu=\frac{\alpha_\nu}{\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}},\qquad \beta'_\nu=\frac{\beta_\nu}{\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|\beta_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}}.$$

Ova nejednačina tada, naime, postaje:

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha'_\nu\,\beta'_\nu|<1, \qquad (R.\ 8.1)$$

i u ovom obliku će biti najlakše dokazati je.

Polazna tačka za ovo je elementarna nejednakost

$$ab<\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}, \qquad (R.\ 8.2)$$

koja važi za $a>0$, $b>0$ i pozitivne brojeve p i q takve da je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ i $p>1$. U cilju dokazivanja nejednakosti (*R.* 8.2) zapazićemo najpre da je ona trivijalno zadovoljena ako je jedan od brojeva a ili b jednak nuli. Stoga ćemo proveravanje ograničiti na slučaj kad su $a, b>0$. Uočimo funkciju $y=x^m$ gde je $0<m<1$. U oblasti $x>0$ ova funkcija leži ispod svoje tangente u tački $x=1$, tako da se može pisati

$$x^m<1+m(x-1).$$

Stavimo li ovamo $x=\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{1-m}}}$, dobićemo

$$\frac{a}{b^{\frac{m}{1-m}}}<1+m\left(\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{1-m}}}-1\right),$$

odnosno, nakon sređivanja,

$$ab<(1-m)\,b^{\frac{1}{1-m}}+ma^{\frac{1}{m}}.$$

Uvedimo smenu $m=\frac{1}{p}$ (onda je $p>1$, pošto je $0<m<1$) i stavimo $1-m=\frac{1}{q}$ $\left(\text{tj. } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, pa dobijamo (*R.* 8.2).

Uvrstimo sada u dokazanu nejednakost (*R.* 8.2) redom $a=|\alpha'_\nu|$, $b=|\beta'_\nu|$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$. Dobijamo:

$$|\alpha'_\nu||\beta'_\nu|<\frac{1}{p}|\alpha'_\nu|^p+\frac{1}{q}|\beta'_\nu|^q\ (\nu=1, 2, \ldots, n)$$

pa ako još sve ove nejednačine saberemo, nalazimo:

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha'_\nu\beta'_\nu|<\frac{1}{p}\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha'_\nu|^p+\frac{1}{q}\sum_{\nu=1}^{n}|\beta'_\nu|^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

čime je (*R.* 8.1) dokazano.

Pređimo sad na dokazivanje Minkowski-jeve nejednačine. Ona je za $p=1$ trivijalna, tako da interes predstavlja samo slučaj kad je $p>1$. Uočimo najpre sledeće relacije:

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu+\beta_\nu|^p=\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu+\beta_\nu||\alpha_\nu+\beta_\nu|^{p-1}<$$

$$<\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu||\alpha_\nu+\beta_\nu|^{p-1}+\sum_{\nu=1}^{n}|\beta_\nu||\alpha_\nu+\beta_\nu|^{p-1},$$

koje proizilaze iz činjenice da je $|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|$ ma za kakve kompleksne brojeve α i β. Primenimo sad Hölder-ovu nejednačinu. Imaćemo:

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu+\beta_\nu|^p<\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu||\alpha_\nu+\beta_\nu|^{p-1}+\sum_{\nu=1}^{n}|\beta_\nu||\alpha_\nu+\beta_\nu|^{p-1}<$$

$$<\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu+\beta_\nu|^{(p-1)q}\right\}^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|\beta_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu+\beta_\nu|^{(p-1)q}\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Pošto je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, izlazi da je $(p-1)q=p$, tako da gornju nejednačinu možemo prepisati kao:

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu+\beta_\nu|^p<\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu+\beta_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{q}}\left(\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|\beta_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\right),$$

ili, deljenjem sa prvim množiteljem sa desne strane,

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu+\beta_\nu|^p\right\}^{1-\frac{1}{q}}<\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|\beta_\nu|^p\right\}^{\frac{1}{p}}, \qquad (R.\ 8.3)$$

odakle, zbog $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$, sledi neposredno Minkowski-jeva nejednačina.

Da bismo ispitali mogućnost generalizacije ovih nejednačina na integrale, posmatraćemo dve funkcije, $f(x)$ i $g(x)$, integrabilne (u Riemann-ovom smislu) u intervalu $[a, b]$. Podelićemo taj interval na n delova, i u svakom od njih odabraćemo po jednu tačku $x=\xi_\nu$. Stavimo li $\alpha_\nu=f(\xi_\nu)$ i $\beta_\nu=g(\xi_\nu)$, Hölder-ova i Minkowski-jeva nejednačina daju:

$$\sum_{\nu=1}^{n}|f(\xi_\nu)g(\xi_\nu)|<\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|f(\xi_\nu)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|g(\xi_\nu)|^p\right\}^{\frac{1}{q}},$$

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|f(\xi_\nu)+g(\xi_\nu)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}<\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|f(\xi_\nu)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{\nu=1}^{n}|g(\xi_\nu)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Napisane nejednačine će važiti i kad budemo postepeno uvećavali broj podelaka. Ukoliko taj proces budemo vršili tako da pri uvećavanju broja podelaka

najveći među njima teži nuli, sve napisane sume prelaze, po definiciji, u korespondentne Riemann-ove integrale (jer su funkcije po pretpostavci integrabilne). Dakle:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx < \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (R.\ 8.4)$$

$$\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (R.\ 8.5)$$

Analoge relacije će važiti i ako se radi o integralima u Lebesgueovom smislu, ali ovde nećemo iznositi formalne dokaze ove tvrdnje. Zainteresovanog čitaoca upućujemo na literaturu iz Funkcionalne analize.

8.3. Zadane koordinatne dijade $\mathcal{T}_{ij}=\{e_i, e_j\}$ se mogu, prema jednačini (5.30), prikazati matricama, čiji su svi elementi jednaki nuli, izuzev onoga koji se nalazi u i-toj vrsti i j-toj koloni i koji je jednak jedinici. Prema tome, relacija

$$\alpha_1\mathcal{T}_{11}+\alpha_2\mathcal{T}_{12}+\alpha_3\mathcal{T}_{13}+\cdots+\alpha_9\mathcal{T}_{33}=\mathcal{O},$$

u kojoj $\mathcal{O}$ označava nulti tenzor definisan u Glavi 4, može se prikazati i kao matrična jednakost:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6\\ \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

i očevidno može biti zadovoljena samo kad su svi koeficijenti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_9$ jednaki nuli. Tenzori $\mathcal{T}_{ij}$ su dakle linearno nezavisni.

Da bismo ispitali linearnu nezavisnost (ili zavisnost) tenzora iz zadatka 5.16, treba ispitati da li jednačina:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}+$$

$$+\alpha_4\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+\alpha_5\begin{pmatrix}1&\sqrt{8}&0\\\sqrt{8}&1&\sqrt{8}\\0&\sqrt{8}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad (R.\ 8.6)$$

ima netrivijalna rešenja. Nakon sređivanja leve strane i izjednačavanja korespondentnih matričnih elemenata dobijamo, zbog simetričnosti svih zadanih tenzora, šest nezavisnih jednačina, koje glase:

$$\begin{aligned}
\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_5&=0,\\
\alpha_2+\alpha_4+\sqrt{8}\,\alpha_5&=0,\\
\alpha_1&=0,\\
\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5&=0,\\
\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\sqrt{8}\,\alpha_5&=0,\\
\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_5&=0.
\end{aligned}$$

Rešavanje ovakvih sistema jednačina koji se sastoje od više jednačina nego što ima nepoznatih odvija se tako, što se iz njega izdvoji onoliko jednačina koliko ima nepoznatih veličina, pa se taj podsistem najpre reši, a zatim se ispita da li nađena rešenja zadovoljavaju i preostale jednačine. U našem slučaju to znači da treba odbaciti jednu od gornjih jednačina i naći rešenja ostalih pet. Lako je proveriti da se tako dobija $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_5=0$, što znači da su zadani tenzori linearno nezavisni.

8.4. Matrice koje se navode u zadatku su:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \sigma_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Da bi one obrazovale algebarsku bazu, treba da budu linearno nezavisne, tj. da relacija (8.12), koja u ovom slučaju ima oblik

$$\alpha_1\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

ima samo rešenja $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$. Koristeći pravila izražena jednačinama (5.4) i (5.6) za sabiranje matrica i množenje matrice skalarom, gornju jednačinu možemo svesti na

$$\begin{pmatrix}\alpha_3+\alpha_4 & \alpha_1-i\alpha_2\\ \alpha_1+i\alpha_2 & -\alpha_3+\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

a odatle, na osnovu uslova (5.3) za jednakost dveju matrica, dobiti sistem od četiri homogene linearne jednačine za određivanje traženih koeficijenata:

$$\begin{aligned}
\alpha_3-\alpha_4&=0,\\
\alpha_1-i\alpha_2&=0,\\
\alpha_1+i\alpha_2&=0,\\
-\alpha_3-\alpha_4&=0.
\end{aligned}$$

Determinanta sistema je

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&0&1&1\\1&-i&0&0\\1&i&0&0\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=-4i,$$

i pošto je $\Delta\neq 0$, posmatrani sistem (linearnih i homogenih) jednačina ima samo trivijalna rešenja $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$, što znači da su zadane matrice zaista linearno nezavisne i mogu se uzeti za algebarsku bazu u zadanom četvorodimenzionalnom prostoru matrica tipa 2×2.

Izrazimo sada matrice iz zadatka 5.2.

$$A_1=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$$

pomoću matrica zadane baze. Za A_1 ćemo imati

$$\lambda_1\sigma_1+\lambda_2\sigma_2+\lambda_3\sigma_3+\lambda_4\sigma_4=A_1,$$

ij.

$$\lambda_1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Nakon sređivanja leve strane dobijamo, radeći kao gore, sledeći algebarski sistem jednačina za $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$:

$$\lambda_3+\lambda_4=-1, \qquad \lambda_1-i\lambda_2=0,$$

$$-\lambda_3+\lambda_4=-1, \qquad \lambda_1+i\lambda_2=0.$$

Lako se vidi da su rešenja ovog sistema (njegova determinanta je već izračunata, $\Delta=-4i$) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, $\lambda_4=-1$, tako da pišemo:

$$A_1=-1\cdot\sigma_4.$$

Slično se nalazi

$$A_2=1\cdot\sigma_1; \qquad A_3=-1\cdot\sigma_1.$$

8.5. Linearnu nezavisnost zadanih matrica $m_1, m_2, \dots m_6$ ispitujemo na isti način kao i u prethodnom zadatku. Matrična jednačina

$$\alpha_1 m_1+\alpha_2 m_2+\cdots+\alpha_6 m_6=\theta$$

se svodi, kao što je lako proveriti, na sledeći sistem od šest linearnih i homogenih algebarskih jednačina:

$$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4+2\alpha_5+2\alpha_6=0,$$

$$-6\alpha_2-\alpha_3+2\alpha_4+5\alpha_5+4\alpha_6=0,$$

$$2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3+4\alpha_4-3\alpha_5-4\alpha_6=0,$$

$$2\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_4+3\alpha_5+3\alpha_6=0,$$

$$\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_4+3\alpha_5+3\alpha_6=0,$$

$$\alpha_1+\alpha_4+\alpha_5-\alpha_6=0.$$

Determinanta ovog sistema jednaka je nuli, kao što se može proveriti posle nešto glomaznijeg računanja. Netrivijalna rešenja su

$$\alpha_2=-\alpha_1, \qquad \alpha_3=\alpha_1, \qquad \alpha_4=0, \qquad \alpha_5=-\alpha_1, \qquad \alpha_6=0,$$

a α_1 ostaje proizvoljno. Dakle, zadanih šest matrica su linearno zavisne, i između njih postoji veza

$$\alpha_1 m_1-\alpha_1 m_2+\alpha_1 m_3-\alpha_1 m_5=0,$$

ili, nakon skraćivanja sa α_1:

$$m_1-m_2+m_3-m_5=0. \qquad (R.8.7)$$

Važenje ove relacije nije teško proveriti i direktno.

Na osnovu ovoga zaključujemo, da posmatrane matrice ne mogu biti uzete za algebarsku bazu prostora, ali su pet od njih (na primer bez m_1) linearno nezavisne. Činjenica da ovih šest matrica ne čine algebarsku bazu *ne znači*, razume se, da se zadane matrice M_1 i M_2 ni u kom slučaju neće moći izraziti pomoću njih. Naime, ove matrice mogu pripadati linealu nad linearno nezavisnim matricama $m_2, m_3, \dots m_6$. Pokušajmo, stoga, odrediti koeficijente $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_6$ tako da bude

$$\lambda_2 m_2+\lambda_3 m_3+\cdots+\lambda_6 m_6=M_1.$$

Nakon sređivanja leve strane i izjednačavanja korespondentnih matričnih elemenata leve i desne strane, dolazimo do jednog sistema od šest linearnih i nehomogenih jednačina po pet nepoznatih koeficijenata $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_6$. Ove jednačine su analoge malo pre napisanima, pa ih stoga ovde nećemo navoditi. Izdvojićemo pet od njih i rešiti ih, pa zatim ispitati da li rešenje zadovoljava i šestu jednačinu. U potvrdnom slučaju, matrica M_1 je element lineala nad linearno nezavisnim matricama (bez m_1). Postupajući tako sa dobijenim jednačinama, nalazimo rešenja

$$\lambda_2=\lambda_3=1, \qquad \lambda_4=3, \qquad \lambda_5=\lambda_6=-1,$$

što znači da postoji relacija

$$M_1=m_2+m_3+3m_4-m_5-m_6, \qquad (R.\ 8.8)$$

koja pokazuje da se matrica M_1 može prikazati kao linearna kombinacija matrica $m_2, m_3, \dots, m_6$. Analogni postupak, primenjen na matricu M_2 pokazaće da ona nije linearna kombinacija ovih pet matrica.

8.6. Traženi rezultat se može dobiti pomoću elementarnih trigonometrijskih transformacija. Naime, na osnovu Euler-ove formule možemo pisati:

$$\sin^3 t=\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3=$$

$$=\frac{e^{3it}-3e^{it}+3e^{-it}-e^{-3it}}{-8i}=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i}-3\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}(\sin 3t-3\sin t),$$

a takođe i:

$$\cos^2 t=\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2=\frac{e^{2it}+2+e^{-2it}}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos 2t),$$

tako da dobijamo:

$$x(t)=2\sin^3 t\cos t+3\cos^2 t=$$

$$=-\frac{1}{2}(\sin 3t-3\sin t)\cos t+\frac{3}{2}(1+\cos 2t)=$$

$$=-\frac{1}{2}\sin 3t\cos t+\frac{3}{2}\sin t\cos t+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos 2t.$$

Ako sad primenimo trigonometrijski identitet

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

dobićemo dalje:

$$x(t) = -\frac{1}{4}(\sin 4t+\sin 2t)+\frac{3}{4}\sin 2t+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos 2t,$$

odnosno, nakon sređivanja:

$$x(t)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{4}\sin 4t. \qquad (R.\ 8.9)$$

Poslednja relacija predstavlja traženi rezultat, tj. izražava zadanu funkciju kao element lineala nad datim beskonačnim skupom linearno nezavisnih funkcija.

8.7. Potrebno je da najpre eksplicitno napišemo prvih osam Legendre-ovih polinoma, pošto se funkcija $x(t)=t^7$ očevidno može predstaviti u obliku

$$x(t)=\alpha_0 P_0(t)+\alpha_1 P_1(t)+\cdots+\alpha_7 P_7(t). \qquad (R.\ 8.10)$$

Na osnovu opšte formule navedene u zadatku,

$$P_n(t)=\frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n,$$

lako nalazimo:

$$P_0(t)=\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$P_1(t)=\sqrt{\frac{3}{2}}\,t,$$

$$P_2(t)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3t^2-1),$$

$$P_3(t)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(5t^3-3t),$$

$$P_4(t)=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{9}{2}}(35t^4-30t^2+3),$$

$$P_5(t)=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{11}{2}}(63t^5-70t^3+15t),$$

$$P_6(t)=\frac{1}{16}\sqrt{\frac{13}{2}}(231t^6-315t^4+105t^2-5),$$

$$P_7(t)=\frac{1}{16}\sqrt{\frac{15}{2}}(429t^7-693t^5+315t^3-35t).$$

Uvrstimo li ove eksplicitne izraze u (*R.* 8.10) i nakon toga izjednačimo koeficijente uz iste stepene nezavisno promenljive sa leve i sa desne strane, dolazimo do sledećeg sistema jednačina za određivanje koeficijenata $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_7$:

$$\frac{429}{16}\sqrt{\frac{15}{2}}\alpha_7=1,$$

$$\frac{231}{16}\sqrt{\frac{13}{2}}\alpha_6=0,$$

$$\frac{63}{8}\sqrt{\frac{11}{2}}\alpha_5-\frac{693}{16}\sqrt{\frac{15}{2}}\alpha_7=0,$$

$$\frac{35}{8}\sqrt{\frac{9}{2}}\alpha_4-\frac{315}{16}\sqrt{\frac{13}{2}}\alpha_6=0,$$

$$\frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\alpha_3-\frac{70}{8}\sqrt{\frac{11}{2}}\alpha_5+\frac{315}{16}\sqrt{\frac{15}{2}}\alpha_7=0,$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\alpha_2-\frac{30}{8}\sqrt{\frac{9}{2}}\alpha_4+\frac{105}{16}\sqrt{\frac{13}{2}}\alpha_6=0,$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha_1-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\alpha_3+\frac{15}{8}\sqrt{\frac{11}{2}}\alpha_5-\frac{35}{16}\sqrt{\frac{15}{2}}\alpha_7=0,$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\alpha_0-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\alpha_2+\frac{3}{8}\sqrt{\frac{9}{2}}\alpha_4-\frac{5}{16}\sqrt{\frac{13}{2}}\alpha_6=0.$$

Iz napisanih jednačina se neposredno vidi da su svi koeficijenti sa parnim indeksima jednaki nuli, a za one sa neparnim indeksima lako nalazimo:

$$\alpha_1=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad \alpha_5=\frac{8}{39}\sqrt{\frac{2}{11}},$$

$$\alpha_3=\frac{14}{33}\sqrt{\frac{2}{7}}, \qquad \alpha_7=\frac{16}{429}\sqrt{\frac{2}{15}},$$

tako da traženi rezultat glasi:

$$t^7=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}P_1(t)+\frac{14}{33}\sqrt{\frac{2}{7}}P_3(t)+\frac{8}{39}\sqrt{\frac{2}{11}}P_5(t)+\frac{16}{429}\sqrt{\frac{2}{15}}P_7(t). \qquad (R.\ 8.11)$$

8.8. Označimo zadane matrice redom sa $m_1, m_2, \ldots m_6$, a zadane polinome sa $p_1(t), p_2(t), \ldots p_6(t)$. Ovi poslednji su očevidno linearno nezavisni (svaki naredni sadrži po jedan viši stepen nezavisno promenljive, pa se stoga sigurno

ne može izraziti kao linearna kombinacija prethodnih), dok se, za matrice to može lako proveriti, na način analogan onome u zadacima 8.4. i 8.5. Prema tome, zadani skupovi matrica i polinoma obrazuju, svaki u svom prostoru, po jednu algebarsku bazu.

Da bismo našli matricu koja se zadanim izmorfizmom pridružuje polinomu $P(t)$, treba ovaj najpre razložiti po elementima baze u svom prostoru, tj. treba naći koeficijente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ u relaciji

$$P(t) = \alpha_1 p_1(t) + \alpha_2 p_2(t) + \dots + \alpha_6 p_6(t). \qquad (R.\ 8.12)$$

Naime, prema (8.14) će matrica pridružena polinomu $P(t)$ onda biti

$$P(t) \longleftrightarrow m = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \dots + \alpha_6 m_6.$$

Da bismo našli tražene koeficijente, napišimo (*R.* 8.12) eksplicitno:

$$1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 = 2\alpha_1 + \alpha_2(3-t) + \alpha_3(1+t^2) +$$
$$+ \alpha_4(5 + 4t - 3t^2 - t^3) + \alpha_5(2 - 2t + t^3 + t^4) +$$
$$+ \alpha_6(3 + t - t^2 + 2t^4 + 3t^5).$$

Izjednačavajući koeficijente uz iste stepene nezavisno promenljive sa leve i sa desne strane ove jednakosti, za nalaženje traženih koeficijenata $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ dobijamo sledeći sistem od šest linearnih jednačina:

$$\begin{aligned}
&3\alpha_6 = -1,\\
&2\alpha_6 + \alpha_5 = 1,\\
&-\alpha_4 + \alpha_5 = -1,\\
&\alpha_3 - 3\alpha_4 - \alpha_6 = 1,\\
&-\alpha_2 + 4\alpha_4 - 2\alpha_5 + \alpha_6 = -1,\\
&2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 5\alpha_4 + 2\alpha_5 + 3\alpha_6 = 1.
\end{aligned}$$

Ovaj sistem je lako rešiti (svaka od napisanih jednačina se rešava po jednoj od nepoznatih veličina, ako se reše sve prethodne) i dobija se:

$$\alpha_1 = -\frac{71}{3}, \qquad \alpha_2 = 8, \qquad \alpha_3 = \frac{26}{3},$$

$$\alpha_4 = \frac{8}{3}, \qquad \alpha_5 = \frac{5}{3}, \qquad \alpha_6 = -\frac{1}{3}.$$

Pošto se, dakle, zadani polinom $P(t)$ može predstaviti kao:

$$P(t) = -\frac{71}{3} p_1(t) + 8p_2(t) + \frac{26}{3} p_3(t) + \frac{8}{3} p_4(t) + \frac{5}{3} p_5(t) - \frac{1}{3} p_6(t),$$

izomorfizam opisan u zadatku mu pridružuje matricu:

$$m = -\frac{71}{3} m_1 + 8m_2 + \frac{26}{3} m_3 + \frac{8}{3} m_4 - \frac{5}{3} m_5 - \frac{1}{3} m_6 =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{71}{3} & -\frac{71}{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{26}{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{26}{3} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{8}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -24 \\ \frac{37}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{31}{3} \end{pmatrix}.$$

Na analogi način možemo naći polinom $p(t)$ koji ovaj izomorfizam pridružuje matrici M. Napisaćemo najpre:

$$M = \beta_1 m_1 + \beta_2 m_2 + \dots + \beta_6 m_6, \qquad (R.\ 8.14)$$

tj.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \beta_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta_6 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

i odavde dobiti sistem jednačina za određivanje koeficijenata $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_6$, koji je oblika:

$$\begin{aligned}
\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= 0,\\
\beta_1 + \beta_6 &= 0,\\
\beta_2 + \beta_4 + \beta_5 &= 0,\\
\beta_4 &= 0,\\
\beta_6 &= 0,\\
\beta_3 + \beta_5 &= 1.
\end{aligned}$$

Rešenja su, kako je lako proveriti,

$$\beta_1 = \beta_4 = \beta_6 = 0, \qquad \beta_2 = -\frac{1}{2}, \qquad \beta_3 = \beta_5 = \frac{1}{2}$$

tako da možemo pisati:

$$M = -\frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 + \frac{1}{2} m_5.$$

Prema tome, polinom pridružen datim izomorfizmom matrici M je

$$p(t) = -\frac{1}{2}p_2(t) + \frac{1}{2}p_3(t) + \frac{1}{2}p_5(t) =$$

$$= -\frac{1}{2}(3-t) + \frac{1}{2}\cdot(1+t^2) + \frac{1}{2}(2-2t+t^3+t^4) =$$

$$= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^4.$$

Krajnji rezultati se sad mogu napisati u konciznom obliku:

$$1-t+t^2-t^3+t^4-t^5 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} -7 & -24 \\ \dfrac{37}{3} & \dfrac{8}{3} \\ -\dfrac{1}{3} & \dfrac{31}{3} \end{bmatrix}, \qquad (R.\ 8.15)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \frac{1}{2}(-t+t^2+t^3+t^4). \qquad (R.\ 8.16)$$

8.9. Treba dokazati da $\rho_1(x, y)$ zadovoljava aksiome rastojanja (8.17) – (8.19) ako su oni ispunjeni za $\rho(x, y)$. Prva dva aksioma (nenegativnost i simetričnost) su trivijalno ispunjena, kao što se lako vidi, tako da je potrebno dokazati samo važenje relacije trougla.

U tom cilju zapazimo da je $\rho_1(x, y)$ uvek manje od jedinice. Veza između $\rho(x, y)$ i $\rho_1(x, y)$ se eksplicitnim rešavanjem po $\rho(x, y)$ može napisati i u obliku:

$$\rho(x, y) = \frac{\rho_1(x, y)}{1-\rho_1(x, y)},$$

odakle se dobija:

$$\rho(x, z) + \rho(z, y) = \frac{\rho_1(x, z)}{1-\rho_1(x, z)} + \frac{\rho_1(z, y)}{1-\rho_1(z, y)} =$$

$$= \frac{\rho_1(x, z)+\rho_1(z, y)-2\rho_1(x, z)\rho_1(z, y)}{1-\rho_1(x, z)-\rho_1(z, y)+\rho_1(x, z)\rho_1(z, y)}.$$

Za $\rho(x,y)$ važi relacija trougla, tako da možemo staviti

$$\rho(x, z) + \rho(z, y) \geq \rho(x, y)$$

i iz prethodne relacije na taj način dobiti:

$$\frac{\rho_1(x, z)+\rho_1(z, y)-2\rho_1(x, z)\rho_1(z, y)}{1-\rho_1(x, z)-\rho_1(z, y)+\rho_1(x, z)\rho_1(z, y)} \geq \frac{\rho_1(x, y)}{1-\rho_1(x, y)}.$$

Oslobađanjem od imenilaca (oba imenioca su pozitivna, tako da pri množenju gornje nejednačine njihovim proizvodom ne treba menjati smer znaka nejednakosti) i sređivanjem dobijamo dalje:

$$\rho_1(x, y) \leq \rho_1(x, z) + \rho_1(z, y) - \rho_1(x, z)\rho_1(z, y)[2-\rho_1(x, y)].$$

Pošto je izraz u srednjoj zagradi uvek pozitivan (jer je ρ_1 uvek manje od jedinice, kao što smo već istakli), zadnji član sa desne strane nije negativan, pa imamo definitivno:

$$\rho_1(x, y) \leq \rho_1(x, z) + \rho_1(z, y),$$

što je trebalo pokazati.

8.10. (a) Na osnovu relacije trougla možemo pisati niz očevidnih nejednakosti:

$$\rho(x_1, x_m) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_m),$$

$$\rho(x_2, x_m) \leq \rho(x_2, x_3) + \rho(x_3, x_m),$$

$$\rho(x_3, x_m) \leq \rho(x_3, x_4) + \rho(x_4, x_m), \ \ldots,$$

pa ako ih uvrstimo u prvu, odmah dobijamo:

$$\rho(x_1, x_m) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_m) \leq$$

$$\leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \rho(x_3, x_m) \leq$$

$$\leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \rho(x_3, x_4) + \rho(x_4, x_m) \leq \cdots$$

$$\cdots \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m). \qquad (R.\ 8.17)$$

(b) Na osnovu upravo dokazane nejednakosti možemo pisati:

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, u) + \rho(u, z),$$

$$\rho(y, u) \leq \rho(y, x) + \rho(x, z) + \rho(z, u),$$

odakle se, prebacivanjem srednjeg člana desne strane na levu, dobija dalje:

$$\rho(x, z) - \rho(y, u) \leq \rho(x, y) + \rho(u, z),$$

$$\rho(y, u) - \rho(x, z) \leq \rho(y, x) + \rho(z, u).$$

Desne strane obeju nejednačina su jednake, na osnovu aksioma simetričnosti rastojanja, a leve strane imaju istu apsolutnu vrednost. Dakle

$$|\rho(x, z) - \rho(y, u)| \leq \rho(x, y) + \rho(u, z), \qquad (R.\ 8.18)$$

što je i trebalo dokazati. Dobijena nejednakost je poznata kao *relacija četvorougla*.

(c) Stavimo li sad u dokazanu relaciju četvorougla $z = u$, dobijamo direktno

$$|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y), \qquad (R.\ 8.19)$$

jer onda $\rho(u, z)$ prelazi u $\rho(z, z)$, što je jednako nuli, prema prvom aksiomu rastojanja. Tako dobijena nejednačina se obično naziva *druga relacija trougla*. U običnom trodimenzionalnom realnom Euklidovom prostoru, naime, nejednačina (*R.* 8.19) se svodi na tvrdnju da je apsolutna vrednost razlike dveju strana trougla manja od treće strane.

9. UNITARNI I HILBERTOVI PROSTORI

9.1. Neka je $x=\lim_{n\to\infty} x_n$. Na osnovu osobine distributivnosti skalarnog proizvoda (9.3) imaćemo onda:

$$(x, y)-(x_n, y)=(x\ominus x_n, y),$$

pa primenom Schwarz-ove nejednačine (9.8) dolazimo do:

$$|(x, y)-(x_n, y)|=|(x\ominus x_n, y)|<\sqrt{(x\ominus x_n, x\ominus x_n)}\sqrt{(y, y)},$$

tj.

$$|(x, y)-(x_n, y)|<\|x\ominus x_n\|\;\|y\|. \tag{R 9.1}$$

Pošto je $x=\lim_{n\to\infty} x_n$, to je $\|x\ominus x_n\|$ rastojanje n-tog elementa niza (x_n) od tačke nagomilavanja, i ako se uzme dovoljno veliko $n>n_0(\varepsilon)$ može se postići da za svako $n>n_0(\varepsilon)$ to rastojanje bude $\|x\ominus x_n\|<\dfrac{\varepsilon}{\|y\|}$, gde je ε unapred zadan pozitivan broj, koji može biti proizvoljno mali. No, onda iz (*R.* 9.1) sledi:

$$|(x, y)-(x_n, y)|<\varepsilon$$

za svako $n>n_0(\varepsilon)$, tj. (x, y) je tačka nagomilavanja *niza brojeva* (x_n, y). Drugim rečima

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y)=(x, y)=(\lim_{n\to\infty} x_n, y), \tag{R. 9.2}$$

što je trebalo dokazati.

9.2. Zadana relacija direktno sledi iz jednačine (9.10) koja povezuje normu i skalarni proizvod u ermitskom prostoru. Uzimajući u obzir i relaciju (*e*) iz zadatka 8.1. nalazimo:

$$\|x\oplus y\|^2+\|x\ominus y\|^2=(x\oplus y, x\oplus y)+(x\ominus y, x\ominus y)=$$
$$=(x\oplus y, x\oplus y)+(x\oplus(-1)y, x\oplus(-1)y)=$$
$$=(x, x)+(x, y)+(y, x)+(y, y)+$$
$$+(x, x)-(x, y)-(y, x)+(y, y).$$

Zadnja jednakost se dobija množenjem član po član, uz korišćenje osobina distributivnosti (9.3), (9.6) i asocijativnosti (9.2), (9.5) skalarnog proizvoda. Sređivanjem dobijenog rezultata izlazi:

$$\|x\oplus y\|^2+\|x\ominus y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2, \tag{R. 9.3}$$

što predstavlja traženu ***relaciju paralelograma.***

9.3. Proverimo najpre da li izraz $[x, y]$ ima osobinu ermitske simetrije. Imamo:

$$[x, y]=\left\|\frac{y\oplus x}{2}\right\|^2-\left\|\frac{y\ominus x}{2}\right\|^2-i\left\|\frac{y\oplus ix}{2}\right\|^2+i\left\|\frac{y\ominus ix}{2}\right\|^2.$$

Uzimajući u obzir osobine operacije sabiranja u linearnom vektorskom prostoru i osobine norme, imaćemo dalje:

$$[y, x]=\left\|\frac{x\oplus y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{(-1)(x\ominus y)}{2}\right\|^2-i\left\|\frac{i(x\ominus iy)}{2}\right\|^2+i\left\|\frac{(-i)(x\oplus iy)}{2}\right\|^2=$$
$$=\left\|\frac{x\oplus y}{2}\right\|^2-|-1|^2\left\|\frac{x\ominus y}{2}\right\|^2-i\,|i|^2\left\|\frac{x\ominus iy}{2}\right\|^2+i\,|-i|^2\left\|\frac{x\oplus iy}{2}\right\|^2=$$
$$=\left\|\frac{x\oplus y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x\ominus y}{2}\right\|^2-i\left\|\frac{x\ominus iy}{2}\right\|^2+i\left\|\frac{x\oplus iy}{2}\right\|^2.$$

S druge strane, izmenom znaka imaginarne jedinice u izrazu za $[x, y]$ nalazimo:

$$\overline{[x, y]}=\left\|\frac{x\oplus y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x\ominus y}{2}\right\|^2+i\left\|\frac{x\oplus iy}{2}\right\|^2-i\left\|\frac{x\ominus iy}{2}\right\|^2$$

(ova izmena znaka se *ne vrši* u izrazima čija se norma uzima, pošto je norma realan i negativan broj). Upoređivanjem napisanih izraza lako vidimo da je zaista

$$[y, x]=\overline{[x, y]}, \tag{R. 9.4}$$

tako da izraz $[x, y]$ ima osobinu ermitske simetrije (9.1).

Kao sledeći korak, ispitaćemo postojanje osobine distributivnosti (9.3). U tom ćemo cilju izračunati $[\xi_1\oplus\xi_2, y]+[\xi_1\ominus\xi_2, y]$, vodeći računa o činjenici da, prema zadatku, važi relacija paralelograma (*R.* 9.3). Dobićemo:

$$[\xi_1\oplus\xi_2, y]+[\xi_1\ominus\xi_2, y]=$$
$$=\left\|\frac{\xi_1\oplus\xi_2\oplus y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{\xi_1\oplus\xi_2\ominus y}{2}\right\|^2-i\left\|\frac{\xi_1\oplus\xi_2\oplus iy}{2}\right\|^2+i\left\|\frac{\xi_1\oplus\xi_2\ominus iy}{2}\right\|^2+$$
$$+\left\|\frac{\xi_1\ominus\xi_2\oplus y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{\xi_1\ominus\xi_2\ominus y}{2}\right\|^2-i\left\|\frac{\xi_1\ominus\xi_2\oplus iy}{2}\right\|^2+i\left\|\frac{\xi_1\ominus\xi_2\ominus iy}{2}\right\|^2=$$
$$=\frac{1}{4}(\|\xi_1\oplus y\oplus\xi_2\|^2+\|\xi_1\oplus y\ominus\xi_2\|^2)-\frac{1}{4}(\|\xi_1\ominus y\oplus\xi_2\|^2+\|\xi_1\ominus y\ominus\xi_2\|^2)-$$
$$-i\frac{1}{4}(\|\xi_1\oplus iy\oplus\xi_2\|^2+\|\xi_1\oplus iy\ominus\xi_2\|^2)+i\frac{1}{4}(\|\xi_1\ominus iy\oplus\xi_2\|^2+\|\xi_1\ominus iy\ominus\xi_2\|^2)=$$

$$=\frac{1}{4}(2\|\xi_1\oplus y\|^2+2\|\xi_2\|^2)-\frac{1}{4}(2\|\xi_1\ominus y\|^2+2\|\xi_2\|^2)-$$

$$-i\frac{1}{4}(2\|\xi_1\oplus iy\|^2+2\|\xi_2\|^2)+i\frac{1}{4}(2\|\xi_1\ominus iy\|^2+2\|\xi_2\|^2).$$

U prvoj od napisanih jednakosti je iskorišćena definicija izraza $[x, y]$, u drugoj je uzeta u obzir homogenost norme $\left(\text{izvučen faktor } \frac{1}{4}\right)$ i komutativnost unutrašnje kompozicije, a u trećoj relacija paralelograma. Zapazimo da li se članovi sa $\|\xi_2\|^2$ potiru, zadnju jednakost možemo prepisati i u obliku:

$$[\xi_1\oplus\xi_2, y]+[\xi_1\ominus\xi_2, y]=$$

$$=2\left(\frac{1}{4}\|\xi_1\oplus y\|^2-\frac{1}{4}\|\xi_1\ominus y\|^2\right)+2\left(-i\frac{1}{4}\|\xi_1\oplus iy\|^2+i\frac{1}{4}\|\xi_1\ominus iy\|^2\right)=$$

$$=2[\xi_1, y]. \qquad (R. 9.5)$$

Stavimo li u ovu relaciju $\xi_2=\xi_1$, dobićemo:

$$[2\xi_1, y]+[\theta, y]=2[\xi_1, y].$$

Drugi član leve strane jednak je nuli, što se može lako proveriti stavljanjem $x=\theta$ u definicionu jednačinu za $[x, y]$. Zaista,

$$[\theta, y]=\left\|\frac{\theta\oplus y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{\theta\ominus y}{2}\right\|^2-i\left\|\frac{\theta\oplus iy}{2}\right\|^2+i\left\|\frac{\theta\ominus iy}{2}\right\|^2=$$

$$=\frac{1}{4}\|y\|^2-\frac{1}{4}\|-y\|^2-i\frac{1}{4}\|iy\|^2+i\frac{1}{4}\|-iy\|^2=0.$$

Prema tome, imamo:

$$[2\xi_1, y]=2[\xi_1, y]. \qquad (R. 9.6)$$

Stavimo sada u $(R. 9.5)$ $\xi_1\oplus\xi_2=x_1$, $\xi_1\ominus\xi_2=x_2$. Dobijamo:

$$[x_1, y]+[x_2, y]=2\left[\frac{1}{2}(x_1\oplus x_2), y\right]=\left[2\cdot\frac{1}{2}(x_1\oplus x_2), y\right]=[x_1\oplus x_2, y].$$

Primenjene transformacije se zasnivaju na upravo dokazanoj jednačini $(R. 9.6)$. Dakle, za $[x, y]$ zaista važi distributivnost svojstvena skalarnom proizvodu:

$$[x_1\oplus x_2, y]=[x_1, y]+[x_2, y]. \qquad (R. 9.7)$$

Ostaje još da se proveri da li $[x, y]$ ima osobinu asocijativnosti, izraženu relacijama (9.2) i (9.5). Dokazivanje se mora izvoditi postepeno: najpre se proverava postojanje ove osobine za cele pozitivne brojeve, zatim za cele racionalne, nakon toga za bilo kakve realne pozitivne brojeve (racionalne i iracionalne), pa za negativne realne brojeve, i na kraju za kompleksne.

Da postoji asocijativnost kada su u pitanju pozitivni celi brojevi može se videti iz distributivnosti $(R. 9.7)$. Zaista, za $x_1=x_2$ izlazi

$$[2x_1, y]=2[x_1, y],$$

a zatim, opet zbog distributivnosti,

$$[3x_1, y]=[x_1\oplus 2x_1, y]=[x_1, y]+[2x_1, y]=$$
$$=[x_1, y]+2[x_1, y]=3[x_1, y], \ \ldots \text{ itd.}$$

Sledeći korak je proveravanje asocijativnosti za racionalne brojeve. U tom cilju razmotrimo sledeće očevidne jednakosti:

$$[x_1, y]=\left[\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)x_1, y\right]=n\left[\frac{1}{n}x_1, y\right]$$

koje važe, na osnovu upravo dokazane osobine, za svako celo i pozitivno n. Dakle,

$$\frac{1}{n}[x_1, y]=\left[\frac{1}{n}x_1, y\right].$$

Množenjem ove jednakosti sa celim pozitivnim brojem m, dobićemo:

$$\frac{m}{n}[x_1, y]=m\left[\frac{1}{n}x_1, y\right]=\left[\frac{m}{n}x_1, y\right], \qquad (R. 9.8)$$

odakle se vidi da asocijativnost važi i za racionalne pozitivne brojeve (svaki racionalan broj se može prikazati kao količnik dva cela broja). Iracionalni brojevi se mogu predstaviti kao granične vrednosti nizova racionalnih brojeva, a norma (koja se pojavljuje u definicionom izrazu za $[x, y]$) ima osobinu neprekidnosti. Formalno dokazivanje ovog tvrđenja o neprekidnosti norme $(\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|\lim_{n\to\infty}x_n\|)$ analogo je dokazivanju neprekidnosti skalarnog proizvoda iz zadatka 9.1. i ostavlja se čitaocu za samostalnu vežbu.

Ako je, dakle $\alpha=\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ neki iracionalan broj koji predstavlja graničnu vrednost niza racionalnih brojeva α_n, imaćemo na osnovu $(R. 9.8)$:

$$\alpha[x, y]=\lim_{n\to\infty}\alpha_n[x, y]=\lim_{n\to\infty}[\alpha_n x, y]=[\lim_{n\to\infty}\alpha_n x, y],$$

u poslednjoj jednakosti je iskorišćena pomenuta neprekidnost norme. Dakle, relacija

$$\alpha[x, y]=[\alpha x, y]$$

važi ma za kakve pozitivne brojeve.

Da bismo ispitali važenje analoge formule i za negativne brojeve uočićemo najpre da je, po definiciji,

$$[(-x), y]=\left\|\frac{(-x)\oplus y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{(-x)\ominus y}{2}\right\|^2-i\left\|\frac{(-x)\oplus iy}{2}\right\|^2+i\left\|\frac{(-x)\ominus iy}{2}\right\|^2=$$

$$=\left\|\frac{-(x\ominus y)}{2}\right\|^2-\left\|\frac{-(x\oplus y)}{2}\right\|^2-i\left\|\frac{-(x\ominus iy)}{2}\right\|^2-i\left\|\frac{-(x\oplus iy)}{2}\right\|^2=$$

$$=\left\|\frac{x\ominus y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x\ominus y}{2}\right\|^2-i\left\|\frac{x\ominus iy}{2}\right\|^2+i\left\|\frac{x\ominus iy}{2}\right\|^2; \qquad (R. 9.9)$$

sve izvršene transformacije su zasnovane na osobinama unutrašnje kompozicije u linearnom vektorskom prostoru i na aksiomima norme. Pregrupisavanjem članova krajnje jednakosti lako vidimo da je

$$[(-x),\ y]=-[x,\ y].$$

Na osnovu ovoga možemo sad dokazati da važi i:

$$[-\alpha x,\ y]=-[\alpha x,\ y]=-\alpha[x,\ y];$$

poslednja jednačina je napisana na osnovu gore dokazanog važenja asocijativnosti izraza $[x,\ y]$ za pozitivne racionalne brojeve. Dakle, pomenuta osobina važi i za negativne racionalne brojeve.

Postupajući na isti način kao u (*R.* 9.9), možemo dokazati da važi i

$$[ix,\ y]=-i[x,\ y], \qquad (R.\ 9.10)$$

kao direktna posledica definicije izraza $[x,\ y]$. Prema tome, i za bilo koji čisto kompleksan broj $i\beta$ imaćemo:

$$[i\beta x,\ y]=-i[\beta x,\ y]=-i\beta[x,\ y],$$

jer je ma za koji realan broj β dokazano važenje asocijativnosti. Sad možemo razmotriti i najopštiji slučaj:

$$[\lambda x,\ y]=[(\lambda'+i\lambda'')x,\ y]=[(\lambda' x\oplus i\lambda'' x),\ y]=$$
$$=[\lambda' x,\ y]+[i\lambda'' x,\ y]=\lambda'[x,\ y]-i\lambda''[x,\ y]=$$
$$=(\lambda'-i\lambda'')[x,\ y]=\bar{\lambda}[x,\ y],$$

što se poklapa sa relacijom (9.5). Time je pokazano da $[x,\ y]$ zaista ima sve osobine skalarnog proizvoda, tj. da se svaki normirani prostor sa tako definisanom normom da važi relacija paralelograma može učiniti ermitskim.

Ukoliko je posmatrani prostor već ermitski, i njegova norma izvire iz skalarnog proizvoda u skladu sa jednačinom (9.10), moći ćemo pisati:

$$[x,\ y]=\left(\frac{x\oplus y}{2},\ \frac{x\oplus y}{2}\right)-\left(\frac{x\ominus y}{2},\ \frac{x\ominus y}{2}\right)-$$
$$-i\left(\frac{x\oplus iy}{2},\ \frac{x\oplus iy}{2}\right)+i\left(\frac{x\ominus iy}{2},\ \frac{x\ominus iy}{2}\right).$$

Množeći napisane izraze član po član i sređujući, nalazimo definitivno:

$$[x,\ y]=(x,\ y), \qquad (R.\ 9.11)$$

tj. ako je u pitanju ermitski prostor, izraz $[x,y]$ se poklapa sa skalarnim proizvodom.

9.4. Neka su $x=(\xi_1,\ \xi_2,\dots,\ \xi_n)$ i $y=(\eta_1,\ \eta_2,\ \dots,\ \eta_n)$ dva elementa prostora $R_n^{(\gamma)}$. Proverimo da li

$$(x,\ y)=\sum_{i,\ j=1}^{n}\gamma_{ij}\,\xi_i\,\eta_j \qquad (R.\ 9.12)$$

ima sve osobine skalarnog proizvoda. Posmatrajmo najpre:

$$(y,\ x)=\sum_{i,\ j=1}^{n}\gamma_{ij}\,\eta_i\,\xi_j=\sum_{i,\ j=1}^{n}\gamma_{ji}\,\xi_i\,\eta_j=(x,\ y);$$

u drugoj sumi su oznake indeksa i i j zamenjene. Ermitska simetrija se, zbog realnosti svih razmatranih brojeva, svodi na osobinu komutativnosti. Dalje imamo:

$$(x,\ \lambda y)=\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{ij}\,\xi_i(\lambda\eta_j)=\lambda\sum_{i,\ j=1}^{n}\gamma_{ij}\,\xi_i\,\eta_j=\lambda(x,\ y),$$

što dokazuje važenje aksioma asocijativnosti (9.2). Slično imamo i:

$$(x_1\oplus x_2,\ y)=\sum_{i,\ j=1}^{n}\gamma_{ij}\left(\xi_i^{(1)}+\xi_i^{(2)}\right)\eta_j=$$
$$=\sum_{i,\ j=1}^{n}\gamma_{ij}\,\xi_i^{(1)}\eta_j+\sum_{i,\ j=1}^{n}\gamma_{ij}\,\xi_i^{(2)}\eta_j=(x_1,\ y)+(x_2,\ y),$$

tako da važi i osobina distributivnosti (9.3). Najzad, aksiom (9.4) sledi iz uslova pozitivne definitnosti, specificiranog u zadatku. Naime:

$$(x,\ x)=\sum_{i,\ j=1}^{n}\gamma_{ij}\,\xi_i\,\xi_j\geq 0,$$

pri čemu je očevidno da će biti $(x,\ x)=0$ samo ako je $\xi_1=\xi_2=\dots=\xi_n=0$, tj. ako je $x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_n)=(0,\ 0,\ \dots,\ 0)=\theta$. Dakle, izraz (*R.* 9.12) ima sve potrebne osobine skalarnog proizvoda u realnom n-dimenzionalnom Euklidovom prostoru.

9.5. Radeći kao u prethodnom zadatku, konstatujemo da $\gamma(t)$ mora biti realna, pozitivna i integrabilna funkcija u intervalu $[a,\ b]$.

9.6. Relacija

$$\alpha_1 x_1\oplus\alpha_2 x_2\oplus\cdots+\alpha_n x_n=\theta \qquad (R.\ 9.13)$$

može se skalarnim množenjem redom sa $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ zameniti sledećim sistemom jednačina:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(x_1,\ x_1)+\alpha_2(x_1,\ x_2)+\cdots+\alpha_n(x_1,\ x_n)=0,\\
&\alpha_1(x_2,\ x_1)+\alpha_2(x_2,\ x_2)+\cdots+\alpha_n(x_2,\ x_n)=0,\\
&\qquad\cdots\qquad\qquad\cdots\\
&\alpha_1(x_n,\ x_1)+\alpha_2(x_n,\ x_2)+\cdots+\alpha_n(x_n,\ x_n)=0.
\end{aligned} \qquad (R.\ 9.14)$$

Ovaj sistem se sastoji od n linearnih i homogenih jednačina po koeficijentima $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n$. On može imati netrivijalna rešenja (to će odgovarati slučaju kad su dati elementi linearno *zavisni*), ako je njegova determinanta jednaka nuli. Ako je, pak, ova determinanta različita od nule sistem će imati samo trivijalna

rešenja $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, tj. posmatrani elementi su linearno ***nezavisni***. Determinanta sistema je:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \cdots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \cdots & (x_2, x_n) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \cdots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}, \qquad (R. 9.15)$$

tj. to je upravo *Gramm-ova determinanta*.

9.7. Postupajući kao u zadatku 9.4, proveravamo osobine skalarnog proizvoda redom:

$$(y, x) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \overline{\eta_{ij}} \xi_{ij} = \overline{\left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \eta_{ij} \overline{\xi_{ij}} \right)} = \overline{(x, y)};$$

$$(x, \lambda y) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \overline{\xi_{ij}} (\lambda \eta_{ij}) = \lambda \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \overline{\xi_{ij}} \eta_{ij} = \lambda (x, y);$$

$$(x_1 + x_2, y) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} (\overline{\xi_{ij}^{(1)} + \xi_{ij}^{(2)}}) \eta_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \overline{\xi_{ij}^{(1)}} \eta_{ij} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \overline{\xi_{ij}^{(2)}} \eta_{ij} =$$

$$= (x_1, y) + (x_2, y);$$

$$(x, x) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \overline{\xi_{ij}} \xi_{ij} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} |\xi_{ij}|^2 \geq 0.$$

Iz poslednje napisane jednačine jasno se vidi da će (x, x) biti jednako nuli samo ako su svi elementi ξ_{ij} ponaosob jednaki nuli, tj. ako je x nula-matrica.

9.8. (*a*) Da bi zadane matrice bile ortogonalne, mora njihov skalarni proizvod biti jednak nuli. Prema obrascu za skalarni proizvod iz prethodnog zadatka, imaćemo

$$(m_1, m_2) = 1 + 2\overline{\alpha} + |\alpha|^2 - 2 + 4 = |\alpha|^2 + 2\overline{\alpha} + 3,$$

tako da se uslov ortogonalnosti $(m_1, m_2) = 0$ svodi u ovom slučaju na:

$$|\alpha|^2 + 2\overline{\alpha} + 3 = 0.$$

Stavimo $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ i sredimo:

$$\alpha'^2 + \alpha''^2 + 2(\alpha' - i\alpha'') + 3 = 0. \qquad (R. 9.16)$$

Izjednačavanjem posebno realnog i imaginarnog dela sa nulom, nalazimo:

$$\alpha'^2 + \alpha''^2 + 2\alpha' + 3 = 0,$$

$$2\alpha'' = 0.$$

Rešenja ovog sistema su, kako je lako proveriti, $\alpha'' = 0$ i $\alpha' = -1 \pm \sqrt{2}\, i$. Pošto se za α' dobijaju kompleksna rešenja, suprotno pretpostavci da je α' realno, zaključujemo da nije moguće odrediti α tako da bude $(m_1, m_2) = 0$.

(*b*) Nađimo najpre matricu $m_1 - m_2$. Direktan račun daje:

$$m_1 - m_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & \alpha - 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Prema tome, formula (9.11) daje za rastojanje između m_1 i m_2:

$$\rho^2 (m_1, m_2) = \|m_1 - m_2\|^2 =$$

$$= 4 + 9 + 9 + 9 + (\alpha - 2)(\overline{\alpha} - 2) =$$

$$= |\alpha|^2 - 2(\alpha + \overline{\alpha}) + 35.$$

Stavimo li opet $\alpha = \alpha' + i\alpha''$, nalazimo

$$\rho (m_1, m_2) = \sqrt{\alpha'^2 + \alpha''^2 - 4\alpha' + 35}. \qquad (R. 9.17)$$

Iz uslova $\frac{\partial \rho}{\partial \alpha'} = 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial \alpha''} = 0$ neposredno izlazi $\alpha' = \frac{1}{2}$, $\alpha'' = 0$. Nije teško proveriti da će izraz $\left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial \alpha'^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \alpha''^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \alpha' \partial \alpha''} \right]_{\substack{\alpha' = \frac{1}{2} \\ \alpha'' = 0}}$ biti pozitivan, tako da nađena rešenja odgovaraju zaista minimumu. Korespondentno minimalno rastojanje ima vrednost:

$$\rho_{min} = \frac{\sqrt{133}}{4}.$$

(*c*) Norme zadanih matrica su:

$$\|m_1\|^2 = 1 + 4 + 2|\alpha|^2 + 4 + 1 = 2|\alpha|^2 + 10,$$

$$\|m_2\|^2 = 1 + 4 + |\alpha|^2 + 9 + 1 + 16 = |\alpha|^2 + 31.$$

Da bi ove norme bile jednake, mora važiti jednačina

$$2|\alpha|^2 + 10 = |\alpha|^2 + 31,$$

iz koje neposredno nalazimo $|\alpha|^2 = 21$, tj. α mora biti neki (kompleksan) broj čiji je modul jednak $\sqrt{21}$.

9.9. Zadane matrice moraju, na prvom mestu, biti linearno nezavisne. Postupajući kao u zadatku 8.4. lako konstatujemo da one to zaista i jesu i mogu se, stoga, uzeti za elemente jedne algebarske baze u datom prostoru. Da bismo ovu bazu zamenili ekvivalentnom ortonormiranom bazom, najpre prema (9.32) pišemo:

$$m_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$m_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \gamma_{21} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{21} & 1 + 3\gamma_{21} \\ 2 & 2 + 2\gamma_{21} \end{pmatrix},$$

$$m_3^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \gamma_{32} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \gamma_{31} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 + \gamma_{31} & 1 + \gamma_{32} + 3\gamma_{31} \\ 2\gamma_{32} & -2 + \gamma_{32} + 2\gamma_{31} \end{pmatrix}.$$

$$m_4^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_{43}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \gamma_{42}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \gamma_{41}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+4\gamma_{43}+\gamma_{41} & 1+\gamma_{43}+\gamma_{42}+3\gamma_{41} \\ 2\gamma_{42} & -2\gamma_{43}+2\gamma_{42}+2\gamma_{41} \end{pmatrix}.$$

Neodređene koeficijente γ_{ij} odredićemo iz uslova da svaka od napisanih matrica bude ortogonalna na sve prethodne. Pri tom ortogonalnost shvatamo u smislu skalarnog proizvoda iz zadatka 9.7. Dakle:

$$(m_2^*, m_1^*) = \gamma_{21} + 3(1+3\gamma_{21}) + 2(2+2\gamma_{21}) =$$
$$= 7 + 14\gamma_{21} = 0.$$

Odavde izlazi $\gamma_{21} = -\frac{1}{2}$, tako da za matricu m_2^* nalazimo:

$$m_2^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (R.\ 9.18)$$

Iskoristimo dalje uslove $(m_3^*, m_2^*) = 0$ i $(m_3^*, m_1^*) = 0$. Imaćemo:

$$(m_3^*, m_2^*) = -\frac{1}{2}(4+\gamma_{31}) - \frac{1}{2}(1+\gamma_{32}+3\gamma_{31}) + 4\gamma_{32} + (-2+2\gamma_{32}+2\gamma_{31}) =$$
$$= \frac{11}{2}\gamma_{32} - \frac{9}{2} = 0;$$

$$(m_3^*, m_1^*) = 4 + \gamma_{31} + 3(1+\gamma_{32}+3\gamma_{31}) + 2(-2+2\gamma_{32}+2\gamma_{31}) =$$
$$= 7\gamma_{32} + 14\gamma_{31} + 3 = 0.$$

Rešenja ovih jednačina su, kako je lako proveriti, $\gamma_{32} = \frac{63}{77}$, $\gamma_{31} = -\frac{48}{77}$. Za matricu m_3^* imamo:

$$m_3^* = \begin{pmatrix} \frac{260}{77} & -\frac{4}{77} \\ \frac{126}{77} & -\frac{124}{77} \end{pmatrix}. \qquad (R.\ 9.19)$$

Pređimo sad na uslove $(m_4^*, m_3^*) = 0$, $(m_4^*, m_2^*) = 0$ i $(m_4^*, m_1^*) = 0$. Imamo eksplicitno:

$$(m_4^*, m_3^*) = \frac{260}{77}(2+4\gamma_{43}+\gamma_{41}) - \frac{4}{77}(1+\gamma_{43}+\gamma_{42}+3\gamma_{41}) +$$
$$+ \frac{126}{77}(2\gamma_{42}) - \frac{124}{77}(-2\gamma_{43}+2\gamma_{42}+2\gamma_{41}) =$$
$$= \frac{1}{77}(1284\gamma_{43}+516) = 0;$$

$$(m_4^*, m_2^*) = -\frac{1}{2}(2+4\gamma_{43}+\gamma_{41}) - \frac{1}{2}(1+\gamma_{43}+\gamma_{42}+3\gamma_{41}) +$$
$$+ 4\gamma_{42} - 2\gamma_{43} + 2\gamma_{42} + 2\gamma_{41} =$$
$$= -\frac{1}{2}(9\gamma_{43} - 11\gamma_{42} + 3) = 0;$$

$$(m_4^*, m_1^*) = 2 + 4\gamma_{43} + \gamma_{41} + 3(1+\gamma_{43}+\gamma_{42}+3\gamma_{41}) +$$
$$+ 2(-2\gamma_{43}+2\gamma_{42}+2\gamma_{41}) =$$
$$= 3\gamma_{43} + 7\gamma_{42} + 14\gamma_{41} + 5 = 0.$$

Odavde sukcesivnim rešavanjem nalazimo $\gamma_{43} = -\frac{43}{107}$, $\gamma_{42} = -\frac{6}{107}$, $\gamma_{41} = -\frac{26}{107}$. Tako se za matricu m_4^* dobija:

$$m_4^* = \begin{pmatrix} \frac{16}{107} & -\frac{20}{107} \\ -\frac{12}{107} & \frac{22}{107} \end{pmatrix}. \qquad (R.\ 9.20)$$

Potrebno je sad još nađene matrice m_1^*, m_2^*, m_3^* i m_4^* normirati. Lako je proveriti da su njihove norme:

$$\|m_1^*\| = \sqrt{14}, \quad \|m_2^*\| = \frac{1}{2}\sqrt{22}, \quad \|m_3^*\| = \frac{1}{77}\sqrt{98\,868}, \quad \|m_4^*\| = \frac{1}{107}\sqrt{1284}.$$

tako da tražene ortonormirane matrice imaju oblik:

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$
$$M_3 = \frac{1}{\sqrt{98\,868}}\begin{pmatrix} 260 & -4 \\ 126 & -124 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \frac{1}{\sqrt{1284}}\begin{pmatrix} 16 & -20 \\ -12 & 22 \end{pmatrix}. \qquad (R.\ 9.21)$$

Može se jednostavnim računom i neposredno proveriti da su ove matrice uzajamno ortogonalne (u smislu skalarnog proizvoda iz zadatka 9.7.) i da su im norme jednake jedinici.

9.10. Ako, prema zadatku, uzmemo

$$m_1' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad m_2' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_3' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad m_4' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

treba, u skladu sa Schmidt-ovim postupkom ortogonalizacije razmotriti sistem:

$$(m_1')^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$(m_2')^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta_{21}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4\beta_{21} & 1+\beta_{21} \\ 0 & -2\beta_{21} \end{pmatrix},$$

$$(m_3')^* = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix} + \beta_{32}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \beta_{31}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1+2\beta_{32}+4\beta_{31} & 3+\beta_{32}+\beta_{31}\\ 0 & 2-2\beta_{31}\end{pmatrix},$$

$$(m_4')^* = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix} + \beta_{43}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix} + \beta_{42}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \beta_{41}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\beta_{43}+2\beta_{42}+4\beta_{41} & 1+3\beta_{43}+\beta_{42}+\beta_{41}\\ 2 & 2+2\beta_{43}-2\beta_{41}\end{pmatrix}.$$

Određivanje koeficijenata β_{ij} se vrši na isti način kao i u prethodnom zadatku, iz uslova da je svaka od napisanih matrica ortogonalna na sve prethodne. Izostavljajući stoga detalje računa, imamo:

$$(m_2')^* = \begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{4}{7}\\ 0 & \frac{6}{7}\end{bmatrix}, \quad (m_3')^* = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad (m_4')^* = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Norme nađenih matrica su, kako je takođe lako proveriti:

$$\|(m_1')^*\| = \sqrt{21}, \quad \|(m_2')^*\| = \frac{\sqrt{56}}{7}, \quad \|(m_3')^*\| = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad \|(m_4')^*\| = 2,$$

tako da definitivno imamo:

$$M_1' = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}, \quad M_2' = \frac{1}{\sqrt{56}}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 6\end{pmatrix},$$

$$M_3' = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad M_4' = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \qquad (R.\ 9.22)$$

Sada treba matrice (*R.* 9.21) iz prethodnog zadatka uzeti za elemente ortonormirane baze i razložiti matrice (*R.* 9.22) po njima, tj. naći koeficijente α_{ij} iz relacija:

$$\begin{aligned}M_1' &= \alpha_{11} M_1 + \alpha_{12} M_2 + \alpha_{13} M_3 + \alpha_{14} M_4,\\ M_2' &= \alpha_{21} M_1 + \alpha_{22} M_2 + \alpha_{23} M_3 + \alpha_{24} M_4,\\ M_3' &= \alpha_{31} M_1 + \alpha_{32} M_2 + \alpha_{33} M_3 + \alpha_{34} M_4,\\ M_4' &= \alpha_{41} M_1 + \alpha_{42} M_2 + \alpha_{43} M_3 + \alpha_{44} M_4.\end{aligned} \qquad (R.\ 9.23)$$

Zbog ortonormiranosti matrica (*R.* 9.21), neposredno nalazimo da je:

$$\alpha_{ij} = (M_i', M_j) \qquad (R.\ 9.24)$$

Izračunavanje ovih skalarnih proizvoda ostavljamo čitaocu za vežbu. Za matricu tipa 4×4 sa elementima α_{ij} može se i bez tog izračunavanja videti da *mora biti ortogonalna*. Naime, iz (*R.* 9.23) imamo:

$$(M_i', M_j') = \left(\sum_{k=1}^{4} \alpha_{ik} M_k, \sum_{l=1}^{4} \alpha_{jl} M_l\right) = \sum_{k,l=1}^{4} \alpha_{ik}\alpha_{jl}(M_k, M_l).$$

U poslednjoj jednakosti je uzeto u obzir da su traženi koeficijenti sigurno realni. Pošto je $(M_k, M_l) = \delta_{kl}$ i $(M_i', M_j') = \delta_{ij}$ zbog ortonormiranosti odgovarajućih matrica, iz gornje jednačine se dalje dobija:

$$\delta_{ij} = \sum_{k,l=1}^{4} \alpha_{ik}\alpha_{jl}\delta_{kl} = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{ik}\alpha_{jk}, \qquad (R.\ 9.25)$$

što se poklapa sa osobinom (5.20) ortogonalnih matrica.

9.11. Polazeći od zadatih funkcija $x_0(t) = 1,\ x_1(t) = t,\ x_2(t) = t^2, \ldots$ obrazujemo najpre, u skladu sa (9.32), funkcije

$$\begin{aligned}x_0^*(t) &= 1,\\ x_1^*(t) &= t + \gamma_{10},\\ x_2^*(t) &= t^2 + \gamma_{21} t + \gamma_{20},\\ x_3^*(t) &= t^3 + \gamma_{32} t^2 + \gamma_{31} t + \gamma_{30},\\ \ldots &\quad \ldots \quad \ldots\end{aligned}$$

a zatim koeficijente γ_{ij} određujemo tako da svaka od gornjih funkcija bude ortogonalna na sve prethodne. To nije teško efektivno uraditi po analogiji sa prethodna dva zadatka, pa se stoga prepušta za samostalnu vežbu.

Na ovom mestu ćemo tvrđenje zadatka dokazati na drugi, nešto manje neposredan način. Dokazaćemo, naime, da su Legendre-ovi polinomi (9.66) ortonormirani, a pošto je $P_n(t)$ polinom n-tog stepena, on se mora s tačnošću do numeričkog koeficijenta onda poklapati sa $x_n^*(t)$. Time će biti dokazano da se Schmidt-ovim postupkom ortogonalizacije zaista dobijaju Legendre-ovi polinomi.

Za dokazivanje ortonormiranosti Legendre-ovih polinoma uočavamo najpre da je

$$\left[\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^n\right]_{t=-1} = \left[\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^n\right]_{t=+1} = 0, \qquad (R.\ 9.26)$$

za svako $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, što je lako proveriti. Prema tome, ako radi određenosti stavimo $n > m$, imaćemo

$$(P_m(t), P_n(t)) = \frac{\sqrt{m+\frac{1}{2}}}{2^m \cdot m!}\frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{2^n \cdot n!}\int_{-1}^{+1}\frac{d^m}{dt^m}(t^2-1)^m\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n\,dt.$$

Primenimo li parcijalnu integraciju i zapazimo da je, zbog (*R.*9.26), prointegrirani deo uvek jednak nuli, dobićemo:

$$(P_m(t), P_n(t)) = -\frac{\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2^{m+n}\cdot m!\,n!}\int_{-1}^{+1}\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}(t^2-1)^m\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^2-1)^n\,dt =$$

$$= \ldots = (-1)^n\frac{\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2^{m+n}\cdot m!\,n!}\int_{-1}^{+1}\left[\frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}}(t^2-1)^m\right](t^2-1)^n\,dt.$$

Ako je, u skladu sa učinjenom pretpostavkom, $m<n$, onda je očevidno $\frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}}(t^2-1)^m=0$, jer polinom $(t^2-1)^m$ ima samo izvode do $(2m)$-tog reda zaključno različite od nule, i $\frac{d^{2m}}{dt^{2m}}(t^2-1)^m=(2m)!$. Time je dokazana ortogonalnost polinoma $P_m(t)$ i $P_n(t)$ pri $m<n$. Ako, pak, stavimo $m=n$, iz gornjeg rezultata nalazimo:

$$(P_n(t),\ P_n(t))=(-1)^n\frac{n+\frac{1}{2}}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{+1}(2n)!\,(t^2-1)^n dt=$$

$$=\frac{(2n+1)(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_0^1(1-t^2)^n dt;$$

transformacije u drugoj jednačini su zasnovane na parnosti preostalog integranda. Smenom $t=\cos z$ integral se svodi na oblik iz koga je lako neposredno videti da je vrednost posmatranog skalarnog proizvoda jednaka jedinici, tako da je i norma svakog od datih polinoma takođe jednaka jedinici. Napomenimo da se u matematičkoj literaturi Legendre-ovi polinomi obično uvode kao

$$\bar{P}_n(t)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n \qquad (R.\ 9.27)$$

$\left[\text{bez faktora } \sqrt{n+\frac{1}{2}} \text{ koji figuriše u jednačini (9.66)}\right]$, tako da njihova norma nije jednaka jedinici, već važi

$$\int_{-1}^{+1}\bar{P}_m(t)\bar{P}_n(t)\,dt=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn}, \qquad (R.\ 9.28)$$

kao što se može naći u mnogim monografijama posvećenim specijalnim funkcijama. Polinomi ($R.$ 9.27) mogu u mnogim razmatranjima biti od koristi, jer zadovoljavaju uslov

$$\bar{P}_n(1)=1, \qquad (R.\ 9.29)$$

za svako n.

9.12. Za prostor $E_k^{(2)}\ni x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_k)$, nejednačine (9.8) i (9.9) poprimaju sledeći konkretan oblik

$$\left|\sum_{\nu=1}^{k}\bar{\xi}_\nu\eta_\nu\right|^2\leq\left(\sum_{\nu=1}^{k}|\xi_\nu|^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{k}|\eta_\nu|^2\right), \qquad (R.\ 9.30)$$

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{k}|\xi_\nu+\eta_\nu|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leq\left\{\sum_{\nu=1}^{k}|\xi_\nu|^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\sum_{\nu=1}^{k}|\eta_\nu|^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (R.\ 9.31)$$

Nejednačina ($R.$ 9.30) se u ovom posebnom slučaju ponekad naziva i *Cauchy-jeva* (često i *Cauchy-Schwarz-ova*) i, kako se lako vidi, posledica je Hölder-ove nejednačine navedene u zadatku 8.2. Nejednačina ($R.$ 9.31) je takođe poseban slučaj opšte Minkowski-jeve nejednačine iz zadatka 8.2. za $p=2$.

U prostoru l_2 imamo

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\bar{\xi}_\nu\eta_\nu\right|^2\leq\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_\nu|^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|\eta_\nu|^2\right), \qquad (R.\ 9.32)$$

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_\nu+\eta_\nu|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leq\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_\nu|^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\eta_\nu|^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad (R.\ 9.33)$$

što se poklapa sa gore navedenim relacijama za $E_k^{(2)}$ u graničnom prelazu $k\to\infty$ (ovaj granični prelaz se sme vršiti jedino ako dobijeni redovi konvergiraju, tj. jedino ako se radi o elementima prostora l_2, a ne bilo kakvim nizovima).

Najzad, u prostoru $L_2(a,\ b)$ imaćemo:

$$\left|\int_a^b\bar{x}(t)y(t)\,dt\right|^2\leq\left(\int_a^b|x(t)|^2dt\right)\left(\int_a^b|y(t)|^2dt\right), \qquad (R.\ 9.34)$$

$$\left\{\int_a^b|x(t)+y(t)|^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}\leq\left\{\int_a^b|x(t)|^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\int_a^b|y(t)|^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (R.\ 9.35)$$

Integrale koji se ovde pojavljuju treba shvatiti u Lebesgue-ovom smislu, s obzirom na prirodu prostora $L_2(a,\ b)$.

9.13. Prepišemo li Bessel-ovu jednačinu (9.53) u podesnijem obliku $\|x\|^2=\sum_{\nu=1}^{\infty}|(x_\nu,\ x)|^2$, za zadane prostore i zadane potpune ortonormirane sisteme elemenata u njima dobijamo:

$$\int_{-1}^{+1}|x(t)|^2dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+\frac{1}{2}}{2^{2n}(n!)^2}\left|\int_{-1}^{+1}x(t)\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n dt\right|^2,$$

$$\int_0^{\infty}|x(t)|^2dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left|\int_0^{\infty}x(t)e^{\frac{t}{2}}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\,dt\right|^2,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!\sqrt{\pi}}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{\frac{t^2}{2}}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2})\,dt\right|^2.$$

S druge strane, Parseval-ova jednačina (9.54) daje:

$$\int_{-1}^{+1}\bar{x}(t)y(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+\frac{1}{2}}{2^{2n}(n!)^2}\left[\int_{-1}^{+1}\bar{x}(t)\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n dt\right]\left[\int_{-1}^{+1}y(t)\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n dt\right],$$

$$\int_0^{\infty}\bar{x}(t)y(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left[\int_0^{\infty}\bar{x}(t)e^{\frac{t}{2}}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\,dt\right]\left[\int_0^{\infty}y(t)e^{\frac{t}{2}}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\,dt\right],$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{x}(t)y(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{x}(t)e^{\frac{t^2}{2}}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2})\,dt\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)e^{\frac{t^2}{2}}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2})\,dt\right].$$

I ovde se svi napisani integrali moraju shvatiti u Lebesque-ovom smislu.

9.14. Izračunajmo najpre Fourier-ove koeficijente zadane funkcije $x(t)=e^{-t}$:

$$\alpha_n=(x_n,\ x)=\int_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!}e^{\frac{t}{2}}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\,e^{-t}\,dt,\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Napisani integral nije teško izračunati, ako se prethodno uoči da je

$$\left[\frac{d^m}{dt^m}(t^n e^{-t})\right]_{t=0}=\left[\frac{d^m}{dt^m}(t^n e^{-t})\right]_{t=\infty}=0$$

za svako $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$. Sredujući izraz za α_n i primenjujući zatim parcijalnu integraciju dobićemo:

$$\alpha_n=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\,dt=$$

$$=\ldots=\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{2^n}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}}(t^n e^{-t})\,dt,$$

jer svaki put prointegrirani deo je nula. Daljim parcijalnim integracijama (prointegrirani deo je opet nula) nalazimo konačno:

$$\alpha_n=\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{2^n}\int_0^\infty t^n e^{-\frac{3t}{2}}\,dt=\frac{(-1)^n}{3^n}\cdot\frac{2}{3},$$

tako da traženi Fourier-ov razvoj glasi:

$$e^{-t}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}\left[\frac{(-1)^n}{n!}e^{\frac{t}{2}}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\right]. \qquad (R.\ 9.36)$$

Radi bolje uočljivosti, elementi zadanog ortonormiranog sistema su odvojeni uglastom zagradom.

9.15. I ovde ćemo najpre izračunati Fourier-ove koeficijente zadane funkcije $x(t)=e^{-t}$ u odnosu na elemente datog ortonormiranog sistema (ovde taj sistem nije i potpun):

$$\alpha_{2n}=\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{2n+\frac{1}{2}}}{2^{2n}\cdot(2n)!}\,e^{-t}\frac{d^{2n}}{dt^{2n}}(t^2-1)^{2n}\,dt.$$

Uzastopnim parcijalnim integracijama, vodeći računa o osobini (*R.* 9.26) iz zadatka 9.11 na osnovu koje je prointegrirani deo uvek jednak nuli, nalazimo:

$$\alpha_{2n}=\frac{\sqrt{2n+\frac{1}{2}}}{2^{2n}\cdot(2n)!}\int_{-1}^{+1}e^{-t}\frac{d^{2n}}{dt^{2n}}(t^2-1)^{2n}\,dt=$$

$$=\ldots=\frac{\sqrt{2n+\frac{1}{2}}}{2^{2n}\cdot(2n)!}\int_{-1}^{+1}e^{-t}(t^2-1)^{2n}\,dt. \qquad (R.\ 9.37)$$

Integral koji se ovde pojavio vezan je za Bessel-ove funkcije i može se naći u priručnicima i monografijama posvećenim pitanjima ovih funkcija. On ima vrednost

$$\int_{-1}^{+1}e^{-t}(t^2-1)^{2n}\,dt=\sqrt{2\pi}\,2^{2n}\cdot(2n)!\ I_{2n+\frac{1}{2}}(1), \qquad (R.\ 9.38)$$

gde je $I_s(z)=(-i)^s J_s(iz)$ tzv. modifikovana Bessel-ova funkcija s-tog reda. Za Fourier-ove koeficijente (*R.* 9.37) tako izlazi:

$$\alpha_{2n}=\sqrt{(4n+1)\pi}\ I_{2n+\frac{1}{2}}(1),$$

i traženi Fourier-ov razvoj je oblika:

$$y(t)=\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{4n+1}\ I_{2n+\frac{1}{2}}(1)\ P_{2n}(t) \qquad (R.\ 9.39)$$

Prema dokazanim teoremama, ovaj razvoj konvergira, u smislu metrike u $L_2(-1,\ +1)$, ali ne konvergira nužno ka polaznoj funkciji $x(t)=e^{-t}$, pošto funkcije $P_{2n}(t)$ ne obrazuju potpun ortonormiran sistem. Da bismo odredili funkciju $y(t)$, napišimo Fourier-ov razvoj funkcije $x(t)=e^{-t}$ po *svim* Legendre-ovim polinomima. On ima oblik

$$e^{-t}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n P_n(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n}P_{2n}(t)+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}P_{2n+1}(t),$$

u kome su Fourier-ovi koeficijenti samo naznačeni, radi kratkoće. Stavimo sad $-t$ umesto t u gornju jednačinu i uzmimo u obzir da su Legendre-ovi polinomi parnog reda parne funkcije, a neparnog — neparne. Dakle:

$$e^{t}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n}P_{2n}(-t)+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}P_{2n+1}(-t)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n}P_{2n}(t)-\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}P_{2n+1}(t).$$

Sabiranjem poslednjih dveju jednačina nalazimo

$$e^{-t}+e^{t}=2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n}P_{2n}(t),\quad \text{tj.}\quad y(t)=\frac{1}{2}(e^{-t}+e^{t})=\text{ch}\,t. \qquad (R.\ 9.40)$$

10. LINEARNI OPERATORI

10.1. Dokažimo najpre da su zadanim relacijama uopšte definisani operatori, tj. da je $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots)$ zaista element prostora l_2 ako je to $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots)$, odnosno ako $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^2$ konvergira. Posmatrajmo najpre relaciju (a) i ispitajmo da li $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu|^2$ konvergira. Možemo pisati:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{1}{2^\nu}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\xi_j\right|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2\nu}}\left|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\xi_j\right|^2 <$$

$$< \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2\nu}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2^j}\xi_j\right|\right)^2 <$$

$$< \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2\nu}}\left(\left[\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2^j}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

Prva od napisanih jednakosti rezultira iz činjenice da moduo sume nije veći od sume modula, a druga proizilazi iz Hölder-ove nejednačine (zadatak 8.2.), ako se uzme $p=q=2$. Na osnovu obrasca za zbir beskonačne geometrijske progresije imamo dalje

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{1}{2^j}\right|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4^j} = \frac{1}{3}$$

tako da je

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu|^2 < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2\nu}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 = \frac{1}{3}\|x\|^2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2\nu}} = \frac{1}{9}\|x\|^2,$$

jer je $\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 = \|x\|^2$ prema jednačini (9.15), a suma po ν je ponovo ista beskonačna progresija. Prema tome, $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu|^2$ je manja od nekog konačnog broja, tako da je zaista $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots)\in l_2$. Dobijeni rezultat možemo konciznije prepisati kao $\|y\|^2<\frac{1}{9}\|x\|^2$, odakle se onda upoređivanjem sa (10.30)

vidi i da je zadani operator ograničen, $\|A\|<\frac{1}{3}$. Linearnost ovog operatora je očevidna i njeno proveravanje se ostavlja čitaocu za samostalnu vežbu. Isto je očevidno da je domen ovog operatora ceo prostor l_2.

Pređimo sada na operator definisan relacijom (b). Proverićemo najpre da je to zaista operator. Postupajući kao gore, nalazimo:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\xi_j\right|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\xi_j\right|^2 <$$

$$< \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{1}{j}\xi_j\right|^2 <$$

$$< \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\right)\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^2 = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^2;$$

poslednji izraz je napisan u skladu sa poznatim rezultatom iz matematičke analize, $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$. Prepišemo li dobijenu relaciju u obliku $\|y\|^2<\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2\|x\|^2$, zaključujemo opet da zadana relacija definiše operator čiji je domen ceo prostor l_2, i to ograničen operator, $\|B\|<\frac{\pi^2}{6}$. Linearnost je i ovde očevidna.

10.2. Na osnovu jednačina (10.43) i (10.53) svaki ermitski operator mora zadovoljavati uslov $(x, Ay)=(Ax, y)$, ma za koje elemente prostora u kome dejstvuje. Proverimo da li ovaj uslov važi kod zadanih operatora. U slučaju pod (a) imaćemo:

$$(x, Ay) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{\xi}_\nu (Ay)_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{\xi}_\nu\left(\frac{1}{2^\nu}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\eta_j\right)=$$

$$=\sum_{j,\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu+j}}\bar{\xi}_\nu\eta_j = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^j}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}\bar{\xi}_\nu\right)\right]\eta_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\left[\overline{\frac{1}{2^j}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}\xi_\nu\right)}\right]\eta_j = \sum_{j=1}^{\infty}\overline{(Ax)_j}\,\eta_j = (Ax, y).$$

Sve transformacije su očevidne i svode se u suštini samo na izmenu redosleda sumiranja. Nađeni rezultat pokazuje da je zadani operator zaista ermitski. Slično se dokazuje ova osobina kod operatora (b):

$$(x, By) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\bar{\xi}_\nu (By)_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty}\bar{\xi}_\nu\left(\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\eta_j\right)=$$

$$=\sum_{j,\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu j}\bar{\xi}_\nu\eta_j = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{1}{j}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\bar{\xi}_\nu\right)\right]\eta_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\left[\overline{\frac{1}{j}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\xi_\nu\right)}\right]\eta_j = \sum_{j=1}^{\infty}\overline{(Bx)_j}\,\eta_j = (Bx, y).$$

Da bismo našli spektre svojstvenih vrednosti ovih operatora, zapazimo najpre da za svako $x \in l_2$ sume $\alpha(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \xi_j$ i $\beta(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \xi_j$ sigurno konvergiraju. To je posledica Hölder-ove nejednačine, analizirane u zadatku 8.2, na osnovu koje (za $p=q=2$), možemo pisati:

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \xi_j < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} |\xi_j| < \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4^j}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \|x\|,$$

$$\beta(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \xi_j < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} |\xi_j| < \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|x\|.$$

To znači da možemo pisati:

$$y = Ax = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots) = \left(\frac{1}{2} \alpha(x), \frac{1}{2^2} \alpha(x), \frac{1}{2^3} \alpha(x), \ldots\right) =$$

$$= \alpha(x) \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots\right),$$

i analogo za drugi operator:

$$y = Bx = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots) = \left(\beta(x), \frac{1}{2} \beta(x), \frac{1}{3} \beta(x), \ldots\right) =$$

$$= \beta(x) \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right).$$

Ove jednačine pokazuju da operatori A i B svim elementima prostora l_2 pridružuju elemente koji su proporcionalni jednom istom elementu prostora. Kao što se neposredno vidi, to je $x_A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots\right)$ za prvi operator, i $x_B = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$ za drugi. Ova situacija je analoga slučaju linearnog afinora kod klasičnih tenzora.

Prema tome, jedini svojstveni element koji ovi operatori mogu imati je upravo x_A odnosno x_B. Svojstvene vrednosti ćemo onda naći iz:

$$Ax_A = \alpha(x_A) x_A \quad Bx_B = \beta(x_B) x_B.$$

Dakle:

$$\lambda_A = \alpha(x_A) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j}\right)^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4^j} = \frac{1}{3},$$

$$\lambda_B = \beta(x_B) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pošto smo u prethodnom zadatku našli da su norme ovih operatora $\|A\| < \frac{1}{3}$ i $\|B\| < \frac{\pi^2}{6}$, dobijeni rezultati pokazuju da kod oba operatora možemo uzeti znak jednakosti u ovim relacijama, jer je $\|Ax_A\| = \lambda_A \|x_A\|$, odnosno $\|Bx_B\| = \lambda_B \|x_B\|$.

10.3. Nađimo najpre operatore AB i BA, polazeći od definicije (10.22). Imamo:

$$(AB)x(t) = A[Bx(t)] = Ax(-t) =$$

$$= \int_{-1}^{+1} (t^2 - st + 2s^2) x(-s)\, ds =$$

$$= \int_{-1}^{+1} (t^2 + \sigma t + 2\sigma^2) x(\sigma)\, d\sigma;$$

u poslednjem intervalu je izvršena smena $s = -\sigma$. S druge strane,

$$(BA)x(t) = B[Ax(t)] = B \int_{-1}^{+1} (t^2 - st + 2s^2) x(s)\, ds =$$

$$= \int_{-1}^{+1} (t^2 + st + 2s^2) x(s)\, ds.$$

Upoređivanjem oba rezultata nalazimo

$$(AB \hat{-} BA) x(t) = 0,$$

$$(AB \hat{+} BA) x(t) = \int_{-1}^{+1} 2(t^2 + st + 2s^2) x(s)\, ds.$$

Dakle, operatori A i B komutiraju (samim tim njihov komutator je ograničen, jer je to nulti operator). Antikomutator ovih operatora A_1 se može prikazati kao integralni Fredholm-ov operator, čije jezgro je $K_1(t, s) = 2(t^2 + st + 2s^2)$. Da bismo ispitali da li je ovaj operator ograničen, napišimo relaciju $y = A_1 x$ konkretno kao:

$$y(t) = \int_{-1}^{+1} 2(t^2 + st + 2s^2) x(s)\, ds.$$

Odavde nalazimo

$$\|y\|^2 = \int_{-1}^{+1} |y(t)|^2 dt = \int_{-1}^{+1} \left| \int_{-1}^{+1} 2(t^2 + st + 2s^2) x(s)\, ds \right|^2 dt <$$

$$< \int_{-1}^{+1} \left[\int_{-1}^{+1} |2(t^2 + st + 2s^2) x(s)|\, ds \right]^2 dt <$$

$$< \int_{-1}^{+1} \left[\int_{-1}^{+1} |2(t^2 + st + 2s^2)|^2 ds \right] \left[\int_{-1}^{+1} |x(s)|^2 ds \right] dt =$$

$$= \|x\|^2 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} |2(t^2 + st + 2s^2)|^2 ds\, dt.$$

Izvršene transformacije su potpuno analoge onima u zadatku 10.1. i zasnivaju se na činjenici da je moduo integrala manji ili najviše jednak integralu modula integranda (prva nejednakost) i na Hölderovoj relaciji za $p = q = 2$ (druga

nejednakost). Sračunamo li još preostali dvojni integral po s i t, lako nalazimo da se gornja relacija može napisati kao:

$$\|y\|^2 \le \|x\|^2 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 4(t^2+st+2s^2)^2\,ds\,dt = \frac{224}{9}\|x\|^2,$$

ili

$$\|y\| \le \frac{\sqrt{224}}{3}\|x\|.$$

Antikomutator zadanih operatora je, dakle, takođe ograničen, i za njegovu normu nalazimo $\|AB \dotplus BA\| \le \frac{\sqrt{224}}{3} \approx 5$.

10.4. Da je $C = A \dotplus B$ ograničen operator sledi iz nejednačine Minkowskog za normu, (8.37) odnosno (9.9). Zaista, imamo:

$$\begin{aligned}\|Cx\| &= \|(A \dotplus B)x\| = \|Ax \oplus Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le \\ &\le \|A\|\,\|x\| + \|B\|\,\|x\| = (\|A\| + \|B\|)\|x\|;\end{aligned}$$

druga od napisanih nejednakosti je posledica ograničenosti operatora A i B i zasniva se na (10.30). Iz dobijenog rezultata čitamo da je C onda ograničen operator i da je $\|C\| \le \|A\| + \|B\|$, što je trebalo dokazati.

Ograničenost proizvoda dva ograničena operatora sledi direktno iz (10.30):

$$\begin{aligned}\|Dx\| &= \|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \le \\ &\le \|A\|\,\|Bx\| \le \|A\|\,\|B\|\,\|x\|,\end{aligned}$$

i, kako se neposredno vidi, $\|D\| \le \|A\|\,\|B\|$.

10.5. Iskoristićemo drugu od jednačina (10.31). Označićemo sa $\mathbf{e}$ proizvoljan jedinični vektor i napisaćemo:

$$\|\mathcal{T}\| = \sup_{|\mathbf{e}|=1} |(\mathcal{T}\cdot\mathbf{e})\cdot\mathbf{e}|.$$

Pre nego što pređemo na izračunavanje ovog supremuma, rastavićemo zadani tenzor na simetrični i antisimetrični deo, $\mathcal{T} = \mathcal{S} + \mathcal{A}$ i zapazićemo da je u izrazu $(\mathcal{T}\cdot\mathbf{e})\cdot\mathbf{e} = (\mathcal{S}\cdot\mathbf{e})\cdot\mathbf{e} + (\mathcal{A}\cdot\mathbf{e})\cdot\mathbf{e}$ drugi sabirak jednak nuli, jer je na osnovu osobine (4.30) konjugovanih tenzora i komutativnosti skalarnog proizvoda

$$(\mathcal{A}\cdot\mathbf{e})\cdot\mathbf{e} = (\mathbf{e}\cdot\mathcal{A}^*)\cdot\mathbf{e} = \mathbf{e}\cdot(\mathcal{A}^*\cdot\mathbf{e}) = (\mathcal{A}^*\cdot\mathbf{e})\cdot\mathbf{e} = -(\mathcal{A}\cdot\mathbf{e})\cdot\mathbf{e},$$

odakle se, zbog $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$, vidi da je $(\mathcal{A}\cdot\mathbf{e})\cdot\mathbf{e} = 0$. Dakle, za normu tenzora možemo pisati i

$$\|\mathcal{T}\| = \sup_{|\mathbf{e}|=1} |(\mathcal{S}\cdot\mathbf{e})\cdot\mathbf{e}|. \tag{R. 10.1}$$

Pošto je tenzor $\mathcal{S}$ simetričan, on ima sigurno tri realne svojstvene vrednosti λ_1, λ_2 i λ_3, i tri uzajamno ortogonalna svojstvena pravca, čije ćemo jedinične

vektore označiti sa $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$. Gore pomenuti jedinični vektor $\mathbf{e}$ se može prikazati kao $\mathbf{e} = \alpha_1\mathbf{e}_1' + \alpha_2\mathbf{e}_2' + \alpha_3\mathbf{e}_3'$. Onda je

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\cdot\mathbf{e} &= \mathcal{S}\cdot(\alpha_1\mathbf{e}_1' + \alpha_2\mathbf{e}_2' + \alpha_3\mathbf{e}_3') = \alpha_1\mathcal{S}\cdot\mathbf{e}_1' + \alpha_2\mathcal{S}\cdot\mathbf{e}_2' + \alpha_3\mathcal{S}\cdot\mathbf{e}_3' = \\ &= \alpha_1\lambda_1\mathbf{e}_1' + \alpha_2\lambda_2\mathbf{e}_2' + \alpha_3\lambda_3\mathbf{e}_3',\end{aligned}$$

pa za normu nalazimo:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}\| &= \sup_{|\mathbf{e}|=1} |(\alpha_1\lambda_1\mathbf{e}_1' + \alpha_2\lambda_2\mathbf{e}_2' + \alpha_3\lambda_3\mathbf{e}_3')\cdot(\alpha_1\mathbf{e}_1' + \alpha_2\mathbf{e}_2' + \alpha_3\mathbf{e}_3')| = \\ &= \sup_{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1} |\alpha_1^2\lambda_1 + \alpha_2^2\lambda_2 + \alpha_3^2\lambda_3|.\end{aligned} \tag{R. 10.2}$$

Ekstremume funkcije $\lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 + \lambda_3\alpha_3^2$ uz uslov $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ možemo naći prema pravilu za nalaženje vezanih ekstremuma. Nakon jednostavnog izračunavanja nalazimo da se ekstremumi dostižu kad je jedna od promenljivih α_i jednaka jedinici, a ostale dve jednake nuli; vrednost funkcije je onda jednaka pripadajućoj svojstvenoj vrednosti λ_i. Izraz (*R.* 10.2) imaće, dakle, supremum jednak

$$\|\mathcal{T}\| = \sup_{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1} |\lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 + \lambda_3\alpha_3^2| = \max_{i=1,2,3} |\lambda_i|. \tag{R. 10.3}$$

Norma ma kog tenzora jednaka je apsolutnoj vrednosti najveće svojstvene vrednosti njegovog simetričnog dela.

Za tenzor iz zadatka rastavljanje na simetrični i antisimetrični deo je:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Simetrični deo $\mathcal{S}$ je istovetan sa tenzorom iz zadatka 5.16. pod (a), tako da iz rešenja zadataka uz Glavu 5. nalazimo da su njegove svojstvene vrednosti $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Prema tome, norma je:

$$\|\mathcal{T}\| = \sup_{|\mathbf{e}|=1} |(\mathcal{T}\cdot\mathbf{e})\cdot\mathbf{e}| = \sup_{|\mathbf{e}|=1} |(\mathcal{S}\cdot\mathbf{e})\cdot\mathbf{e}| = 2.$$

Ovaj rezultat se neposredno generališe na unitarne konačno dimenzionalne prostore, gde je norma takođe iz istih razloga jednaka apsolutnoj vrednosti najveće svojstvene vrednosti ermitskog dela. Slična je situacija u Hilbertovim prostorima, jer je i tamo:

$$\begin{aligned}(Ax, x) &= \left(\frac{1}{2}(A \dotplus A^+)x, x\right) + \left(\frac{1}{2}(A - A^+)x, x\right) = \\ &= \left(\frac{A \dotplus A^+}{2}x, x\right).\end{aligned}$$

10.6. Na osnovu osobina skalarnog proizvoda u Hilbertovom prostoru i definicije adjungovanog operatora (10.43), možemo pisati sledeće jednakosti koje važe *za svako x i y iz datog prostora*.

$$(Ax, y) = (x, A^+ y) = \overline{(A^+ y, x)} = \overline{(y, (A^+)^+ x)} = ((A^+)^+ x, y).$$

Upoređivanjem prvog i zadnjeg izraza neposredno konstatujemo da je jednačina (10.45) zaista ispravna.

Da bismo proverili i relaciju (10.46), uporedićemo jednakost

$$((AB)\,x, y) = (x, (AB)^+ y),$$

koja takođe važi ma za kakvo x i y, sa

$$((AB)\,x, y) = (A\,(Bx), y) = (Bx, A^+ y) = (x, B^+ (A^+ y)) = \\ = (x, (B^+ A^+)\,y).$$

10.7. Pošto se radi o k-dimenzionalnom unitarnom prostoru, nalaženje svojstvenih vrednosti se svodi na rešavanje jednačine (10.42). Za operatore A i A^+ imamo respektivno:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2k} \\ & \cdots & & \cdots & \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \alpha_{k3} & & \alpha_{kk}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \overline{\alpha_{11}}-\lambda' & \overline{\alpha_{21}} & \overline{\alpha_{31}} & \cdots & \overline{\alpha_{k1}} \\ \overline{\alpha_{12}} & \overline{\alpha_{22}}-\lambda' & \overline{\alpha_{32}} & \cdots & \overline{\alpha_{k2}} \\ & \cdots & & \cdots & \\ \overline{\alpha_{1k}} & \overline{\alpha_{2k}} & \overline{\alpha_{3k}} & \cdots & \overline{\alpha_{kk}}-\lambda' \end{vmatrix} = 0,$$

jer se matrica adjungovanog operatora dobija adjungovanjem (konjugovanjem i transponovanjem) matrice polaznog operatora. Imajući u vidu okolnost da transponovanjem determinanta ne menja znak, zaključujemo da se razvijanjem gornjih dveju determinanti dobijaju dve algebarske jednačine k-tog reda, po λ i λ' respektivno, čiji su svi koeficijenti međusobno konjugovano-kompleksni. Prema tome, ako prva od tih jednačina ima rešenja $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, druga mora imati rešenja $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_k$. Time je dokazano prvo tvrđenje zadatka. *Svojstvene vrednosti uzajamno adjungovanih operatora su uzajamno konjugovano-kompleksne.*

Da bismo dokazali i tvrđenje iz drugog dela, odaberimo svojstvene elemente x_i i x'_j zadanih operatora i napišimo:

$$Ax_i = \lambda_i x_i, \quad A^+ x'_j = \lambda'_j x'_j = \overline{\lambda}_j x'_j.$$

Na osnovu ovoga imamo:

$$(Ax_i, x'_j) = (\lambda_i x_i, x'_j) = \overline{\lambda}_i (x_i, x'_j),$$

$$(Ax_i, x'_j) = (x_i, A^+ x'_j) = (x_i, \overline{\lambda}_j x'_j) = \overline{\lambda}_j (x_i, x'_j).$$

Pošto su oba polazna izraza jednaka, zaključujemo da je

$$(\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_j)(x_i, x'_j) = 0 \qquad (R.\ 10.4)$$

tj. ako je $\lambda_i \neq \lambda_j$ mora biti $(x_i, x'_j) = 0$, što dokazuje i drugi deo zadatka. Napomenimo da se o uzajamnom odnosu svojstvenih elemenata x_i i x'_j koji

pripadaju uzajamno konjugovano-kompleksnim svojstvenim vrednostima ne može ništa reći u opštem slučaju.

10.8. Da su proizvodi AA^+ i A^+A uvek ermitski operatori može se videti pomoću relacije $(AB)^+ = B^+A^+$, dokazane u zadatku 10.6. Na osnovu te relacije imamo:

$$(AA^+)^+ = (A^+)^+ A^+ = AA^+,$$

$$(A^+A)^+ = A^+(A^+)^+ = A^+A,$$

što su osobine ermitskih operatora [ovo je analogo relaciji (4.48) kod tenzora].

Sada ćemo dokazati da su sve svojstvene vrednosti ovih operatora pozitivne (one su sigurno realne, jer su operatori ermitski). Neka je λ jedna svojstvena vrednost operatora A^+A i neka je x pripadajući svojstveni element, $A^+Ax = \lambda x$. U tom slučaju imamo, s jedne strane

$$(A^+Ax, x) = (\lambda x, x) = \overline{\lambda}(x, x) = \lambda(x, x) = \lambda \|x\|^2,$$

a s druge strane

$$(A^+Ax, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2.$$

Izjednačavanjem zadnjih izraza u oba niza jednakosti nalazimo

$$\lambda = \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2}. \qquad (R.\ 10.5)$$

Sve svojstvene vrednosti moraju biti pozitivne, jer se svaka može prikazati kao količnik dva pozitivna broja u skladu sa napisanom jednačinom. Na analogi način dokazujemo i da su sve svojstvene vrednosti operatora AA^+ pozitivne.

Da bismo dokazali tvrđenje koje se odnosi na norme posmatranih operatora, pođimo od druge od jednačina (10.30):

$$\|A^+A\| = \sup_{\|x\|=1} |(A^+Ax, x)| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, Ax)| = \\ = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = (\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|)^2 = \|A\|^2; \qquad (R.\ 10.6)$$

poslednja jednakost rezultira iz prve od relacija (10.30). Dokaz analoge jednačine za $\|A^+A\|$ se dobija na isti način, vodeći računa o jednačini (10.48).

10.9. Pođimo od uzajamno ekvivalentnih jednačina (10.24). Prema drugoj od njih imamo $Ax = AA^{-1}y$, dok prva tvrdi $Ax = y$. Tako izlazi $AA^{-1}y = y$, tj. $AA^{-1} = I$. Ako, obrnuto, prema prvoj od pomenutih jednačina napišemo $A^{-1}y = A^{-1}Ax$ i uzmemo u obzir da druga glasi $A^{-1}y = x$, nalazimo $A^{-1}Ax = x$, tj. $A^{-1}A = I$. Time su dokazane relacije (10.25).

Da bismo dokazali i jednakost (10.26), iskoristićemo ponovo drugu od jednačina (10.24) i pisati:

$$(A^{-1})^{-1} x = (A^{-1})^{-1} (A^{-1} y) = [(A^{-1})^{-1} A^{-1}]\, y.$$

Izraz u srednjoj zagradi mora biti jedinični operator prema upravo dokazanoj relaciji (10.25), jer je to proizvod operatora A^{-1} i njemu inverznog operatora $(A^{-1})^{-1}$, a taj proizvod je operator I, u ma kom redosledu bio obrazovan. Dakle, dalje imamo:

$$(A^{-1})^{-1} x = [(A^{-1})^{-1} A^{-1}]\, y = Iy = y,$$

pa ako krajnji rezultat izrazimo pomoću prve od jednačina (10.24) neposredno dobijamo jednačinu (10.26), tj. $(A^{-1})^{-1}=A$.

10.10. Neka je λ jedna svojstvena vrednost operatora A i neka je x pripadajući svojstveni element. Iz jednačine $Ax=\lambda x$ primenom operatora A^{-1} na obe strane nalazimo $A^{-1}Ax=A^{-1}(\lambda x)=\lambda A^{-1}x$; poslednja jednakost rezultira iz linearnosti. Na osnovu relacije $A^{-1}A=I$, dokazane u prethodnom zadatku, možemo pisati dalje $x=\lambda A^{-1}x$, ili definitivno: $A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x$. Dobijeni rezultat pokazuje da je x svojstveni element i operatora A^{-1}, a pripadajuća svojstvena vrednost je $\frac{1}{\lambda}$. Dakle, *svojstvene vrednosti dvaju uzajamno inverznih operatora su uzajamno recipročne, a svojstveni elementi su jednaki.*

10.11. Dokaz je identičan onome u jednačinama (5.11)—(5.14), ukoliko se imaju u vidu relacije (10.40).

10.12. Neka su $m_1=\begin{pmatrix}\xi_{11}&\xi_{12}\\ \xi_{21}&\xi_{22}\end{pmatrix}$ i $m_2=\begin{pmatrix}\eta_{11}&\eta_{12}\\ \eta_{21}&\eta_{22}\end{pmatrix}$ ma koje dve matrice posmatranog prostora, i neka je skalarni proizvod definisan kao u zadatku 9.7. Dokažimo najpre da su zadani operatori linearni. U tom cilju posmatramo:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(c_1m_1+c_2m_2)&=\mathcal{M}\left[c_1\begin{pmatrix}\xi_{11}&\xi_{12}\\ \xi_{21}&\xi_{22}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\eta_{11}&\eta_{12}\\ \eta_{21}&\eta_{22}\end{pmatrix}\right]=\\ &=\mathcal{M}\begin{pmatrix}c_1\xi_{11}+c_2\eta_{11}&c_1\xi_{12}+c_2\eta_{12}\\ c_1\xi_{21}+c_2\eta_{21}&c_2\xi_{22}+c_2\eta_{22}\end{pmatrix}=\\ &=\begin{pmatrix}c_1\xi_{11}+c_2\eta_{11}&c_1\xi_{21}+c_2\eta_{21}\\ c_1\xi_{12}+c_2\eta_{12}&c_1\xi_{22}+c_2\eta_{22}\end{pmatrix}=\\ &=c_1\begin{pmatrix}\xi_{11}&\xi_{21}\\ \xi_{12}&\xi_{22}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\eta_{11}&\eta_{21}\\ \eta_{12}&\eta_{22}\end{pmatrix}=\\ &=c_1\mathcal{M}m_1+c_2\mathcal{M}m_2;\end{aligned}$$

linearnost operatora Z se dokazuje na potpuno analogan način, što se ostavlja čitaocu za samostalnu vežbu.

Dokažimo sada da su zadani operatori ermitski. Posmatrajmo skalarne proizvode $(\mathcal{M}m_1, m_2)$ i $(m_1, \mathcal{M}m_2)$. Direktno izračunavanje daje:

$$(\mathcal{M}m_1, m_2)=\left(\begin{pmatrix}\xi_{11}&\xi_{21}\\ \xi_{12}&\xi_{22}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\eta_{11}&\eta_{12}\\ \eta_{21}&\eta_{22}\end{pmatrix}\right)=\bar\xi_{11}\eta_{11}+\bar\xi_{21}\eta_{12}+\bar\xi_{12}\eta_{21}+\bar\xi_{22}\eta_{22},$$

$$(m_1, \mathcal{M}m_2)=\left(\begin{pmatrix}\xi_{11}&\xi_{12}\\ \xi_{21}&\xi_{22}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\eta_{11}&\eta_{21}\\ \eta_{12}&\eta_{22}\end{pmatrix}\right)=\bar\xi_{11}\eta_{11}+\bar\xi_{12}\eta_{21}+\bar\xi_{21}\eta_{12}+\bar\xi_{22}\eta_{22}.$$

Pošto su oba izraza jednaka, operator je ermitski. Čitaocu se opet ostavlja za samostalnu vežbu da na analogni način pokaže da je i Z ermitski operator.

Ograničenost zadanih operatora proizilazi iz činjenice da norma ma koje matrice ostaje nepromenjena nakon delovanja bilo kog od dva zadana operatora, $\|\mathcal{M}m\|=\|m\|$, $\|Zm\|=\|m\|$. Pošto ove jednakosti važe za svaku matricu m, vidimo da su štaviše norme oba operatora jednake jedinici, $\|\mathcal{M}\|=1$, $\|Z\|=1$.

Pređimo na nalaženje svojstvenih vrednosti. Označimo sa $x=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\ x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}$ svojstvenu matricu operatora $\mathcal{M}$, a sa λ pripadajući svojstvenu vrednost. Jednačina svojstvenog problema postaje:

$$\mathcal{M}x=\lambda x \Rightarrow \begin{pmatrix}x_{11}&x_{21}\\ x_{12}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_{11}&\lambda x_{12}\\ \lambda x_{21}&\lambda x_{22}\end{pmatrix},$$

a dobijena matrična jednakost se svodi na sledeći sistem od četiri algebarske jednačine prvog stepena po elementima x_{11}, x_{12}, x_{21} i x_{22} tražene svojstvene matrice:

$$\begin{aligned}(1-\lambda)x_{11}&=0,\\ -\lambda x_{12}+x_{21}&=0,\\ x_{12}-\lambda x_{21}&=0,\\ (1-\lambda)x_{22}&=0.\end{aligned} \qquad (R.\ 10.7)$$

Sistem je homogen, pa može imati netrivijalna rešenja samo ako mu je determinanta jednaka nuli:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0&0\\ 0&-\lambda&1&0\\ 0&1&-\lambda&0\\ 0&0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(\lambda^2-1)=0. \qquad (R.\ 10.8)$$

Formirana karakteristična jednačina ima jedan trostruki koren $\lambda_{1,2,3}=1$ i jedan jednostruki, $\lambda_4=-1$. Uvrstimo li $\lambda=1$ u (R.10.7), vidimo da x_{11}, x_{22} i x_{12} mogu biti proizvoljni i mora biti $x_{21}=x_{12}$. Zaista, ma koja matrica oblika $\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\ x_{12}&x_{22}\end{pmatrix}$ pri transpoziciji ostaje nepromenjena, tj. ona je svojstveni element operatora $\mathcal{M}$ sa svojstvenom vrednošću $\lambda=1$. Proizvoljne matrične elemente x_{11}, x_{12} i x_{22} odredićemo tako da dobijemo tri uzajamno ortogonalne matrice. Možemo, na primer, uzeti

$$m_1^{(1)}=\begin{pmatrix}1&0\\ 0&0\end{pmatrix},\quad m_1^{(2)}=\begin{pmatrix}0&0\\ 0&1\end{pmatrix},\quad m_1^{(3)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\ 1&0\end{pmatrix}, \qquad (R.\ 10.9)$$

(ovo naravno, nije jedini mogući izbor); numeričke koeficijente uz napisane matrice smo odabrali tako da svaka od njih bude normirana. Stavimo $\lambda=-1$ u (R. 10.7). Dobijamo $x_{11}=x_{22}=0$ i $x_{21}=-x_{12}$; poslednji matrični element ostaje proizvoljan. Očevidno je da će svaka matrica oblika $\begin{pmatrix}0&x_{12}\\ -x_{12}&0\end{pmatrix}$ pri

transpoziciji preći u matricu koju dobijamo njenim množenjem sa -1. Normiranjem nalazimo:

$$m_1^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (R.\ 10.10)$$

Analoga razmatranja sa drugim zadanim operatorom Z dovode do sledećih jednačina:

$$Zx - \lambda x \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{21} & x_{11} \\ x_{11} & x_{12} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda x_{11} & \lambda x_{12} \\ \lambda x_{21} & \lambda x_{22} \end{pmatrix},$$

što se svodi na

$$\begin{aligned} -\lambda x_{11} \qquad + x_{21} \qquad &= 0, \\ -\lambda x_{12} \qquad + x_{22} &= 0, \\ x_{11} \qquad - \lambda x_{21} \qquad &= 0, \\ x_{12} \qquad - \lambda x_{22} &= 0, \end{aligned} \qquad (R.\ 10.11)$$

i može imati netrivijalna rešenja samo ako je:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0 \qquad (R.\ 10.12)$$

Dobijena karakteristična jednačina je potpuni kvadrat ima dva dvostruka rešenja. $\lambda_{1,2} = 1$ i $\lambda_{3,4} = -1$. Stavimo li u (R. 10.11) $\lambda = 1$, nalazimo $x_{22} = x_{11}$ i $x_{22} = x_{12}$, dok x_{11} i x_{12} ostaju proizvoljni. Zaista, svaka matrica oblika $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{11} & x_{12} \end{pmatrix}$ ostaje nepromenjena pri dejstvu operatora Z. Proizvoljne elemente u ovim matricama odredimo tako da dobijamo dve uzajamno ortogonalne i normirane matrice. Možemo, na primer, staviti

$$m_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (R.\ 10.13)$$

(što, i u ovom slučaju takođe, nije jedini izbor); numerički koeficijenti su odabrani tako da matrice budu normirane. Nakon ovoga uvrstimo $\lambda = -1$ u (R. 10.11), pa nalazimo da mora biti $x_{21} = -x_{11}$ i $x_{22} = -x_{12}$, a x_{11} i x_{12} ostaju opet proizvoljni. Očevidno je da svaka matrica oblika $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ -x_{11} & -x_{12} \end{pmatrix}$ prilikom zamene vrsta prelazi u matricu koja se dobija ako se ona pomnoži sa -1. Proizvoljne elemente odredimo tako da dobijemo dve ortonormirane matrice. Možemo, na primer, uzeti:

$$m_2^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_2^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (R.\ 10.14)$$

Svojstvene matrice (R. 10.9) i (R. 10.10) operatora $\mathcal{M}$, kao i svojstvene matrice (R. 10.13) i (R. 10.14), operatora Z obrazuju ortonormirane baze

prostora (pošto su oba operatora ermitska). Potrebno je još prikazati ih matricama u obe baze. Matrične elemente izračunavamo u skladu sa (10.37). Čitaocu se ostavlja da samostalno proveri da se u bazi svojstvenih elemenata operatora $\mathcal{M}$ dobija:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (R.\ 10.15)$$

a u bazi svojstvenih elemenata operatora Z:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}, \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (R.\ 10.16)$$

Zapazimo da u ma kojoj bazi ermitskim operatorima odgovaraju ermitske (ovde prosto simetrične) matrice.

10.13. Jezgro zadanog integralnog operatora zadovoljava uslov $K(t, s) = K(s, t)$, što znači da je ovaj operator *ermitski*. Za njegove svojstvene vrednosti moramo, dakle, dobiti realna rešenja. Napišimo:

$$\begin{aligned} y(t) = A\,x(t) &= \int_{-1}^{+1} K(t, s)\,x(s)\,ds = \\ &= \int_{-1}^{+1} (t^2 + 3ts + s^2)\,x(s)\,ds = \\ &= t^2 \int_{-1}^{+1} x(s)\,ds + 3t \int_{-1}^{+1} s\,x(s)\,ds + \int_{-1}^{+1} s^2\,x(s)\,ds. \end{aligned} \qquad (R.\ 10.17)$$

Kao što se odavde vidi, posmatrani operator preslikava ceo prostor $L_2(-1, 1)$ u skup polinoma najviše drugog stepena. Prema tome, ako ovaj operator uopšte ima svojstvene funkcije, one moraju takođe biti polinomi najviše drugog

stepena. Potražimo, dakle, te svojstvene funkcije u jedinom mogućem obliku, $x(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma$. Nepoznate koeficijente α, β i γ treba odrediti iz jednačine svojstvenog problema, koja se svodi na:

$$Ax(t)=t^2\int_{-1}^{1}x(s)\,ds+3t\int_{-1}^{+1}sx(s)\,ds+\int_{-1}^{+1}s^2x(s)\,ds=$$

$$=t^2\int_{-1}^{+1}(\alpha s^2+\beta s+\gamma)\,ds+3t\int_{-1}^{+1}(\alpha s^3+\beta s^2+\gamma s)\,ds+\int_{-1}^{+1}(\alpha s^4+\beta s^3+\gamma s^2)\,ds=$$

$$\left(\frac{2\alpha}{3}+2\gamma\right)t^2+2\beta t+\left(\frac{2\alpha}{5}+\frac{2\gamma}{3}\right)=\lambda\alpha t^2+\lambda\beta t+\lambda\gamma. \qquad (R.\ 10.18)$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene nezavisno promenljive dobijamo:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)\alpha \qquad\qquad &+2\gamma=0,\\ (2-\lambda)\beta \qquad &=0.\\ \frac{2}{5}\alpha \qquad\qquad &+\left(\frac{2}{5}-\lambda\right)\gamma=0;\end{aligned} \qquad (R.\ 10.19)$$

i da bi ovaj homogeni sistem imao rešenja po α, β, γ treba da bude njegova determinanta jednaka nuli:

$$\begin{vmatrix}\frac{2}{3}-\lambda & 0 & 2\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\left[\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)^2-\frac{4}{5}\right]=0. \qquad (R.\ 10.20)$$

Nađena karakteristična jednačina ima tri jednostruka rešenja koja se nalaze elementarno:

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{3\sqrt{5}},\quad \lambda_3=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{3\sqrt{5}}.$$

Uvrstimo li ih redom u (R. 10.19), odredićemo tražene koeficijente i tako naći svojstvene funkcije. Čitaocu se ostavlja da proveri da su ove funkcije date izrazima:

$$\begin{aligned}x_1(t)&=\sqrt{\frac{3}{2}}\,t,\\ x_2(t)&=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}\,(\sqrt{5}\,t^2+1),\\ x_3(t)&=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}\,(\sqrt{5}\,t^2-1),\end{aligned} \qquad (R.\ 10.21)$$

da su ortogonalne u smislu skalarnog proizvoda u $L_2(-1,\ 1)$ i da im je norma jednaka jedinici. One, razume se, ne čine bazu prostora, jako je operator ermitski.

10.14. Jednačina svojstvenog problema $Ax=\lambda x$ se ovde svodi na Euler-ovu diferencijalnu jednačinu drugog reda oblika:

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}+3t\frac{dx}{dt}+(1-\lambda)x=0. \qquad (R.\ 10.22)$$

Kao što je poznato iz matematičke analize, rešavamo je smenom $x(t)=t^r$, gde je r konstanta koju treba odrediti. Za ovo se posle uvrštavanja napisanog izraza za $x(t)$ u diferencijalnu jednačinu i sređivanja dobija jednačina

$$r(r-1)+3r+(1-\lambda)=r^2+2r+(1-\lambda)=0,$$

čija su rešenja

$$r_{1,2}=-1\pm\sqrt{\lambda},$$

a korespondentna rešenja diferencijalne jednačine (R. 10.22) glase

$$\begin{aligned}x_\lambda(t)&=C_1t^{-1+\sqrt{\lambda}}+C_2t^{-1-\sqrt{\lambda}}, &(\lambda\neq 0)\\ x_0(t)&=C_1t^{-1}+C_2t^{-1}\ln t, &(\lambda=0)\end{aligned} \qquad (R.\ 10.23)$$

Potrebno je još proanalizirati pod kojim uslovima će ova formalno nađena rešenja pripadati posmatranom prostoru $L_2(0,\ 1)$. Iz oblika napisanih funkcija (R. 10.23) jasno je da za $\lambda=0$ ni pri kakvom izboru integracionih konstanti se ne dobija $x_0(t)\in L_2(0,\ 1)$. To znači da $\lambda=0$ nije svojstvena vrednost posmatranog operatora. Ovaj operator, uzgred rečeno, *nije ermitski* [čitaocu se ostavlja da to samostalno proveri na osnovu uslova (10.43) i (10.53) i definicije skalarnog proizvoda u L_2]. Prema tome, njegove svojstvene vrednosti *mogu biti kompleksne*. Stavićemo, stoga, $\sqrt{\lambda}=\pm(\alpha'+i\alpha'')$, $\alpha'>0$. Prva od jednačina (R. 10.23) tako postaje:

$$x_\lambda(t)=C_1t^{-1-\alpha'-i\alpha''}+C_2t^{-1+\alpha'+i\alpha''}=$$

$$=K_1t^{-1-\alpha'}\cos(\alpha''\ln t)+K_2t^{-1+\alpha'}\sin(\alpha''\ln t); \qquad (R.\ 10.24)$$

pri pisanju drugog izraza je bila iskorišćena Euler-ova formula $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, a novouvedene konstante K_1 i K_2 su sigurno kompleksne; to uostalom, mogu biti takođe C_1 i C_2. Svojstvene vrednosti operatora su samo one funkcije (R.10.24) kod kojih $\int_0^1 x_\lambda(t)\bar{x}_\lambda(t)\,dt$ ne divergira. Taj uslov će odrediti i spektar operatora, pa ćemo ga detaljnije proanalizirati. Napisane formule će biti konciznije ako pri ovome iskoristimo prvi oblik rešenja (R. 10.24.)

Posmatrajmo, dakle,

$$I(\lambda)=\int_0^1 x_\lambda(t)\bar{x}_\lambda(t)\,dt=$$

$$=\int_0^1\left[C_1t^{-(1+\alpha'+i\alpha'')}+C_2t^{-(1-\alpha'-i\alpha'')}\right]\left[\bar{C}_1t^{-(1+\alpha'-i\alpha'')}+\right.$$

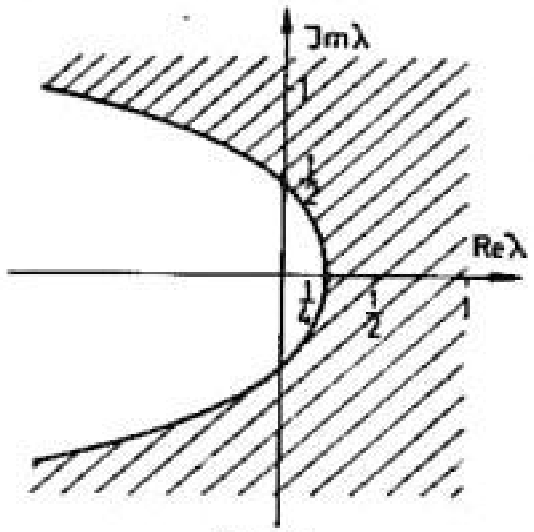
$$+\overline{C}_2 t^{-(1-\alpha'+i\alpha'')}]\,dt=\int_0^1 [C_1\overline{C}_1 t^{-2(1+\alpha')}+C_2\overline{C}_2 t^{-2(1-\alpha')}+$$

$$+C_1\overline{C}_2 t^{-2(1+i\alpha'')}+\overline{C}_1 C_2 t^{-2(1-i\alpha'')}]\,dt.$$

Pošto je $\alpha'>0$, prvi sabirak integranda u zadnjem integralu je sigurno divergentan. Da bi, dakle, izraz $I(\lambda)$ konvergirao, moramo staviti $C_1=0$, nakon čega $I(\lambda)$ postaje:

$$I(\lambda)=C_2\overline{C}_2\int^1 t^{-2(1-\alpha')}\,dt. \qquad (R.\ 10.25)$$

Kao što je poznato iz matematičke analize, integrali oblika $\int t^{\gamma}dt$, ako interval integracije obuhvata nulu gde integrand ima singularitet, konvergiraju samo ako je $\gamma>-1$. Ovo je u našem slučaju ekvivalentno uslovu $\alpha'>\frac{1}{2}$, kao što se vidi iz $(R.\,10.25)$.



Sl. 10.1.

Prema tome, spektar posmatranog operatora čine sve one kompleksne vrednosti λ, čiji kvadratni koren ima realni deo veći od $\frac{1}{2}$. Napišemo li $\sqrt{\lambda}=\pm$ $\pm(\alpha'+i\alpha'')$, tj. $\lambda=\alpha'^2-\alpha''^2+2i\alpha'\alpha''$, dobićemo:

$$\mathrm{Re}\,\lambda=\alpha'^2-\alpha''^2$$

$$\mathrm{Im}\,\lambda=2\alpha'\alpha''.$$

Stavimo li ovde $\alpha'=\frac{1}{2}$, videćemo da su $\mathrm{Re}\,\lambda$ i $\mathrm{Im}\,\lambda$ vezani uslovom

$$\mathrm{Re}\,\lambda+(\mathrm{Im}\,\lambda)^2=\frac{1}{4},$$

koji se u kompleksnoj λ-ravni grafički prikazuje kao parabola (slika 10.1). Šrafirana oblast s desne strane od ove parabole (ne uključujući tačke same parabole) je skup kompleksnih brojeva za koje je $|\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}|>\frac{1}{2}$, dakle spektar svojstvenih vrednosti datog operatora. Operator ima kontinuiran spektar.

10.15. Pravilo (a) proizilazi neposredno iz (10.64), ukoliko se jedna od δ-funkcija u integrandu smatra analogom funkciji f. Pravilo (b) se proverava formalnom parcijalnom integracijom:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{d}{dt}\,\delta(x-t)\,dt=f(t)\,\delta(x-t)\Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df}{dt}\,\delta(x-t)\,dt=$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,\delta(x-t)\,dt=-f'(x);$$

prointegrirani deo je jednak nuli zbog osobina δ-funkcije, a na preostali integral se ponovo može primeniti jednačina (10.64). Relacija (c) zadatka se

može lako proveriti ako se zapazi da se operator $\frac{d}{dx}$ može izvući ispred znaka integrala, nakon čega se integral opet izražava pomoću iste jednačine (10.64);

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{d}{dx}\,\delta(x-t)\,dt=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(x-t)\,dt=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x).$$

Najzad, za dobijanje relacije (d), potrebno je u polaznom integralu izvršiti smenu integracione promenljive, $F(t)=\tau$. Neka je $t=F^*(\tau)$ ista ova jednačina smene, rešena po staroj promenljivoj. Tako nalazimo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta[x-F(t)]\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f[F^*(\tau)]\,\delta(x-\tau)\,\frac{dF^*}{d\tau}\,d\tau=$$

$$=f[F^*(x)]\left(\frac{dF}{d\tau}\right)_{\tau=x};$$

u poslednjoj jednakosti je iskorišćena relacija (10.64). Ako zapazimo da je, prema pravilu za izvod inverzne funkcije,

$$\frac{dF^*}{d\tau}=\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\frac{d\tau}{dt}}=\frac{1}{\frac{dF}{dt}},$$

odakle izlazi i:

$$\left(\frac{dF^*}{d\tau}\right)_{\tau=x}=\frac{1}{\left(\frac{dF}{dt}\right)_{F(t)=x}},$$

dobijamo neposredno rezultat zadatka.

LITERATURA

1. Aljančić S. *"Uvod u realnu i funkcionalnu analizu"*, izd. Građevinska knjiga, Beograd, 1968.

2. Anđelić T. *"Teorija vektora"*, izd. Naučna knjiga, Beograd, 1949.

3. Anđelić T. *"Tenzorski račun"*, izd. Naučna knjiga, Beograd, 1967.

4. Anđelić T. *"Matrice"*, izd. Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1970.

5. Anđelić T. *"Osnovi mehanike neprekidnih sredina"*, izd. Naučna knjiga, Beograd, 1950.

6. Angot A. *"Compléments de Mathématiques"*. Ed. de la Revue d'Optique, Paris, 1952.

7. Arfken G. *"Mathematical Methads for Physicists"*, izd. Academic Press, New York, 196 .

8. Corben H. and Stehle P. *"Classical Mechanics"*, izd. John Wiley, New, York, 1965.

9. Dicke R. and Wittke J. *"Introduction to Quantum Mechanics"*, izd. Addison-Wesley Publishing Co, Reading Mass., 1966.

10. Ivanović D. *"Vektorska analiza"*, izd Naučna knjiga, 1971.

11. Kemble E. *"The Fundamental Principles of Quantum Mechanics with Elementary Applications"*, izd. Dover Publications Inc., New York, 1958.

12. Korn G. and Korn T. *"Mathematical Handbook for Scientists and Engineers"*, izd. McGraw-Hill Co, New York, 1961.

13. Lichnerowicz A. *"Algèbre et analyse linéaires"*, izd Masson, Paris, 1960.

14. Madelung E. *"Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers"*, izd. Springer-Verlag, Berlin, 1957.

15. Mandl F. *"Quantum Mechanics"*, izd. Butterworths Sc. Publ. London, 1960.

16. Margenau H. and Murphy G. *"The Mathematics of Physics and Chemistry"*, izd. Van Nostrand Comp., Princeton, 1968.

17. Messiah A. *"Mécanique quantique"*, I-II, izd. Dunod, Paris, 1969.

18. Morse P. and Feshbach H. *„Methods of Theoretical Physics"*, I-II, izd. McGraw-Hill Comp., New York, 1953.

19. Neumann J. von *"Mathematical Foundations of Quantum Mechanics"*, izd. Princeton Univ. Press, Princeton, 1955.

20. Persico E. *"Fundamentals of Quantum Mechanics"*, izd. Prentice-Halt Inc., Englewood Cliffs N. J., 1957.

21. Prager W. *"Einführung in die Kontinuumsmechanik"*, izd. Birkhäuser Verlag, Basel, 1961.

22. Riesz F. et Szekefalvi-Nagy B. *"Leçons d'analyse fonctionnelle"*, izd. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.

23. Schwartz L. *"Méthodes mathématiques pour les sciences physiques"*, izd. Hermann, Paris, 1961.

24. Spiegel M. *"Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis"*, izd. Schaum Publishing Co, New York, 1959.

25. Блохинцев, Д. И. *"Основы квантовой механики"* изд. Высшая Школа, Москва, 1963.

26. Вулих Б. З. *"Введение в функциональный анализ"*, изд. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1958.

27. Вулих, Б. З *"Краткий курс теории функций вещественной переменной"*, изд. Наука, Москва, 1965.

28. Колмогоров А. Н. Фомин, С. В. *"Элементы теории функций и функционального анализа"*, изд. Наука, Москва, 1972.

29. Люстерник, Л. А. и Соболев, В. И. *"Элементы функционального анализа"* изд. Наука, Москва. 1965.

30. Мальцев, А. И. *„Основы линейной алгебры"*, изд. Наука, Москва 1970.

31. Смирнов, В. И. *"Курс высшей математики"* т. V, изд. Физматгиздат, Москва, 1959.

32. Шилов, Г. Е. *"Математический анализ* - Специальный курс", изд. Физматгиздат, Москва, 1961.

33. Шилов, Г. Е. *"Математический анализ-Конечномерные линейные пространства"*, изд. Наука, Москва, 1969.